

第 07 讲 7.4.2 超几何分布

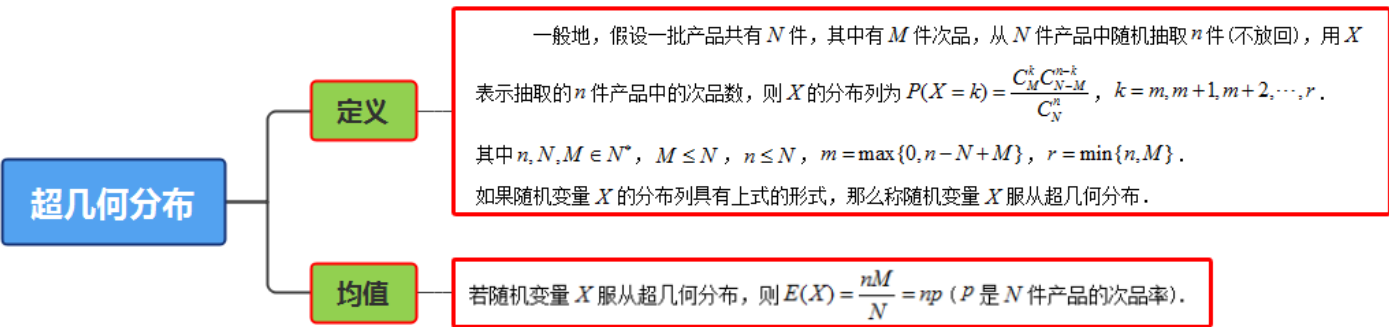
01

学习目标

课程标准	学习目标
①理解超几何分布概率模型的特点，理解超几何分布与古典概型之间的关系。 ②根据超几何分布概率模型的特点，会求超几何概型的分布列、期望、方差。 ③在实际问题中能用超几何概型解决实际问题。	通过本节课的学习，能解决数学中的超几何概率的相关问题，能建立超几何概型解决实际问题

02

思维导图



03

知识清单

知识点 1：超几何分布

(1) 超几何分布

一般地，假设一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品，从 N 件产品中随机抽取 n 件 (不放回)，用 X 表示抽取的 n 件产品中的次品数，则 X 的分布列为 $P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ ， $k=m, m+1, m+2, \dots, r$ 。

其中 $n, N, M \in N^*$ ， $M \leq N$ ， $n \leq N$ ， $m=\max\{0, n-N+M\}$ ， $r=\min\{n, M\}$ 。

如果随机变量 X 的分布列具有上式的形式，那么称随机变量 X 服从超几何分布。

(2) 对超几何分布的理解

①在超几何分布的模型中，“任取 n 件”应理解为“不放回地一次取一件，连续取 n 件”。如果是有放回地抽取，就变成了 n

重伯努利试验, 这时概率分布是二项分布. 所以两个分布的区别就在于是否为有放回地抽取.

②若随机变量 X 满足:

试验是不放回地抽取 n 次;

随机变量 X 表示抽到两类中其中一类物品的件数. 则该随机变量服从超几何分布.

③超几何分布的特点:

不放回抽样;

考察对象分两类;

已知各类对象的个数;

从中抽取若干个个体, 考察其中某类个体个数 X 的概率分布列.

(3) 超几何分布的均值

若随机变量 X 服从超几何分布, 则 $E(X) = \frac{nM}{N} = np$ (p 是 N 件产品的次品率).

【即学即练 1】 (2023·全国·高二课堂例题) 一袋中装有 50 个白球, 45 个黑球, 5 个红球, 现从中随机抽取 20 个球, 求取出的红球个数 ξ 的数学期望.

【答案】 1

【详解】 袋中球的总数为 $50 + 45 + 5 = 100$,

根据题意可知, 随机抽取的 20 个球中红球的个数 ξ 服从超几何分布,

即 $\xi \sim H(100, 5, 20)$.

因为 $N = 100$, $M = 5$, $n = 20$, 所以 $E(\xi) = \frac{nM}{N} = \frac{20 \times 5}{100} = 1$.

知识点 2: 二项分布与超几何分布的区别和联系

(1) 区别

由古典概型得出超几何分布, 由伯努利试验得出二项分布. 这两个分布的关系是, 假设一批产品共有 N 件, 其中有 M 件次品. 从 N 件产品中随机抽取 n 件, 用 X 表示抽取的 n 件产品中的次品数, 若采用有放回抽样的方法抽取, 则随机变量 X 服从二项分布, 即 $X: B(n, p)$ (其中 $p = \frac{M}{N}$) 若采用不放回抽样的方法抽取,

则随机变量 X 服从超几何分布. 超几何分布需要知道总体的容量, 二项分布不需要知道总体容量, 但需要知道“成功率”. 超几何分布的概率计算是古典概型问题, 二项分布的概率计算是相互独立事件的概率问题.

(2) 联系

二项分布和超几何分布都可以描述随机抽取 n 件产品中次品数的分布规律, 并且二者的均值相同. 每次试验只有两种可能的结果: 成功或失败. 当总数很大而抽样数不太大时, 不放回抽样可以认为是有放回抽样, 即对于不放回抽样, 当 n 远远小于 N 时, 每抽取一次后, 对 N 的影响很小, 超几何分布可以近似为二项分布.

题型 01 对超几何分布的理解

【典例 1】(2022 上·高二课时练习) 一个袋中有 6 个同样大小的黑球, 编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 还有 4 个同样大小的白球, 编号为 7, 8, 9, 10. 现从中任取 4 个球, 有如下几种变量:

- ① X 表示取出的最大号码;
- ② X 表示取出的最小号码;
- ③ X 表示取出的白球个数;
- ④ 取出一个黑球记 2 分, 取出一个白球记 1 分, X 表示取出的 4 个球的总得分减去 4 的差.

这四种变量中服从超几何分布的是 ()

- A. ①②
- B. ③④
- C. ①②④
- D. ①②③④

【答案】B

【详解】超几何分布定义: 设有总数为 N 件的甲乙两类物品, 其中甲类有 M 件, 从所有物品中任取 n 件, 则 $n(n \leq N)$ 中所含甲类物品件数 x 是一个离散型随机变量, 它取值 m 时的概率为 $P(X=m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, 我们称离散型随机变量 X 的这种形式的概率分布为超几何分布.

- ①②中的变量不符合超几何分布的定义, 无法用超几何分布的数学模型计算概率, 故①②错误;
- ③中的变量符合超几何分布的定义选项, 将白球视作甲类物品, 黑球视作乙类物品, 则可以用超几何分布的数学模型计算概率, 故③正确;
- ④中的变量可以对应取出的白球个数, 符合超几何分布的定义选项, 可以用超几何分布的数学模型计算概率, 故④正确.

故选: B.

【典例 2】(多选) (2022 上·高二课时练习) (多选题) 下列随机变量 X 不服从超几何分布的是 ()

- A. X 表示 n 次重复抛掷 1 枚骰子出现点数是 3 的倍数的次数
- B. X 表示连续抛掷 2 枚骰子, 所得的 2 个骰子的点数之和
- C. 有一批产品共有 N 件, 其中次品有 M 件 ($N > M > 0$), 采用有放回抽取方法抽取 n 次 ($n > N$), 抽出的次品件数为 X
- D. 有一批产品共有 N 件, 其中 M 件为次品, 采用不放回抽取方法抽 n 件, 出现次品的件数为 X ($N-M > n > 0$)

【答案】ABC

【详解】对于 A, 设事件 E 为“抛掷一枚骰子出现的点数是 3 的倍数”, 则 $P(E) = \frac{1}{3}$,

而在 n 次独立重复试验中事件 E 恰好发生了 k 次 ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) 的概率 $P(\xi = k) = C_n^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$, 符合二项分布的定义, 不是超几何分布, 故 A 正确;

对于 B, X 的取值是 2, 3, ..., 12,

且 $P(X=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$, $P(X=3)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$, ..., 显然不符合超几何分布的定义, 因此 X 不服从超几何分布, 故 B 正确.

C 和 D 的区别: C 是“有放回”抽取, 而 D 是“无放回”抽取, 显然 D 中 n 次试验是不独立的, 因此 D 服从超几何分布, 对于 C 有 $X\sim B\left(n, \frac{M}{N}\right)$ 服从二项分布, 故 C 正确, D 错误.

故选: ABC

【典例 3】(2023·高二课时练习) 下列问题中, 哪些属于超几何分布问题, 说明理由.

(1) 抛掷三枚骰子, 所得向上的数是 6 的骰子的个数记为 X , 求 X 的分布列;

(2) 有一批种子的发芽率为 70%, 任取 10 颗种子做发芽实验, 把实验中发芽的种子的个数记为 X , 求 X 的分布列;

(3) 盒子中有红球 3 只, 黄球 4 只, 蓝球 5 只, 任取 3 只球, 把不是红色的球的个数记为 X , 求 X 的分布列;

(4) 某班级有男生 25 人, 女生 20 人. 选派 4 名学生参加学校组织的活动, 班长必须参加, 其中女生人数记为 X , 求 X 的分布列;

(5) 现有 100 台平板电脑未经检测, 抽取 10 台送检, 把检验结果为不合格的平板电脑的个数记为 X , 求 X 的分布列.

【答案】(1) 不是, 理由见解析

(2) 不是, 理由见解析

(3) 是, 理由见解析

(4) 是, 理由见解析

(5) 不是, 理由见解析

【详解】(1) 解: 样本没有分类, 是重复试验问题, 不是超几何分布问题.

(2) 解: 样本没有分类, 是重复试验问题, 不是超几何分布问题.

(3) 解: 样本符合超几何分布的特征, 样本都分为两类,

随机变量 X 表示抽取 3 件样本某类样本被抽取的件数, 是超几何分布.

(4) 解: 样本符合超几何分布的特征, 样本都分为两类,

随机变量 X 表示抽取 4 件样本某类样本被抽取的件数, 是超几何分布.

(5) 解: 样本没有给出不合格产品数, 无法计算 X 的分布列, 所以不属于超几何分布问题.

【变式 1】(2023 下·江西抚州·高二江西省抚州市第一中学校考阶段练习) 下列随机事件中的随机变量 X 服从超几何分布的是 ()

A. 将一枚硬币连抛 3 次, 记正面向上的次数为 X

B. 某射手的射击命中率为 0.8, 现对目标射击 1 次, 记命中的次数为 X

C. 从 7 男 3 女共 10 名学生干部中选出 5 名学生干部, 记选出女生的人数为 X

D. 盒中有 4 个白球和 3 个黑球, 每次从中摸出 1 个球且不放回, 记第一次摸出黑球时摸取的次数为 X

【答案】C

【详解】对于 A 选项，将一枚硬币连抛 3 次，记正面向上的次数为 X ，

则 X 服从二项分布，A 不满足；

对于 B 选项，某射手的射击命中率为 0.8，现对目标射击 1 次，记命中的次数为 X ，则 X 服从两点分布，B 不满足；

对于 C 选项，从 7 男 3 女共 10 名学生干部中选出 5 名学生干部，记选出女生的人数为 X ，

则 X 服从超几何分布，C 满足；

对于 D 选项，盒中有 4 个白球和 3 个黑球，每次从中摸出 1 个球且不放回，

记第一次摸出黑球时摸取的次数为 X ，则 X 不服从超几何分布，D 不满足.

故选：C.

【变式 2】（2023 下·高二课时练习）下列随机事件中的随机变量 X 不服从超几何分布的是（ ）

A. 将一枚硬币连抛 3 次，正面向上的次数 X

B. 从 7 名男生与 3 名女生共 10 名学生干部中选出 5 名优秀学生干部，选出女生的人数为 X

C. 某射手的命中率为 0.8，现对目标射击 1 次，记命中目标的次数为 X

D. 盒中有 4 个白球和 3 个黑球，每次从中摸出 1 球且不放回， X 是首次摸出黑球时的总次数

【答案】ACD

【详解】对于 A 中，将一枚硬币连抛 3 次，每次正面向上的概率均为 $\frac{1}{2}$ ，所以正面向上的次数 $X: B(3, \frac{1}{2})$

服从二项分布；

对于 B 中，从 7 名男生与 3 名女生共 10 名学生干部中选出 5 名优秀学生干部，选出女生的人数为

$X: H(5, 3, 10)$ 服从超几何分布；

对于 C 中，某射手的命中率为 0.8，现对目标射击 1 次，可得命中目标的次数 $X: B(1, 0.8)$ 服从二项分布；

对于 D 中，盒中有 4 个白球和 3 个黑球，每次从中摸出 1 球且不放回，首次摸出黑球时的总次数 X 的取值为 1, 2, 3, 4, 5，

而超几何分布定义为 $H(n, M, N)$ ，即从 N 个物件（包含 M 个指定种类的物件）中抽出 n 个物件，成功抽出指定种类的物件的次数（不放回），故不服从超几何分布.

故选：ACD.

【变式 3】（2023 下·辽宁·高二辽宁实验中学学校考阶段练习）下列关于超几何分布 $X: H(100, 20, 40)$ 的叙述中，正确的是（ ）

A. X 的可能取值为 0, 1, 2, ..., 20

$$B. P(X=k) = \frac{C_{20}^k C_{80}^{20-k}}{C_{100}^{40}}$$

C. X 的数学期望 $E(X) = 8$

D. 当 $k=8$ 时， $P(X=k)$ 最大

【答案】ACD

【详解】根据超几何分布的定义得到 X 的可能取值为 0, 1, 2, ..., 20, $P(X=k) = \frac{C_{40}^k C_{60}^{20-k}}{C_{100}^{20}}$,

$E(X) = 20 \times \frac{40}{100} = 8$, 故 AC 正确, B 错;

$$\begin{cases} P(X=k) = \frac{C_{40}^k C_{60}^{20-k}}{C_{100}^{20}} \geq P(X=k+1) = \frac{C_{40}^{k+1} C_{60}^{19-k}}{C_{100}^{20}} \\ P(X=k) = \frac{C_{40}^k C_{60}^{20-k}}{C_{100}^{20}} \geq P(X=k-1) = \frac{C_{40}^{k-1} C_{60}^{21-k}}{C_{100}^{20}} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k \geq \frac{253}{34} \approx 7.4 \\ k \leq \frac{287}{34} \approx 8.4 \end{cases}, \text{所以 } k=8 \text{ 时 } P(X=k) \text{ 最大, 故 D 正}$$

确.

故选: ACD.

题型 02 超几何分布的概率

【典例 1】(2024 上·广东深圳·高三深圳外国语学校校联考期末) 一袋中装有大小、质地均相同的 5 个白球, 3 个黄球和 2 个黑球, 从中任取 3 个球, 则至少含有一个黑球的概率是 ()

- A. $\frac{7}{15}$ B. $\frac{8}{15}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【详解】根据题意, 至少含有一个黑球的概率是 $\frac{C_8^2 C_2^1 + C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{8}{15}$.

故选: B.

【典例 2】(2024·江苏·高二假期作业) 在 10 件工艺品中, 有 3 件二等品, 7 件一等品, 现从中抽取 5 件, 则抽得二等品件数 X 的数学期望为 () .

- A. 2 B. 4 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{9}{2}$

【答案】C

【详解】随机变量 X 可取 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_7^5}{C_{10}^5} = \frac{21}{252}, \quad P(X=1) = \frac{C_3^1 C_7^4}{C_{10}^5} = \frac{105}{252}, \quad P(X=2) = \frac{C_3^2 C_7^3}{C_{10}^5} = \frac{105}{252}, \quad P(X=3) = \frac{C_3^3 C_7^2}{C_{10}^5} = \frac{21}{252},$$

$$E(X) = 0 \times \frac{21}{252} + 1 \times \frac{105}{252} + 2 \times \frac{105}{252} + 3 \times \frac{21}{252} = \frac{3}{2},$$

故选: C

【典例 3】(2024·全国·高二假期作业) 从一批含有 6 件正品, 2 件次品的产品中一次性抽取 3 件, 设抽取出的 3 件产品中次品数为 X , 则 $P(X=1) = ()$

- A. $\frac{7}{15}$ B. $\frac{15}{56}$ C. $\frac{15}{28}$ D. $\frac{3}{28}$

【答案】C

【详解】由题意知 X 服从超几何分布，则 $P(X=1) = \frac{C_2^1 C_6^2}{C_8^3} = \frac{2 \times 15}{56} = \frac{15}{28}$.

故选：C

【典例 4】（2024·全国·高三专题练习）一个袋中共有 10 个大小相同的黑球、白球和红球，已知从袋中任意摸出 1 个球，得到黑球的概率是 $\frac{2}{5}$ ；从袋中任意摸出 2 个球，至少得到 1 个白球的概率是 $\frac{7}{9}$ ，则白球的个数为_____.

【答案】5

【详解】设有白球 x 个，因为从袋中任意摸出 2 个球，至少得到 1 个白球的概率是 $\frac{7}{9}$ ，

所以 $\frac{C_{10-x}^2}{C_{10}^2} = \frac{(10-x)(9-x)}{10 \times 9} = 1 - \frac{7}{9}$ ，解得 $x=5$ 或 $x=14$ （舍去）.

故答案为：5

【变式 1】（2024 上·广西桂林·高二统考期末）已知在 10 件产品中有 2 件次品，现从这 10 件产品中任取 3 件，用 X 表示取得次品的件数，则 $P(X=1) = ()$

A. $\frac{C_2^1}{C_{10}^3}$

B. $\frac{C_2^1 C_8^2}{C_{10}^3}$

C. $\frac{C_3^2 C_8^1}{C_{10}^3}$

D. $\frac{C_2^1 C_3^1}{C_{10}^3}$

【答案】B

【详解】由题意可知，10 件产品中有 2 件次品，8 件正品，

从这 10 件产品中任取 3 件，用 X 表示取得次品的件数，

$X=1$ 表示要从 2 件次品中抽取 1 件，从 8 件正品中抽取 2 件，

故 $P(X=1) = \frac{C_2^1 C_8^2}{C_{10}^3}$.

故选：B.

【变式 2】（2024 下·全国·高二随堂练习）某党支部有 10 名党员，7 男 3 女，从中选取 2 人做汇报演出，若 X 表示选中的女党员数，则 $P(X < 2) = ()$

A. $\frac{7}{15}$

B. $\frac{8}{15}$

C. $\frac{14}{15}$

D. 1

【答案】C

【详解】由题意知 X 服从超几何分布， X 的可能取值为 0, 1, 2，

故 $P(X=0) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$,

$P(X=1) = \frac{C_7^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$,

$$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$$

于是 $P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{14}{15}$.

故选：C.

【变式 3】（2024 上·辽宁·高二校联考期末）某班要从 3 名男同学和 5 名女同学中随机选出 4 人去参加某项比赛，设抽取的 4 人中女同学的人数为 X ，则 $P(X \geq 3) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ / 0.5

【详解】 因 $P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) = \frac{C_5^3 C_3^1}{C_8^4} + \frac{C_5^4}{C_8^4} = \frac{1}{2}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【变式 4】（2024 下·全国·高二随堂练习）为庆祝第 19 届亚运会在我国杭州举行，杭州某中学举办了一次“亚运知识知多少”的知识竞赛.参赛选手从 7 道题（4 道多选题，3 道单选题）中随机抽题进行作答，若某选手先随机抽取 2 道题，再随机抽取 1 道题，则最后抽取到的题为多选题的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{7}$

【详解】 设先抽取 2 道题中多选题的题数为 X ，则 X 的可能取值为：0，1，2，

可得： $P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$, $P(X=1) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}$, $P(X=2) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}$,

所以最后抽取到的题为多选题的概率为

$$P = P(X=0) \times \frac{4}{5} + P(X=1) \times \frac{3}{5} + P(X=2) \times \frac{2}{5} = \frac{1}{7} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{7}.$$

故答案为： $\frac{4}{7}$.

题型 03 超几何分布均值与方差（选填）

【典例 1】（2024·全国·高三专题练习）一个袋子中装有 6 个红球和 4 个白球，假设每个球被摸到的可能性是相等的. 从袋子中摸出 2 个球，其中白球的个数为 X ，则 X 的数学期望是（ ）.

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

【答案】 A

【详解】 由题意知 $X=0,1,2$,

则 $P(X=0) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$, $P(X=2) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$.

所以 $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{5}$. 故 A 正确.

故选：A.

【典例 2】（2024 下·全国·高二随堂练习）已知 6 件产品中有 2 件次品，4 件正品，检验员从中随机抽取 3 件进行检测，记取到的正品数为 X ，则下列结论正确的是（ ）

A. $E(2X-1) = \frac{4}{3}$

B. $D(X) = \frac{1}{5}$

C. $E(X) = 1$

D. $D(2X-1) = \frac{8}{5}$

【答案】D

【详解】根据题意可知， X 可能取 1, 2, 3，且服从超几何分布，

故 $P(X=1) = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5}$, $P(X=2) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5}$, $P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$,

所以 $E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2$,

$$D(X) = (1-2)^2 \times \frac{1}{5} + (2-2)^2 \times \frac{3}{5} + (3-2)^2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5},$$

$$E(2X-1) = 2E(X) - 1 = 2 \times 2 - 1 = 3,$$

$$D(2X-1) = 4D(X) = \frac{8}{5},$$

故选：D.

【典例 3】（多选）（2024 上·河南南阳·高二南阳市第五中学校校联考期末）在一个袋中装有除颜色外其余完全一样的 3 个黑球，3 个白球，现从中任取 4 个球，设这 4 个球中黑球的个数为 X ，则（ ）

A. X 服从二项分布

B. X 的值最小为 1

C. $P(X=2) = \frac{3}{5}$

D. $E(X) = 2$

【答案】BCD

【详解】依题意知随机变量 X 服从参数为 6, 4, 3 的超几何分布，故 A 错误；

X 的所有可能取值为 1, 2, 3，所以 X 的值最小为 1，故 B 正确；

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_3^2}{C_6^4} = \frac{3}{5}, \text{ 故 C 正确；}$$

$$E(X) = \frac{nM}{N} = \frac{3 \times 4}{6} = 2, \text{ 故 D 正确.}$$

故选：BCD

【典例 4】（2024 上·全国·高三专题练习）某袋中装有大小相同质地均匀的黑球和白球共 5 个.从袋中随机取出 3 个球，恰全为黑球的概率为 $\frac{1}{10}$ ，则黑球的个数为____.若记取出 3 个球中黑球的个数为 X ，则 $D(X) = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 3 $\frac{9}{25}$ / 0.36

【详解】设袋中黑球有 n 个，则从袋中随机取出 3 个球，恰全为黑球的概率为 $P = \frac{C_n^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$ ，可得 $n=3$ ，该

事件服从超几何分布，

由题可知，取出 3 个球中黑球的个数 X 的可能取值为 1, 2, 3，

由超几何分布事件分别计算对应概率，

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} = \frac{6}{10},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$$

可得分布列如下：

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\text{则 } E(X) = \frac{3}{10} \times 1 + \frac{6}{10} \times 2 + \frac{1}{10} \times 3 = \frac{9}{5},$$

$$D(X) = \frac{3}{10} \times \left(1 - \frac{9}{5}\right)^2 + \frac{6}{10} \times \left(2 - \frac{9}{5}\right)^2 + \frac{1}{10} \times \left(3 - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

故答案为：3； $\frac{9}{25}$

【变式 1】（2024 上·山东临沂·高三校联考开学考试）一个不透明的袋子中装有 3 个黑球， n 个白球（ $n \in \mathbb{N}^*$ ），

这些球除颜色外大小、质地完全相同，从中任意取出 3 个球，已知取出 2 个黑球，1 个白球的概率为 $\frac{9}{20}$ ，

设 X 为取出白球的个数，则 $E(X) = (\quad)$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

【答案】A

【详解】由题可知， $\frac{C_3^2 C_n^1}{C_{n+3}^3} = \frac{9}{20}$ ，解得 $n=3$ ，

X 的可能取值为 0, 1, 2, 3，

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}, \quad P(X=1) = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20}, \quad P(X=2) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20}, \quad P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20},$$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{9}{20} + 2 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{1}{20} = 1.5.$$

故选：A

【变式 2】（多选）（2024 上·江苏南通·高三海安高级中学校考阶段练习）袋中有 10 个大小相同的球，其中 6 个黑球，4 个白球，现从中任取 4 个球，记随机变量 X 为其中白球的个数，随机变量 Y 为其中黑球的个数，若取出一个白球得 2 分，取出一个黑球得 1 分，随机变量 Z 为取出 4 个球的总得分，则下列结论中正确的是（ ）

A. $P(|Z-6|\leq 1) = \frac{97}{105}$

B. $E(X) > E(Y)$

C. $D(X) = D(Y)$

D. $E(Z) = \frac{28}{5}$

【答案】ACD

【详解】由题意知 X, Y 均服从于超几何分布，且 $X+Y=4$ ， $Z=2X+Y$ ，

故 $P(X=k) = \frac{C_4^k C_6^{4-k}}{C_{10}^4} (k=0,1,2,3,4)$ ；

从而 $P(|Z-6|\leq 1) = 1 - P(Z=4) - P(Z=8) = 1 - P(X=4) - P(X=0) = \frac{97}{105}$ ，故选项 A 正确；

$E(X) = 4 \times \frac{4}{10} = \frac{8}{5}$ ， $E(Y) = 4 - E(X) = \frac{12}{5}$ ， $D(X) = D(4-Y) = D(Y)$ ，故选项 B 错误，C 正确；

$E(Z) = 2 \times E(X) + E(Y) = \frac{28}{5}$ ，故选项 D 正确；

故选：ACD.

【变式 3】（2024·全国·高三专题练习）有一批产品，其中有 6 件正品和 4 件次品，从中任取 3 件，其中次品的件数记为 X ，则次品件数 X 的期望为_____.

【答案】1.2

【详解】由题意知随机变量 X 服从超几何分布，其中 $N=10$ ， $M=4$ ， $n=3$ ，

于是次品件数 X 的期望 $E(X) = \frac{nM}{N} = 1.2$ ，

故答案为：1.2

【变式 4】（2024 下·全国·高二随堂练习）某 10 人组成兴趣小组，其中有 5 名团员，从这 10 人中任选 4 人参加某种活动，用 X 表示 4 人中的团员人数，则 $P(X=3) = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $EX = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5}{21}$ 2

【详解】依题意 X 服从参数为 $N=10, M=5, n=4$ 的超几何分布，

所以 $P(X=3) = \frac{C_5^3 C_5^1}{C_{10}^4} = \frac{5}{21}$ ， $EX = \frac{nM}{N} = \frac{4 \times 5}{10} = 2$.

故答案为： $\frac{5}{21}$ ，2

题型 04 超几何分布均值与方差（解答）

【典例 1】

(2024 上·湖南长沙·高二长沙一中校考期末) 某袋中装有大小相同、质地均匀的 6 个球, 其中 4 个黑球和 2 个白球. 从袋中随机取出 2 个球, 记取出白球的个数为 X .

(1) 写出 X 的分布列, 并求出 $E(X)$ 和 $D(X)$ 的值;

(2) 若取出一个白球得一分, 取出一个黑球得两分, 最后得分为 Z , 求出 $E(Z)$ 和 $D(Z)$ 的值.

【答案】(1) 分布列见解析, $E(X) = \frac{2}{3}$, $D(X) = \frac{16}{45}$

(2) $E(Z) = \frac{10}{3}$, $D(Z) = \frac{16}{45}$;

【详解】(1) 依题意, 得 $X = 0, 1, 2$,

$$P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}, \quad P(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, \quad P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

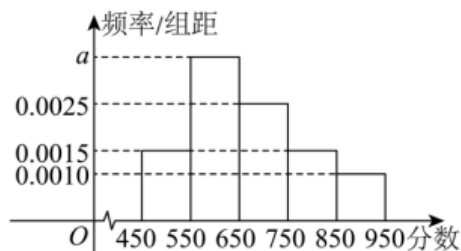
$$E(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3};$$

$$D(X) = \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2}{5} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{8}{15} + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{15} = \frac{16}{45}.$$

(2) 依题意, 得 $Z = X + 2(2 - X) = 4 - X$,

$$E(Z) = 4 - E(X) = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}, \quad D(Z) = D(X) = \frac{16}{45}.$$

【典例 2】(2024 上·广东广州·高三校考期末) 某学校共有 1000 名学生参加知识竞赛, 其中男生 400 人, 为了解该校学生在知识竞赛中的情况, 采取分层抽样随机抽取了 100 名学生进行调查, 分数分布在 450~950 分之间, 根据调查的结果绘制的学生分数频率分布直方图如图所示:



将分数不低于 750 分的学生称为“高分选手”.

(1) 求 a 的值, 并估计该校学生分数的平均数、中位数和众数 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(2) 现采用分层抽样的方式从分数落在 $[550, 650)$, $[750, 850)$ 内的两组学生中抽取 10 人, 再从这 10 人中随机抽取 3 人, 记被抽取的 3 名学生中属于“高分选手”的学生人数为随机变量 X , 求 X 的分布列及数学期望;

【答案】(1) $a = 0.0035$ ，平均数 670，中位数 650，众数 600

(2)分布列见解析, $E(X)=\frac{9}{10}$

【详解】(1) 由题意知 $100 \times (0.0015 + a + 0.0025 + 0.0015 + 0.001) = 1$,

解得 $a = 0.0035$,

样本平均数为 $\bar{x} = 500 \times 0.15 + 600 \times 0.35 + 700 \times 0.25 + 800 \times 0.15 + 900 \times 0.10 = 670$,

由于 $100 \times (0.0015 + 0.0035) = 0.5$, 故中位数 650,

众数 600.

(2) 由题意, 从 $[550, 650)$ 中抽取 7 人, 从 $[750, 850)$ 中抽取 3 人,

随机变量 X 的所有可能取值有 0, 1, 2, 3.

$$P(X=k) = \frac{C_3^k C_7^{3-k}}{C_{10}^3} (k=0,1,2,3),$$

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \frac{63}{120} + 2 \times \frac{21}{120} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{9}{10}$.

【典例 3】(2024·全国·高三专题练习) 2023 年 9 月 23 日至 2023 年 10 月 8 日, 第 19 届亚运会将在中国杭州举行. 杭州某中学高一年级举办了“亚运在我心”的知识竞赛, 其中 1 班, 2 班, 3 班, 4 班报名人数如下:

班号	1	2	3	4
人数	30	40	20	10

该年级在报名的同学中按分层抽样的方式抽取 10 名同学参加竞赛, 每位参加竞赛的同学从预设的 10 个题目中随机抽取 4 个作答, 至少答对 3 道的同学获得一份奖品, 假设每位同学的作答情况相互独立.

(1) 求各班参加竞赛的人数;

(2) 2 班的小张同学被抽中参加竞赛, 若该同学在预设的 10 个题目中恰有 3 个答不对, 记他答对的题目数为 X , 求 X 的分布列及数学期望.

【答案】(1) 3, 4, 2, 1

(2) 分布列见解析, 2.8

【详解】(1) 各班报名人数总共 100 人, 抽取 10 人, 抽样比为 $\frac{1}{10}$,

故 1-4 班分别抽取 $30 \times \frac{1}{10} = 3$ (人), $40 \times \frac{1}{10} = 4$ (人), $20 \times \frac{1}{10} = 2$ (人), $10 \times \frac{1}{10} = 1$ (人).

(2) 由题意, X 的可能取值为 1, 2, 3, 4,

$$P(X=1) = \frac{C_7^1 C_3^3}{C_{10}^4} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30},$$

$$P(X=2) = \frac{C_7^2 C_3^2}{C_{10}^4} = \frac{21 \times 3}{210} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=3) = \frac{C_7^3 C_3^1}{C_{10}^4} = \frac{35 \times 3}{210} = \frac{1}{2},$$

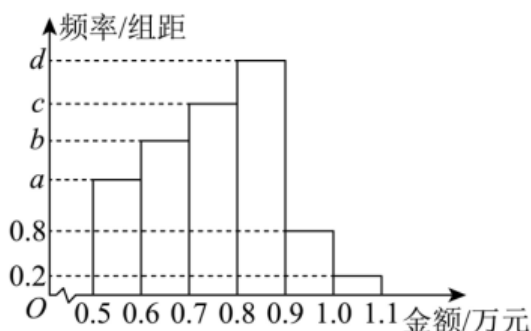
$$P(X=4) = \frac{C_7^4 C_3^0}{C_{10}^4} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6},$$

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{30} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{14}{5} = 2.8$$

【变式 1】（2024·全国·高二假期作业）假设某市大约有 800 万网络购物者，某电子商务公司对该地区 n 名网络购物者某年度上半年前 6 个月内的消费情况进行统计，发现消费金额（单位：万元）都在区间 $[0.5, 1.1]$ 内，其频率分布直方图如图所示，若频率分布直方图中的 a, b, c, d 满足 $d = c + 0.5 = b + 1 = a + 1.5$ ，且从左到右 6 个小矩形依次对应第一至六小组，第五小组的频数为 2400.



(1) 求 a, b, c, d 的值；

(2) 现用分层抽样方法从前 4 组中选出 18 人进行网络购物爱好调查，

① 求在每组应该抽取的人数；

② 在前 2 组所抽取的人中，再随机抽取 3 人，记这 3 人来自第一组的人数为 X ，求随机变量 X 的分布列与数学期望.

【答案】 (1) $a = 1.5, b = 2, c = 2.5, d = 3$

(2) ① 各组应该抽取的人数分别为 3, 4, 5, 6; ② 分布列见解析，数学期望为 $\frac{9}{7}$

【详解】 (1) 根据频率分布直方图可知，第五小组的频率为 $0.8 \times 0.1 = 0.08$ ，又因为第五小组的频数为 2400，所以样本容量 $n = \frac{2400}{0.08} = 30000$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/116042035135010134>