青岛市 2024 年高三年级部分学生调研检测

数学试题

2024.11

本试卷共 4 页，19 题.全卷满分 150 分.考试用时 120 分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x|\ln(1-x)<2\}$，则 $A\cap\complement_{\mathrm{R}}B=$（　）

A. $\{2\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{-2,-1,0\}$

【答案】C

【解析】

【分析】先根据对数不等式求出集合 B，再应用补集及交集运算求解即可.

【详解】因为 $\ln(1-x)<2$，所以 $0<1-x<\mathrm{e}^2, 1-\mathrm{e}^2<x<1$，

所以 $B=(1-\mathrm{e}^2,1)$，$\complement_{\mathrm{R}}B=(-\infty,1-\mathrm{e}^2]\cup[1,+\infty)$，

所以 $A\cap\complement_{\mathrm{R}}B=\{1,2\}$.

故选：C.

2. 已知 a,b 都是实数，那么“$a>b$”是“$\sqrt{a}>\sqrt{b}$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】根据必要不充分条件定义判断可得答案.

【详解】当$b<a<0$时，$\sqrt{a},\sqrt{b}$无意义，

当$\sqrt{a}>\sqrt{b}$时，由不等式性质可得$a>b$，

所以“$a>b$”是“$\sqrt{a}>\sqrt{b}$”的必要不充分条件.

故选：B.

3. 要得到函数$y=\sin 2x$的图象，只要将函数$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象（　）

A. 向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位　　B. 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位

C. 向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位　　D. 向右平移$\frac{5\pi}{12}$个单位

【答案】D

【解析】

【分析】根据三角函数图象平移变换法则判断，注意化为同名函数.

【详解】$y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})=\sin(2x+\frac{5\pi}{6})=\sin[2(x+\frac{5\pi}{12})]$，

所以将函数$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{5\pi}{12}$个单位即得函数$y=\sin 2x$的图象，

故选：D.

4. 已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2|\vec{b}|=2$，且$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=-\frac{1}{3}$，则$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为（　）

A. $-\frac{1}{6}\vec{a}$　　B. $\frac{1}{6}\vec{a}$

C. $-\frac{1}{3}\vec{a}$　　D. $\frac{1}{3}\vec{a}$

【答案】A

【解析】

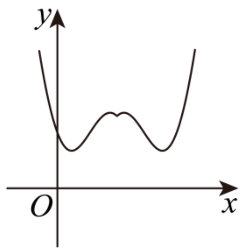
【分析】根据投影向量的定义求解判断.

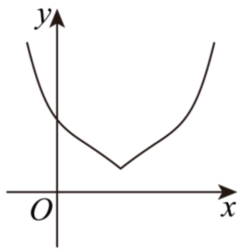
【详解】由已知$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=2\times1\times(-\frac{1}{3})=-\frac{2}{3}$，

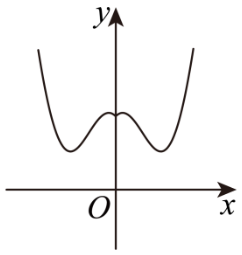
$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{-\frac{2}{3}}{2}\cdot\frac{\vec{a}}{2}=-\frac{1}{6}\vec{a}$，

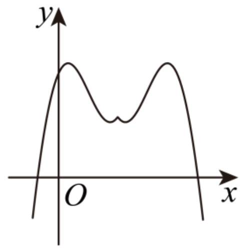
故选：A．

5. 函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{|x-1|}-\cos\pi x$ 的大致图象为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】分析函数值的变化趋势，可排除 D，分析函数图象的对称性，可排除 C，求导，分析函数的单调性，可排除 B.

【详解】当 $x\to+\infty$ 时，$\mathrm{e}^{|x-1|}\to+\infty$，$\cos\pi x\in\left[-1,1\right]$，所以 $f\left(x\right)\to+\infty$，故 D 错误；

因为 $f\left(x+1\right)=\mathrm{e}^{|x|}-\cos\pi\left(x+1\right)=\mathrm{e}^{|x|}+\cos\pi x$ 为偶函数，所以函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，故 C 错误；

当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-1}-\cos\pi x$，$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-1}+\pi\sin\pi x$，因为 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}+\pi\sin\frac{3\pi}{2}=\sqrt{\mathrm{e}}-\pi<0$，所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上存在单调减区间，故 B 错误；

故选：A

6. “克拉茨猜想”又称“$3n+1$ 猜想”，是德国数学家洛萨·克拉茨在 1950 年世界数学家大会上公布的一个猜想：任给一个正整数 n，如果 n 是偶数，就将它减半；如果 n 是奇数，就将它乘 3 后加 1.不断重复这样的运算，经过有限步后，最终都能够得到 1.若 n 经过 5 次运算后首次得到 1，则 n 的所有不同取值的和为（　　）

A. 16　　　　B. 32　　　　C. 37　　　　D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】从第 5 项为 1 出发，按照规则逐步进行逆向分析，可求出的所有可能的取值可得答案.

【详解】如果正整数按照上述规则经过 5 次运算得到 1，

则经过 4 次运算后得到的一定是 2；

经过 3 次运算后得到的一定是 4；

经过 2 次运算后得到的为 8 或 1（不合题意）；

经过 1 次运算后得到的是 16；

所以开始时的数为 5 或 32.

可得 5+32=37.

故选：C.

7. 若正数 a，b 满足 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$（　）

A. 128　　B. 108　　C. 2　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】由对数的运算法则变形，把对数式化为指数式即可得.

【详解】令 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)=\log_2 4a=\log_3 27b=t$，

则 $4a=2^t$，$27b=3^t$，$a+b=6^t$，

因为 $2^t\times3^t=6^t$，所以 $4a\cdot27b=a+b$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=108$，

故选：B.

8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 对 $\forall x_1$，$x_2\in[0,+\infty)$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<x_1^2+x_1x_2+x_2^2$，且 $f(x)-f(-x)=2x^3$，则不等式 $f(x)+1+3x>f(1+x)-3x^2$ 的解集为（　）

A. $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】构造函数 $g(x)=f(x)-x^3$，分析函数 $g(x)$ 的奇偶性和单调性，把不等式 $f(x)+1+3x>f(1+x)-3x^2$ 转化成代数不等式求解.

【详解】不妨设 $0\le x_1<x_2$，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<x_1^2+x_1x_2+x_2^2$

所以 $f(x_1)-f(x_2)>(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=x_1^3-x_2^3\Rightarrow f(x_1)-x_1^3>f(x_2)-x_2^3$.

设 $g(x)=f(x)-x^3$，则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

又 $f(x)-f(-x)=2x^3\Rightarrow f(x)-x^3=f(-x)-(-x)^3$，即 $g(x)=g(-x)$，所以 $g(x)$ 为偶函数.

又不等式 $f(x)+1+3x>f(1+x)-3x^2$ 可化为：$f(x)-x^3>f(1+x)-(x+1)^3$，

即 $g(x)>g(1+x)$，所以 $|x|<|x+1|\Rightarrow x^2<(x+1)^2\Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}$.

故选：B

【点睛】思路点睛：这种题型，一看就是需要构造函数，分析函数的性质（一般来说有定义域，单调性，奇偶性），利用函数性质，把函数不等式转化成代数不等式求解.所以该问题的关键是怎样构造函数.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知三条直线 l，m，n 和三个平面 α，β，γ，则（　）

A. 若 $l\,/\!/\,m$，$l\,/\!/\,n$，则 $m\,/\!/\,n$

B. 若 $l\subset\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $l\perp\beta$

C. 若 $l\,/\!/\,\alpha$，$l\,/\!/\,\beta$，则 $\alpha\,/\!/\,\beta$

D. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$l\perp\gamma$，则 $\alpha\perp\gamma$

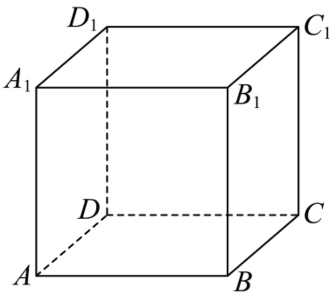
【答案】AD

【解析】

【分析】对于 A：根据平行线的传递性即可判断；对于 BC：以正方体为载体，举反例说明即可；对于 D：根据面面垂直的判定定理即可判断.

【详解】对于选项 A：若 $l\,/\!/\,m$，$l\,/\!/\,n$，则 $m\,/\!/\,n$，故 A 正确；

对于 BC, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，



选项 B：取α为平面$ABCD$，β为平面ABB_1A_1，$l=CD$，符合题设，

但$CD//$平面ABB_1A_1，故 B 错误；

选项 C：取α为平面$ABCD$，β为平面ABB_1A_1，$l=C_1D_1$，

但平面$ABCD$与平面ABB_1A_1相交，故 C 错误；

对于选项 D：若$\alpha \cap \beta = l$，$l \perp \gamma$，

显然$l \subset \alpha$，所以$\alpha \perp \gamma$，故 D 正确；

故选：AD.

10. 已知函数$f\left(x\right)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$，则（　）

A. $f\left(x\right)$的定义域$\left[2k\pi, 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$（$k \in \mathbf{Z}$）

B. $x=\dfrac{\pi}{4}$是$y=f(x)$图象的一条对称轴

C. $f\left(x\right)$在区间$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增

D. $f\left(x\right)$的最大值为$2^{\frac{3}{4}}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】由$\begin{cases}\sin x \geq 0\\ \cos x \geq 0\end{cases}$可得定义域判断 A，证明$f(\dfrac{\pi}{2}-x)=f(x)$判断 B，平方后化简函数式，再结合正弦函数的单调性判断 C，根据单调性求得最大值判断 D.

【详解】由$\begin{cases}\sin x \geq 0\\ \cos x \geq 0\end{cases}$得$2k\pi \leq x \leq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$，A 正确；

$f(\frac{\pi}{2}-x)=\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}+\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}=f(x)$，

所以 $x=\frac{\pi}{4}$ 是是$y=f(x)$图象的一条对称轴，B 正确；

$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$， $y^2=\sin x+\cos x+2\sqrt{\sin x\cos x}=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2\sin 2x}$，

$x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时， $x+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$， $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 递减，

$2x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$， $y=\sin 2x$ 递减，从而 $\sqrt{2\sin 2x}$ 递减，所以 $y^2=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2\sin 2x}$ 递减，所以 $f(x)$ 递减，C 错；

$x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时， $x+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$， $2x\in(0,\frac{\pi}{2})$，同理选项 C 可得 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上递增， $f(x)$ 的最小正周期是 2π，

所以 $f(x)_{\max}=f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\times 2^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$，D 正确.

故选：ABD.

11. 已知实数 x， y 满足 $\left(x-y\right)^2+x^2+y^2-4=0$，则（　）

A. $x+y\le 2$

B. $x+y\ge -2\sqrt{2}$

C. $x-y\geqslant -\frac{2\sqrt{6}}{3}$

D. $x-y\leqslant \frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】BC

【解析】

【分析】依题意可得 $x^2+y^2-xy=2$，则 $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=2$，令 $x-\frac{y}{2}=\sqrt{2}\cos\theta$， $\frac{\sqrt{3}}{2}y=\sqrt{2}\sin\theta$，$\theta\in\mathbf{R}$，即可得到 $x=\sqrt{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta$， $y=\frac{2\sqrt{6}}{3}\sin\theta$，再根据三角恒等变换公式及三角函数的有界性求出 $x+y$， $x-y$ 的范围.

【详解】因为 $\left(x-y\right)^2+x^2+y^2-4=0$，所以 $x^2+y^2-2xy+x^2+y^2-4=0$，

即 $x^2+y^2-xy=2$，

则$\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=2$，令$x-\frac{y}{2}=\sqrt{2}\cos\theta$，$\frac{\sqrt{3}}{2}y=\sqrt{2}\sin\theta$，$\theta\in\mathbf{R}$，

则$x=\sqrt{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta$，$y=\frac{2\sqrt{6}}{3}\sin\theta$，

所以$x+y=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{6}\sin\theta=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，

因为$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$，所以$x+y\in\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$，故 A 错误，B 正确；

$x-y=\sqrt{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=\frac{2\sqrt{6}}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，

因为$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$，所以$x-y\in\left[-\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]$，故 C 正确，D 错误.

故选：BC

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知等差数列$\{a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）中a_1，a_2，a_6成等比数列，$a_5=13$，则$a_9=$__________.

【答案】25 或 13；

【解析】

【分析】设公差为d，由已知条件求得a_1,d后，利用等差数列的通项公式可得结论.

【详解】设公差为d，因为a_1，a_2，a_6成等比数列，所以$a_2^2=a_1a_6$，

即$(a_1+d)^2=a_1(a_1+5d)$，所以$d=0$或$d=3a_1$，

若$d=0$，则$a_9=a_5=13$，

$d=3a_1$，则$a_5=a_1+4d=13a_1=13$，$a_1=1$，$d=3$，$a_9=1+8\times3=25$，

故答案为：13 或 25.

13. 已知曲线$y=\mathrm{e}^x$在$x=-1$处的切线与曲线$y=a+\ln x$相切，则$a=$__________.

【答案】$\frac{2}{\mathrm{e}}$##$2\mathrm{e}^{-1}$

【解析】

【分析】根据导数的几何意义可得曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $x=-1$ 处的切线 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x+\frac{2}{\mathrm{e}}$，对于 $y=a+\ln x$，设切点坐标为 $\left(x_0,a+\ln x_0\right)$，可得切线斜率为 $\frac{1}{x_0}$，求切线方程列式求解即可.

【详解】因为 $y=\mathrm{e}^x$，则 $y'=\mathrm{e}^x$，

当 $x=-1$，可得 $y=y'=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

即切点坐标为 $\left(-1,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，切线斜率为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，

则切线方程为 $y-\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}(x+1)$，即 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x+\frac{2}{\mathrm{e}}$；

又因为 $y=a+\ln x$，则 $y'=\frac{1}{x}$，

设切点坐标为 $\left(x_0,a+\ln x_0\right)$，则切线斜率为 $\frac{1}{x_0}$，

所以切线方程为 $y-\left(a+\ln x_0\right)=\frac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$，即 $y=\frac{1}{x_0}x+a-1+\ln x_0$，

可得 $\begin{cases}\frac{1}{x_0}=\frac{1}{\mathrm{e}}\\ a-1+\ln x_0=\frac{2}{\mathrm{e}}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=\mathrm{e}\\ a=\frac{2}{\mathrm{e}}\end{cases}$.

故答案为：$\frac{2}{\mathrm{e}}$.

14. 已知集合 $A=\{3,4,\cdots,n+2\}$（$n\geq 3$，$n\in\mathbf{N}^*$），若集合 $\boldsymbol{M}\subseteq\boldsymbol{A}$，且 M 中的所有元素之和为奇数，称 M 为 A 的奇子集，则 A 的所有“奇子集元素之和”的总和为__________.

【答案】$n(n+5)\times 2^{n-3}$

【解析】

【分析】设S为A的奇子集，T 中的所有元素之和为偶数，可称为偶子集，分析得A的奇子集与偶子集个数相等；计算奇子集元素之和时，含元素 i 的和是 $2^{n-2}i$，即可求得奇子集的元素之和.

【详解】设S为A的奇子集，则若 $3\notin S$，令 $T=S\cup\{3\}$，

若 $3\in S$，令 T 为把S中的3去掉后剩下的元素形成的集合，

则 T 中的所有元素之和为偶数，可称为偶子集，

显然每个奇子集S，均恰有一个偶子集T与之对应，

每个偶子集T，均恰有一个奇子集S与之对应，

故A的奇子集与偶子集个数相等；

对任一$i(3\le i\le n+2)$，含i的子集共有2^{n-1}个，用上面的对应方法可知，

在$i\ne 3$时，这2^{n-1}个子集中有一半为奇子集，

在$i=3$时，由于$n\ge 3$，将上边的3换成5，同样可得其中有一半为奇子集，

于是在计算奇子集元素之和时，含元素i的和是$2^{n-2}i$，

$\therefore$奇子集容量之和是$\sum\limits_{i=3}^{n+2}2^{n-2}i=3\times 2^{n-2}+4\times 2^{n-2}+\cdots+(n+2)\times 2^{n-2}=n(n+5)\cdot 2^{n-3}$.

故答案为：$n(n+5)\times 2^{n-3}$.

【点睛】关键点点睛：设S为A的奇子集，T中的所有元素之和为偶数，可称为偶子集，分析得A的奇子集与偶子集个数相等；计算奇子集元素之和时，元素i的贡献是$2^{n-2}i$，即可求得奇子集的元素之和.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 设$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$2a\cos C=2b-\sqrt{3}c$

（1）求A；

（2）若$c=2$，$\triangle ABC$内切圆半径$r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，求a.

【答案】（1）$A=\dfrac{\pi}{6}$

（2）1

【解析】

【分析】（1）先由正弦定理得$2\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin C=2\sin B$，再应用两角和的正弦公式化简得出$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$结合角的范围得解；

（2）先应用内切圆半径表示面积，化简得$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}b$，再由正弦定理$a=\sqrt{3}b-2$结合余弦定理得解.

【小问1详解】

由正弦定理得$2\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin C=2\sin B$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/116045054113011003