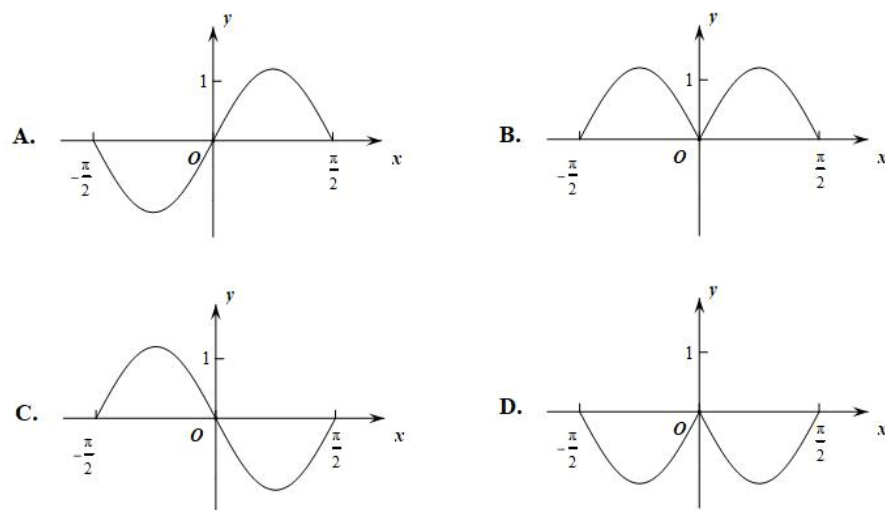


考向 09 函数的图象

经典真题

1. (2022 年甲卷理科第 5 题文科第 7 题) 函数 $y = (3^x - 3^{-x})\cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的图象大致为



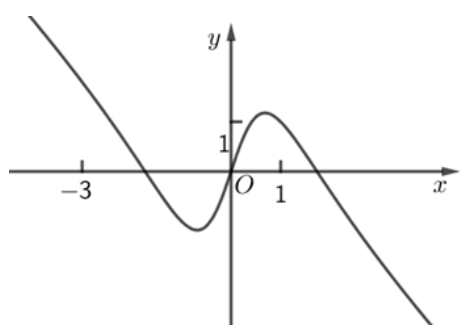
【答案】A

【解析】设 $f(x) = (3^x - 3^{-x})\cos x$ ， $f(-x) = (3^{-x} - 3^x)\cos(-x) = -f(x)$ ，所以 $f(x)$ 为奇函数，排除 BD，

令 $x = 1$ ，则 $f(1) = (3 - 3^{-1})\cos 1 > 0$ ，排除 C，故选 A.

2. (2022 年乙卷文科第 8 题) 右图是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-3, 3]$ 的大致图象，则函数是

A. $y = \frac{-x^3 + 3x}{x^2 + 1}$ B. $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ C. $y = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$ D. $y = \frac{2 \sin x}{x^2 + 1}$



【答案】A

【解析】由图象可知函数是奇函数，且 $x = 1$ ， $y > 0$ ，排除 B. 由 $x = 3$ ， $y < 0$ ，排除 D. 由 $x = -3$ ， $y > 2$ ，排除 C. 故选 A.

3. (2022 年浙江卷第 6 题) 为了得到 $y = 2\sin 3x$ 的图象，只要把函数 $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$ 图象上所有点

A. 向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{15}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{15}$ 个单位长度

【答案】D

【解析】函数图象平移满足左加右减， $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = 2\sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{15}\right)\right]$ ，因此需要将函数图象向右平移 $\frac{\pi}{15}$ 个单位长度，可以得到 $y = 2\sin 3x$ 的图象。故本题选D.

方法技巧

1. 函数图象的识辨：

- (1)从函数的定义域，判断图象的左右位置；从函数的值域，判断图象的上下位置.
- (2)从函数的单调性，判断图象的变化趋势.
- (3)从函数的奇偶性，判断图象的对称性.
- (4)从函数的周期性，判断图象的循环往复.
- (5)从函数的特征点，排除不合要求的图象.

2. 函数图象的画法

- (1)直接法：函数解析式（或变形后的解析式）是熟悉的基本函数时，就可根据这些函数的特征找出图象的关键点直接作出图象；
- (2)转化法：含有绝对值符号的函数，可脱掉绝对值符号，转化为分段函数来画图象；
- (3)变换法：若函数图象可由某个基本函数的图象经过平移、翻折、对称得到，可利用图象变换作出，但要注图象变换顺序，对不能直接找到熟悉的基本函数的要先变形，并应注意平移变换的顺序对变换单位及解析式的影响。

3. 函数图象的识别

- (1)抓住函数的性质，定性分析
 - ①从函数的定义域，判断图象的左右位置；从函数的值域，判断图象上下位置；
 - ②从函数的单调性，判断图象的变化趋势；
 - ③从周期性，判断图象的循环往复；
 - ④从函数的奇偶性，判断图象的对称性.
- (2)抓住函数的特征，定量计算
利用函数的特征点、特殊值的计算，分析解决问题.

常用结论

1. 函数图象平移变换的八字方针

- (1)“左加右减”，要注意加减指的是自变量.
- (2)“上加下减”，要注意加减指的是函数值.

2. 函数图象自身的轴对称

(1) $f(-x)=f(x) \Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x) \Leftrightarrow f(x)=f(2a-x) \Leftrightarrow f(-x)=f(2a+x)$.

(3) 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且有 $f(a+x)=f(b-x)$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

3. 函数图象自身的中心对称

(1) $f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $(a, 0)$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=-f(a-x) \Leftrightarrow f(x)=-f(2a-x) \Leftrightarrow f(-x)=-f(2a+x)$.

(3) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 成中心对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=2b-f(a-x) \Leftrightarrow f(x)=2b-f(2a-x)$.

4. 两个函数图象之间的对称关系

(1) 函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称(由 $a+x=b-x$ 得对称轴方程);

(2) 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(2a-x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称;

(3) 函数 $y=f(x)$ 与 $y=2b-f(-x)$ 的图象关于点 $(0, b)$ 对称.

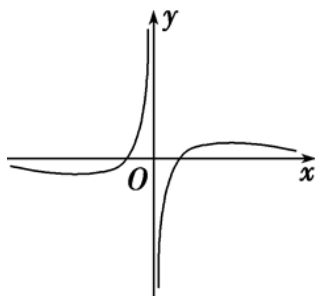


【易错点 1】函数图象的左右变换都针对自变量“ x ”而言, 如从 $f(-2x)$ 的图象到 $f(-2x+1)$ 的图象是向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度, 其中是把 x 变成 $x-\frac{1}{2}$.

【易错点 1】要注意一个函数的图象自身对称和两个不同的函数图象对称的区别.



1. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可以是()



A. $f(x)=\frac{\ln|x|}{x}$

B. $f(x)=\frac{e^x}{x}$

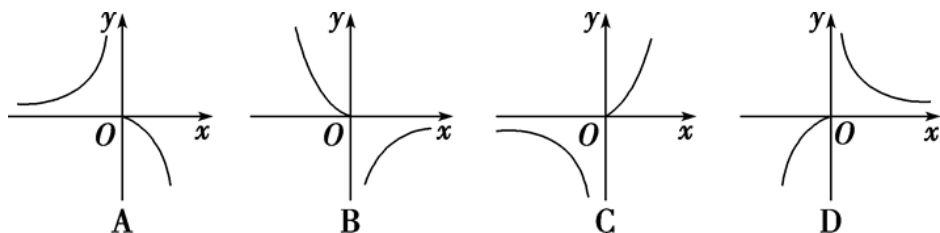
C. $f(x)=\frac{1}{x^2}-1$

D. $f(x)=x-\frac{1}{x}$

【答案】A

【解析】由函数图象可知，函数 $f(x)$ 为奇函数，应排除 B, C. 若函数为 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ，则 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow +\infty$ ，排除 D，故选 A.

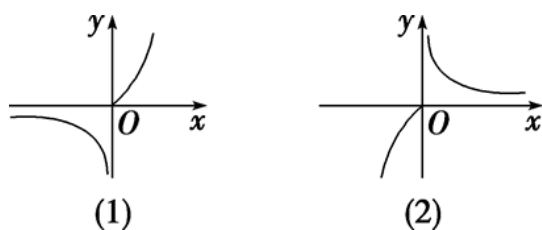
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = -f(-x)$ ，则函数 $g(x)$ 的图象大致是()



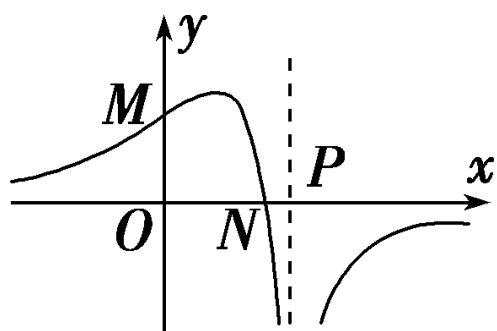
【答案】D

【解析】先画出函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 的图象，如图(1)所示，再根据函数 $f(x)$ 与 $-f(-x)$ 的图

象关于坐标原点对称，即可画出函数 $-f(-x)$ 的图象，即 $g(x)$ 的图象，如图(2)所示。故选 D.



3. 函数 $f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象如图所示，则下列结论成立的是()



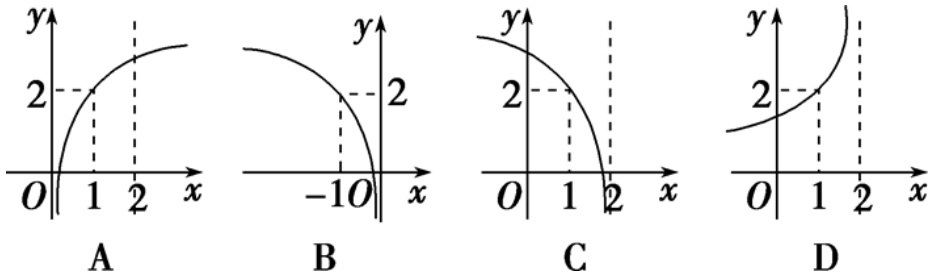
- A. $a > 0, b > 0, c < 0$
- B. $a < 0, b > 0, c > 0$
- C. $a < 0, b > 0, c < 0$
- D. $a < 0, b < 0, c < 0$

【答案】C

【解析】选 C. 由 $f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 及图象可知， $x \neq -c$ ， $-c > 0$ ，则 $c < 0$ ；当 $x=0$ 时， $f(0) = \frac{b}{c^2}$

> 0 ，所以 $b > 0$ ；当 $y=0$ 时， $ax+b=0$ ，所以 $x = -\frac{b}{a} > 0$ ，所以 $a < 0$. 故 $a < 0, b > 0, c < 0$.

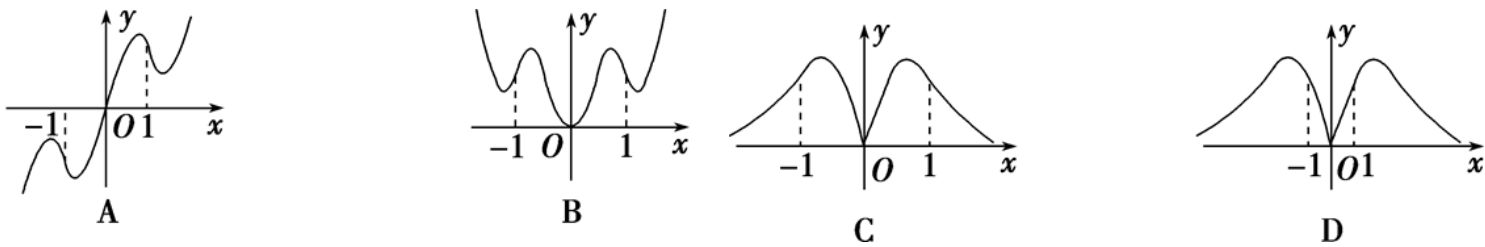
4. 将函数 $f(x)=\ln(1-x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度后的大致图象为()



【答案】 C

【解析】 将函数 $f(x)=\ln(1-x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 得到函数 $y=\ln[1-(x-1)]=\ln(2-x)$ 的图象, 再向上平移 2 个单位长度, 所得图象对应的函数为 $y=\ln(2-x)+2$. 根据复合函数的单调性可知 $y=\ln(2-x)+2$ 在 $(-\infty, 2)$ 上为减函数, 且 $y=\ln(2-x)+2$ 的图象过点 $(1, 2)$, 故 C 正确, 选 C.

5. 函数 $y=\frac{x^2}{e^{|x|}}$ (其中 e 为自然对数的底数) 的图象大致是()



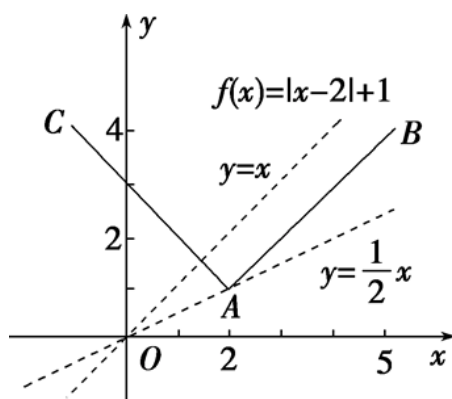
【答案】 D

【解析】 $y=\frac{x^2}{e^{|x|}}$ 是偶函数, 其图象关于 y 轴对称. 当 $x\geq 0$ 时, 函数 $y=\frac{x^2}{e^x}$, $y'=\frac{2x-x^2}{e^x}$, 当 $x\in[0, 2)$ 时, $y'\geq 0$, $y=\frac{x^2}{e^x}$ 在 $[0, 2)$ 上单调递增, 当 $x\in(2, +\infty)$ 时, $y'<0$, $y=\frac{x^2}{e^x}$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $y=\frac{x^2}{e^x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上有且只有一个极大值点是 $x=2$, 故选 D.

6. 已知函数 $f(x)=|x-2|+1$, $g(x)=kx$. 若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是_____.

【答案】 $(\frac{1}{2}, 1)$

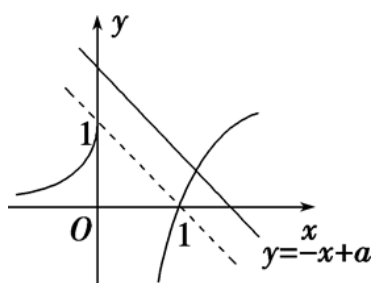
【解析】 先作出函数 $f(x)=|x-2|+1$ 的图象, 如图所示, 当直线 $g(x)=kx$ 与直线 AB 平行时斜率为 1, 当直线 $g(x)=kx$ 过点 A 时斜率为 $\frac{1}{2}$, 故当 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实根时, k 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, 1)$.



7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0, \\ 3x, & x \leq 0, \end{cases}$ 关于 x 的方程 $f(x) + x - a = 0$ 有且只有一个实根, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(1, +\infty)$

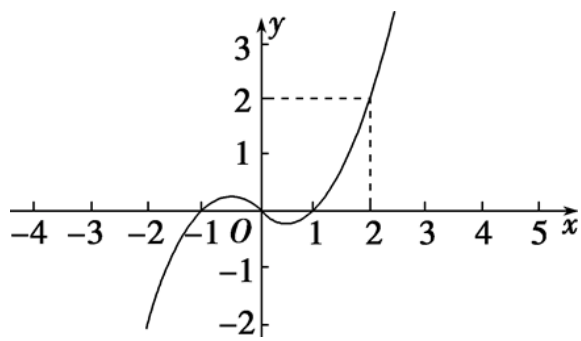
【解析】 问题等价于函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=-x+a$ 的图象有且只有一个交点, 如图, 结合函数图象可知 $a>1$.



8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - x$. 若 $f(a) < 4 + f(-a)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, 2)$

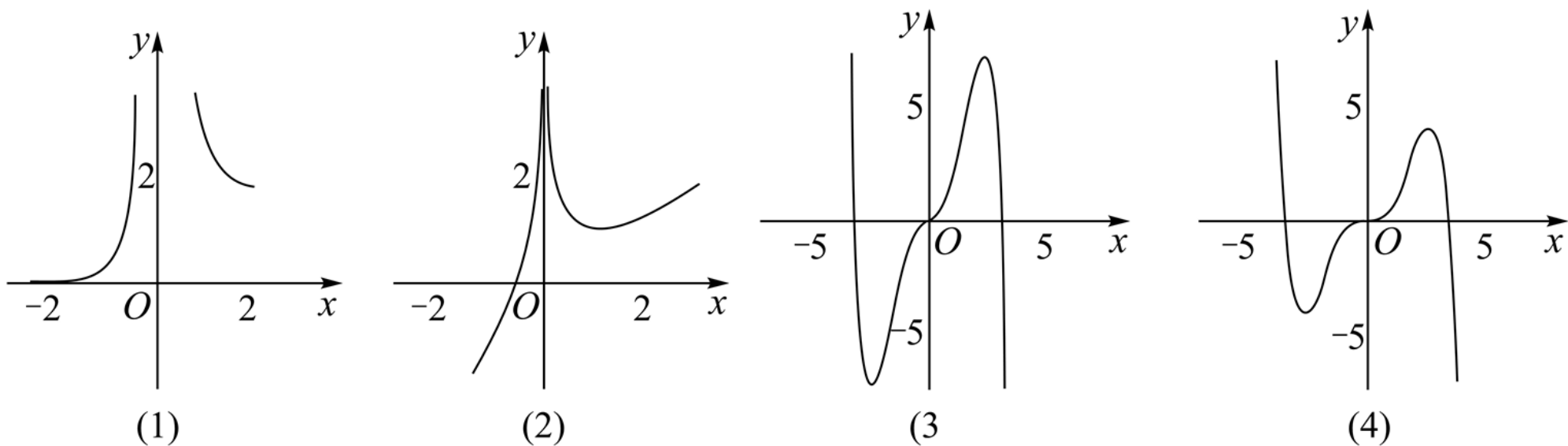
【解析】 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(a) < 4 + f(-a)$ 可转化为 $f(a) < 2$, 作出 $f(x)$ 的图象, 如图:



由图易知 $a < 2$.

提升练

1. (2022·吉林市教育学院模拟预测(理)) 下列各个函数图象所对应的函数解析式序号为 ()



- ① $f(x) = e^{|x|} \sin x$ ② $g(x) = x - \ln |x|$ ③ $t(x) = x^2 \sin x$ ④ $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$
- A. ④②①③ B. ②④①③ C. ②④③① D. ④②③①

【答案】A

【解析】 $f(x)$ ， $t(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ， $g(x)$ ， $h(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$

$h(x) = \frac{e^x}{x^2} > 0$ 在定义域内恒成立，则前两个对应函数分别为 ④②

当 $x \in (0, \pi)$ 时，则 $f(x) = e^x \sin x$

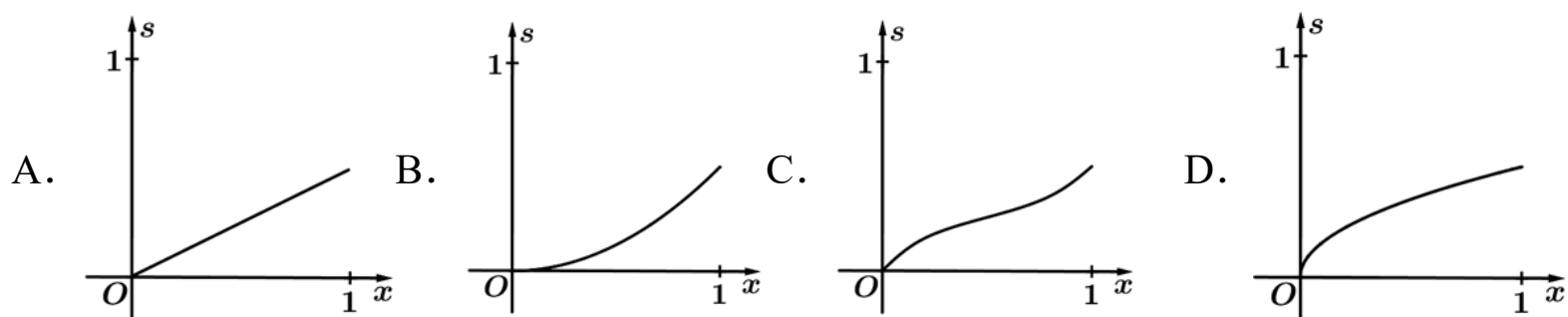
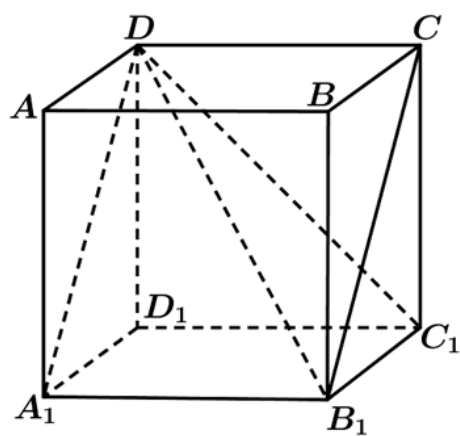
$f'(x) = e^x (\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，令 $f'(x) > 0$ ，则 $0 < x < \frac{3}{4}\pi$

$f(x)$ 在 $\left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$ 上单调递减，则 $f(x) \leq f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi} > 5$

①对应的为第三个函数

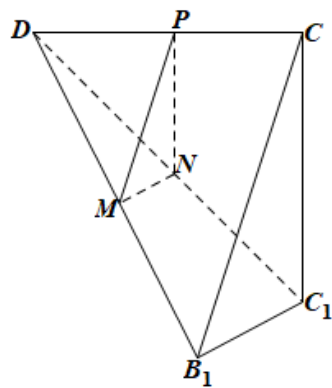
故选：A.

2. (2021·安徽淮北·二模(文))《九章算术·商功》中有这样一段话：“斜解立方，得两堍堵。斜解堍堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。”意思是：如图，沿正方体对角面 $ABCD_1$ 截正方体可得两个堍堵，再沿平面 BC_1D 截堍堵可得一个阳马（四棱锥 $D-AB_1C_1D_1$ ），一个鳖臑（三个棱锥 $D-B_1C_1C$ ），若 P 为线段 CD 上一动点，平面 α 过点 P ， $CD \perp$ 平面 α ，设正方体棱长为 1， $PD = x$ ， α 与图中鳖臑截面面积为 S ，则点 P 从点 D 移动到点 C 的过程中， S 关于 x 的函数图象大致是（ ）



【答案】B

【解析】设 M 、 N 分别为截面与 DB_1 、 DC_1 的交点， $DP = x$ ， $0 \leq x \leq 1$ ，



$\because CD \perp$ 平面 PMN ， $CD \perp$ 平面 B_1CC_1 ，所以，平面 $PMN \parallel$ 平面 B_1CC_1 ，

因为平面 $DCC_1 \cap$ 平面 $PMN = PN$ ，平面 $DCC_1 \cap$ 平面 $B_1CC_1 = CC_1$ ，

所以， $PN \parallel CC_1$ ，同理可得 $MN \parallel B_1C_1$ ， $PM \parallel B_1C_1$ ，

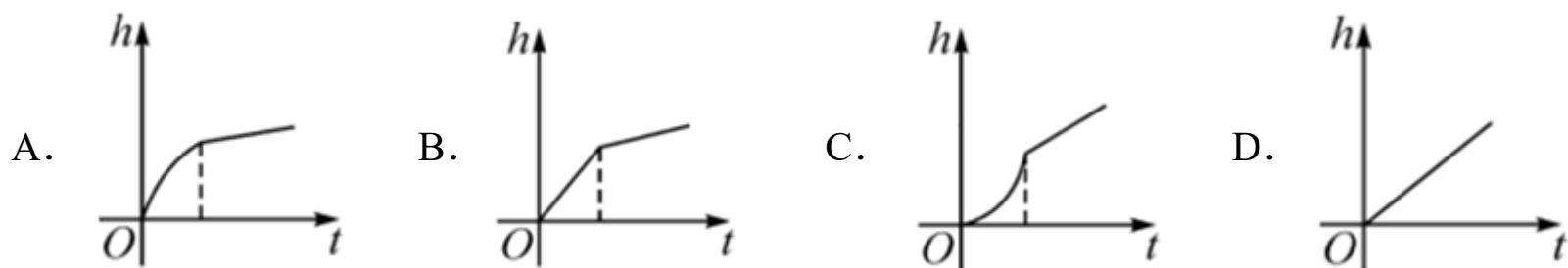
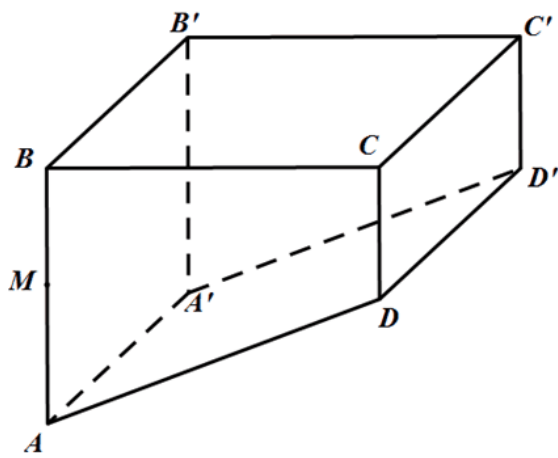
所以， $\frac{PN}{CC_1} = \frac{DN}{DC_1} = \frac{MN}{B_1C_1} = \frac{DM}{DB_1} = \frac{PM}{B_1C_1} = \frac{DP}{DC} = x$ ，

所以， $\triangle PMN \sim \triangle CB_1C_1$ ，易知 $S_{\triangle CB_1C_1} = \frac{1}{2} B_1C_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{2}$ ，

因此， $S_{\triangle PMN} = x^2 S_{\triangle CB_1C_1} = \frac{1}{2} x^2$ 。

故选：B.

3. （2021·陕西·西安中学模拟预测（理））如图所示是一个无水游泳池， $ABCD-A'B'C'D'$ 是一个四棱柱，游泳池是由一个长方体切掉一个三棱柱得到的．现在向泳池注水，如果进水速度是均匀的（单位时间内注入的水量不变），水面与 AB 的交点为 M ，则 AM 的高度 h 随时间 t 变化的图象可能是（ ）

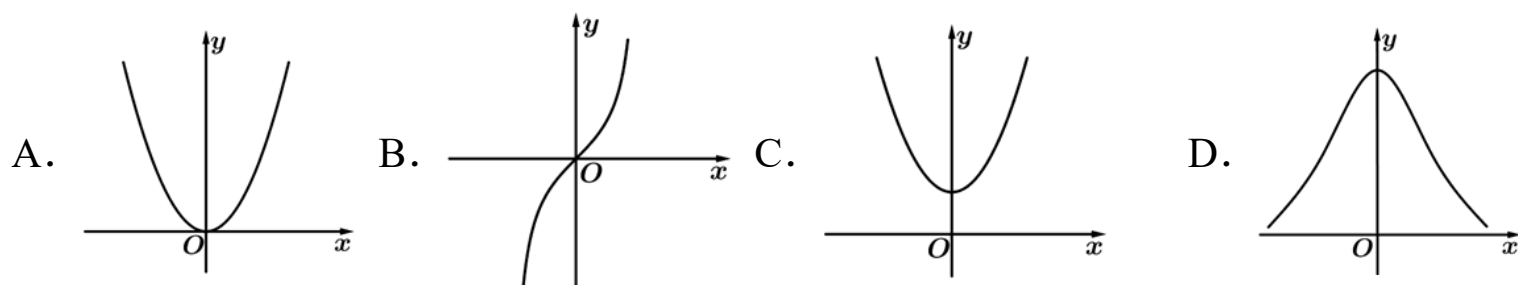
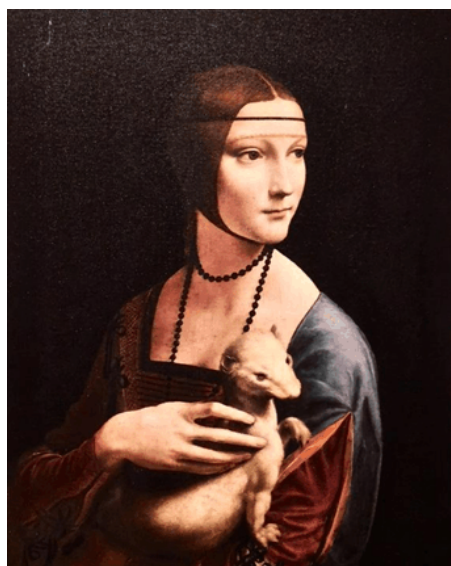


【答案】A

【解析】由题意可知，当往游泳池内注水时，游泳池内的水呈“直棱柱”状，且直棱柱的高不变，刚开始水面面积逐渐增大，水的高度增长得越来越慢，当水面经过 D 点后，水面的面积为定值，水的高度匀速增长，故符合条件的函数图象为 A 选项中的图象.

故选：A.

4. （2021·广东·珠海市第二中学模拟预测）意大利画家列奥纳多·达·芬奇的画作《抱银鼠的女子》（如图所示）中，女士颈部的黑色珍珠项链与她怀中的白貂形成对比.光线和阴影衬托出人物的优雅和柔美.达·芬奇提出：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，形成的曲线是什么？这就是著名的“悬链线问题”.后人研究得出，悬链线并不是抛物线，而是与解析式为 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的“双曲余弦函数”相关.下列选项为“双曲余弦函数”图象的是（ ）



【答案】C

【解析】令 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，则该函数的定义域为 R ， $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$ ，

所以，函数 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 为偶函数，排除 B 选项.

由基本不等式可得 $f(x) \geq \frac{1}{2} \times 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 1$ ，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

所以，函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(x)_{\min} = f(0) = 1$ ，排除 AD 选项.

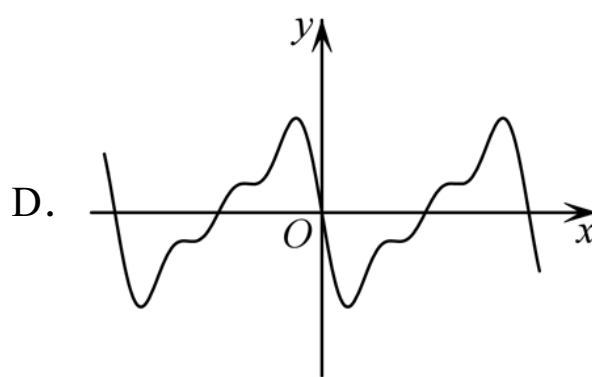
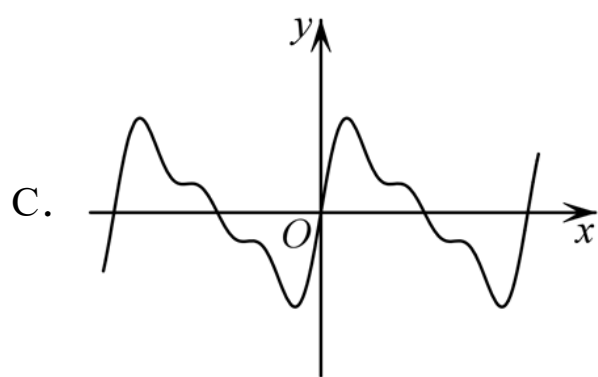
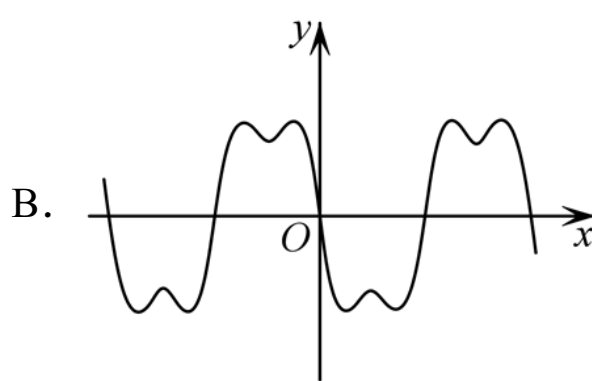
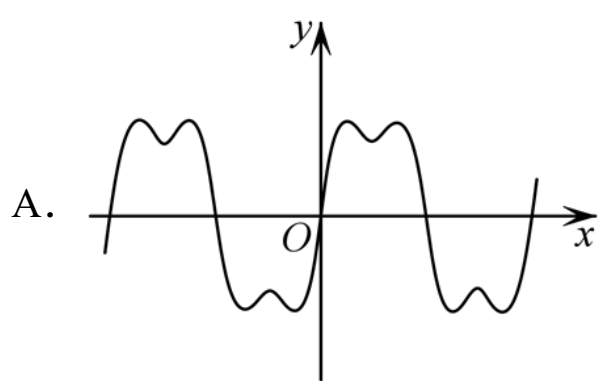
故选：C.

【点睛】

思路点睛：函数图象的辨识可从以下方面入手：

- (1) 从函数的定义域，判断图象的左右位置；
- (2) 从函数的值域，判断图象的上下位置；
- (3) 从函数的单调性，判断图象的变化趋势；
- (4) 从函数的奇偶性，判断图象的对称性；
- (5) 函数的特征点，排除不合要求的图象.

5. (2022·山东·烟台市教育科学研究院二模) 声音是由物体振动产生的. 我们平时听到的声音几乎都是复合音. 复合音的产生是由于发音体不仅全段在振动, 它的各部分如二分之一、三分之一、四分之一等也同时在振动. 不同的振动的混合作用决定了声音的音色, 人们以此分辨不同的声音. 已知刻画某声音的函数为 $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$, 则其部分图象大致为 ()



【答案】C

【解析】令 $y = f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$,

求导得 $f'(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$$= \cos x (1 - 2\sin^2 x) + \cos 2x (1 + \cos x) = (1 + 2\cos x) \cos 2x,$$

所以, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

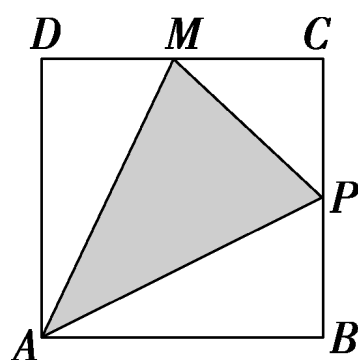
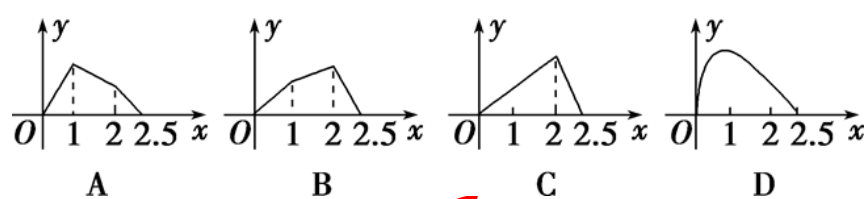
由于 $f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}, f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} > 0, f(\pi) = 0$,

所以, $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) > 0$, 且单调区间变化不具有对称的性质,

所以, 只有 C 选项满足.

故选: C

6. 如图, 点 P 在边长为 1 的正方形边上运动, M 是 CD 的中点, 当点 P 沿 $A-B-C-M$ 运动时, 点 P 经过的路程 x 与 $\triangle APM$ 的面积 y 的函数 $y = f(x)$ 的图象的形状大致是 ()

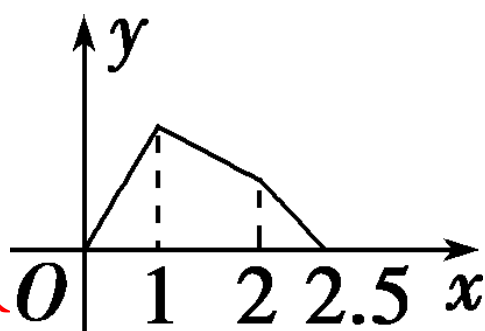


【答案】A

$$\frac{1}{2}x, 0 \leq x < 1,$$

【解析】 $y = f(x) = \frac{3}{4} - \frac{x}{4}, 1 \leq x < 2$, 画出分

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x, 2 \leq x \leq \frac{5}{2},$$



7. (2022·广东佛山·三模) 箕舌线因意大利著名的女数学家玛丽亚·阿涅西的深入研究而闻名于世. 如图所

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/116224120052010041>