# 机器人建模与控制

## 第2章 空间描述和变换

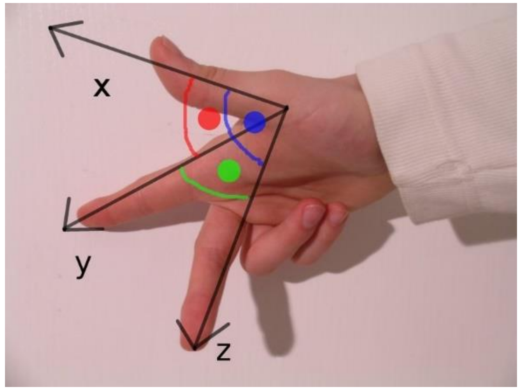
# 2.1 坐标系与向量

## 2.1.1 笛卡尔直角坐标系

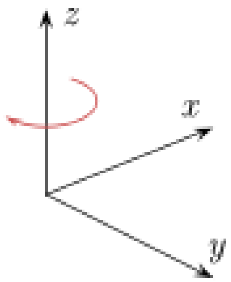
- 交于原点的三条不共面的数轴（常称*x*轴、*y*轴和*z*轴）构成空间的放射坐标系
- 三条数轴（主轴）上度量单位相等的放射坐标系称为空间笛卡尔坐标系

空间笛卡尔坐标系
- 空间笛卡尔直角坐标系
  - 空间笛卡尔直角右手坐标系
  - 空间笛卡尔直角左手坐标系
- 空间笛卡尔斜角坐标系

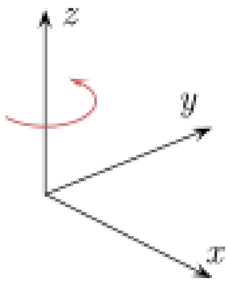
- 本课程采用：
  空间笛卡尔直角右手坐标系
  所有坐标系都采用同样长度的度量单位



右手定则



左手坐标系

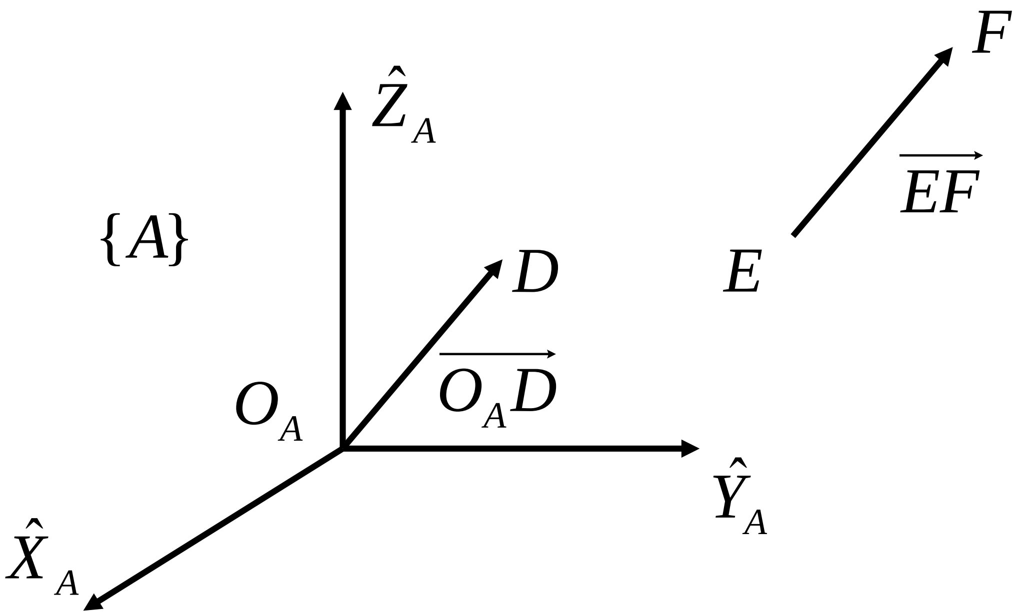


右手坐标系

# 2.1 坐标系与向量

## 2.1.2 向量

- 定义：向量是具有大小和方向的量
- 几何上，可以用3维空间的有向线段表示3维向量，如：$\overrightarrow{EF}$
- 若两个向量长度相等、方向相同，则称这两个向量相等



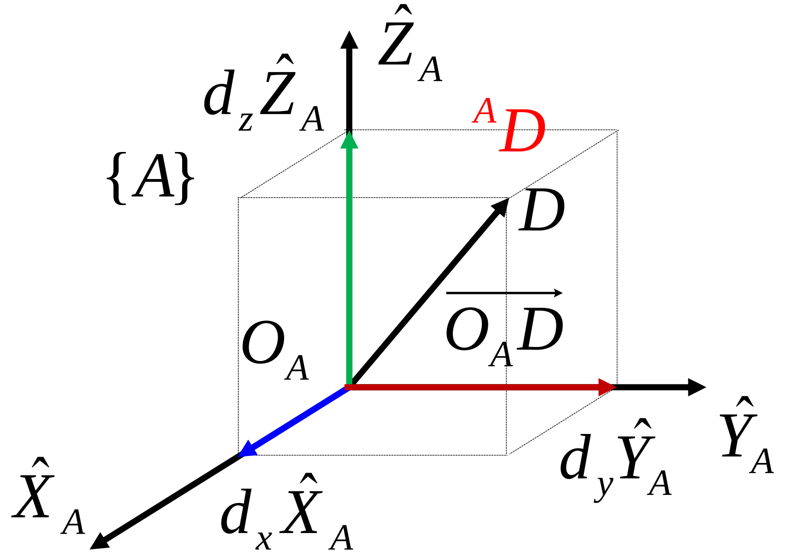

$\overrightarrow{O_A D} = \overrightarrow{EF}$

# 2.1 坐标系与向量

- 向量的定量表达

向量$\overrightarrow{O_AD}$，将它分别向$\hat{X}_A,\hat{Y}_A,\hat{Z}_A$作投影，得到3个向量$d_x\hat{X}_A,d_y\hat{Y}_A$和$d_z\hat{Z}_A$

$$\overrightarrow{O_AD}=d_x\hat{X}_A+d_y\hat{Y}_A+d_z\hat{Z}_A=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_x\\d_y\\d_z\end{bmatrix}$$




简洁表达 $${}^AD=\begin{bmatrix}d_x\\d_y\\d_z\end{bmatrix}$$

向量长度（大小） $$\left|\overrightarrow{O_AD}\right|=\left|{}^AD\right|=\sqrt{d_x^2+d_y^2+d_z^2}$$

在$\{A\}$中，$\hat{X}_A,\hat{Y}_A$和$\hat{Z}_A$可分别表达为 $${}^AX_A=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},{}^AY_A=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},{}^AZ_A=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

## 2.1.3 三维向量的内积和外积

- 两个3维向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 的内积（数量积）定义为

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos\theta \quad \theta\in[0,\pi]$$

- 内积是一个标量，零向量与任何向量的内积等于零
- 两个非零向量间夹角 $\theta=\mathrm{Acos}\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|}$
- $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 垂直（正交）的充要条件是它们的内积等于零
- 方向任意的零向量垂直（正交）于任何向量
- 向量长度 $\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}}$

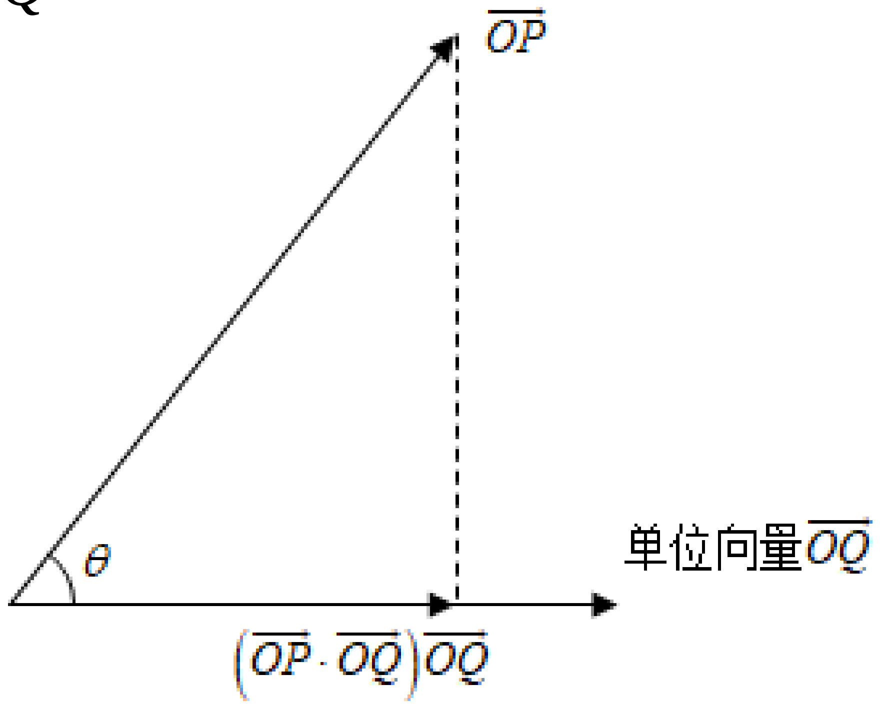
# 2.1 坐标系与向量

- 若 $\overrightarrow{OQ}$ 是单位向量

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\theta$$

将 $\overrightarrow{OP}$ 向单位向量 $\overrightarrow{OQ}$ 作投影，得到的投影向量为

$$\left(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\right)\overrightarrow{OQ}$$



# 2.1 坐标系与向量

- 在参考系$\{A\}$中，$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$分别被表达为

$$^{A}P=\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{bmatrix},\ ^{A}Q=\begin{bmatrix}q_x\\q_y\\q_z\end{bmatrix}$$

- $\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$的内积可按下式计算

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}={}^{A}P\cdot{}^{A}Q={}^{A}P^{\mathrm{T}}\,{}^{A}Q=\begin{bmatrix}p_x & p_y & p_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_x\\q_y\\q_z\end{bmatrix}$$

$$=p_xq_x+p_yq_y+p_zq_z$$

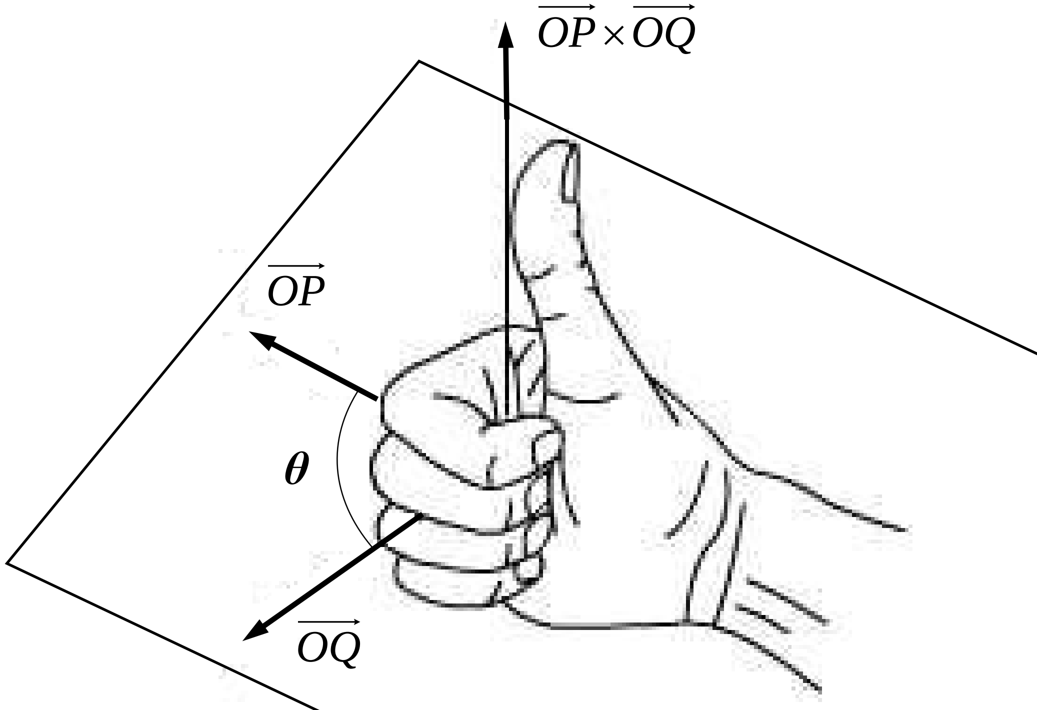
# 2.1 坐标系与向量

- 两个3维向量$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OQ}$的外积（向量积）是一个3维向量，记这个向量为 $\overrightarrow{OW}=\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}$

  长度定义为$\left|\overrightarrow{OW}\right|=\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|\sin\theta$

  零向量与任何向量的外积是零向量，夹角$\theta$为$0$或$\pi$的两个非零向量的外积也是零向量。

$\overrightarrow{OW}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 均正交，方向按右手螺旋法则确定：右手大拇指伸直，弯曲其他四指，指向由 $\overrightarrow{OP}$ 沿小于180° 的方向转向$\overrightarrow{OQ}$，大拇指的朝向即是 $\overrightarrow{OW}$ 的方向



# 2.1 坐标系与向量

- 对于右手参考系$\{A\}$，有 $\hat{Z}_A = \hat{X}_A \times \hat{Y}_A, \hat{X}_A = \hat{Y}_A \times \hat{Z}_A, \hat{Y}_A = \hat{Z}_A \times \hat{X}_A$
- $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 以及它们的外积 $\overrightarrow{OW}$ 分别表达为

$$ {}^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, {}^{A}Q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, {}^{A}W = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = {}^{A}P \times {}^{A}Q $$

- 三种方法计算 ${}^{A}W$

法一 $$\begin{cases} w_x = p_y q_z - p_z q_y \\ w_y = p_z q_x - p_x q_z \\ w_z = p_x q_y - p_y q_x \end{cases}$$

法二 $${}^{A}W = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

法三 $$\begin{vmatrix} i & j & k \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}$$

其中，计算结果中$i$项、$j$项和$k$项的系数就分别是$w_x$、$w_y$和 $w_z$

# 2.2 点和刚体的描述

## 2.2.1 点的位置描述

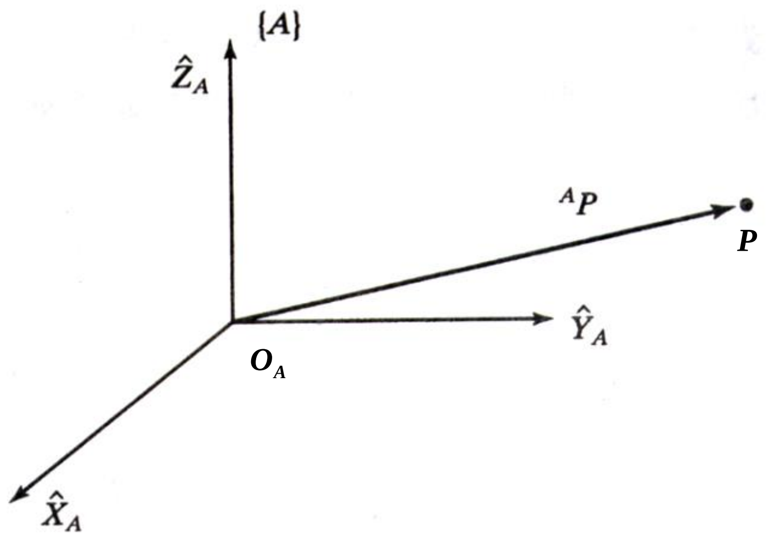
$O_A$ 表示$\{A\}$ 的原点

$\hat{X}_A$、$\hat{Y}_A$ 和$\hat{Z}_A$ 分别表示$\{A\}$ 的$x$ 轴向、$y$ 轴向和$z$ 轴向的单位向量

在坐标系$\{A\}$ 中，空间任意一点$P$ 的位置

可表示为由其坐标构成的$3\times 1$ 向量表示

$$^{A}P=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

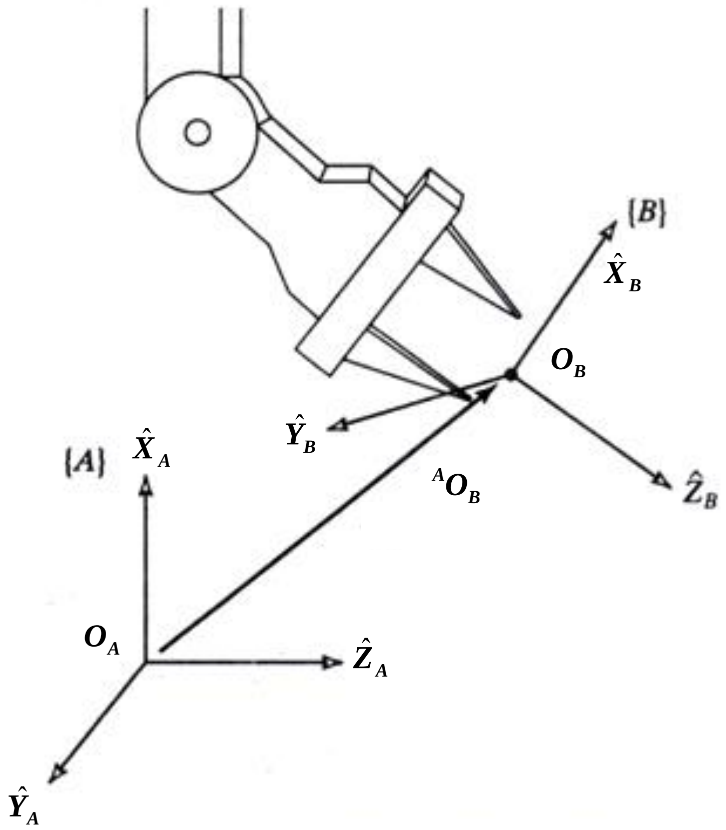



即：$\overrightarrow{O_AP}=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^{A}P$

# 2.2 点和刚体的描述

## 2.2.2 刚体的位置和姿态描述

设$\{B\}$ 是某物体的一个联体坐标系，即该物体上的任何一个点在$\{B\}$ 中的位置已知且始终不变




$\{B\}$的原点为$O_B$,3个轴分别用$\hat{X}_B$、$\hat{Y}_B$和$\hat{Z}_B$表示

在$\{A\}$ 中表示出$\{B\}$ 的位置和姿态，即描述了该物体在$\{A\}$ 中的位置和姿态

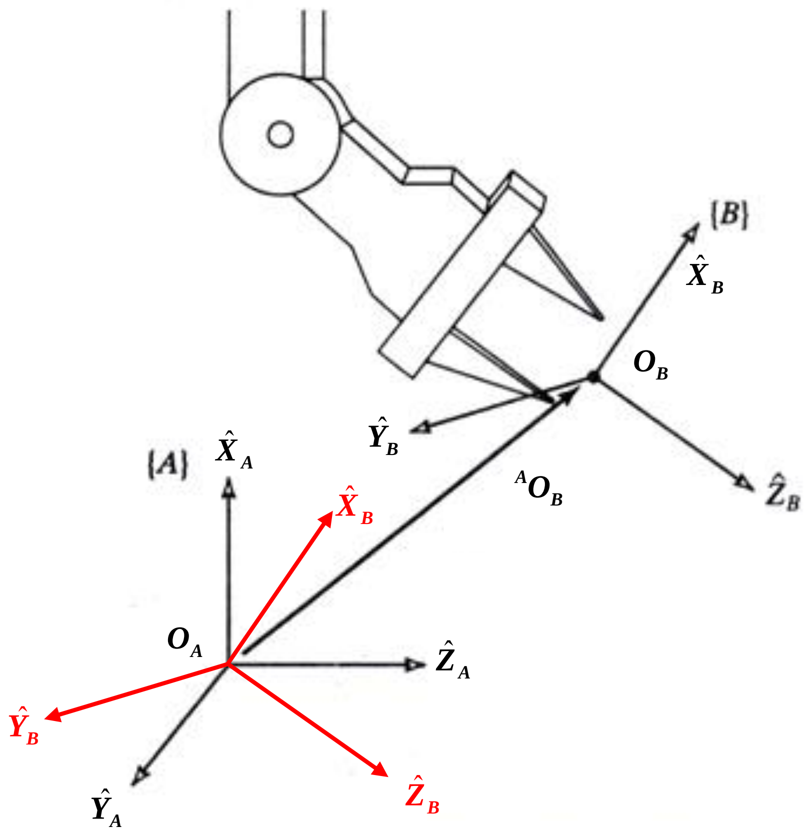
在$\{A\}$ 中表示出$\{B\}$ 的位置：${}^{A}O_B \in \mathbb{R}^3$

即$\overrightarrow{O_A O_B} = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} {}^{A}O_B$

# 2.2 点和刚体的描述

在$\{A\}$中表示出$\{B\}$的姿态：

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} {}_B^AR$$




$$\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}$$

$$\hat{Z}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}$$

旋转矩阵 $${}_B^AR = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

# 2.2 点和刚体的描述

定义集合

$$SO(3)=\left\{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}\ \middle|\ \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}=1, \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=1, \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=0, \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}\right\}$$

任何一个旋转矩阵（对应于刚体的一个姿态）都属于$SO(3)$

$SO(3)$的任何一个元素都是旋转矩阵

$SO(3)$是全体旋转矩阵的集合

刚体的不同姿态与$SO(3)$中的不同旋转矩阵是一一对应的

对于$SO(3)$中的任何一个矩阵

$$R=\begin{bmatrix} R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}$$

有

$$R_x^{\mathrm{T}}R_x=1, R_y^{\mathrm{T}}R_y=1, R_z^{\mathrm{T}}R_z=1$$

$$R_x^{\mathrm{T}}R_y=R_x^{\mathrm{T}}R_z=R_y^{\mathrm{T}}R_z=0$$

于是

$$R^{\mathrm{T}}R=\begin{bmatrix} R_x^{\mathrm{T}} \\ R_y^{\mathrm{T}} \\ R_z^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_x^{\mathrm{T}}R_x & R_x^{\mathrm{T}}R_y & R_x^{\mathrm{T}}R_z \\ R_y^{\mathrm{T}}R_x & R_y^{\mathrm{T}}R_y & R_y^{\mathrm{T}}R_z \\ R_z^{\mathrm{T}}R_x & R_z^{\mathrm{T}}R_y & R_z^{\mathrm{T}}R_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于任何$R\in SO(3)$， $R$可逆且 $R^{-1}=R^{\mathrm{T}}$

# 2.2 点和刚体的描述

## 2.2.3 齐次变换矩阵

在$\{A\}$中表示$\{B\}$的位姿（描述物体在$\{A\}$中的位姿）：

齐次变换矩阵 ${}_B^AT = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}_B^AR & & {}^AO_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{4\times4}$

定义集合

$$SE(3) = \left\{ \left[\begin{array}{ccc|c} & {}_B^AR & & {}^AO_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \middle| \, {}_B^AR \in SO(3), \, {}^AO_B \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

刚体的不同位姿与$SE(3)$中的不同齐次变换矩阵是一一对应的

# 2.3 两个坐标系的几何关系

## 2.3.1 两个坐标系的相对姿态

- 对于$SO(3)$中的任何一个矩阵 $R=\begin{bmatrix} R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}$，有

$$R_x^{\mathrm{T}}R_x=1, R_y^{\mathrm{T}}R_y=1, R_z^{\mathrm{T}}R_z=1$$

$$R_x^{\mathrm{T}}R_y=R_x^{\mathrm{T}}R_z=R_y^{\mathrm{T}}R_z=0$$

于是，

$$R^{\mathrm{T}}R=\begin{bmatrix} R_x^{\mathrm{T}} \\ R_y^{\mathrm{T}} \\ R_z^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_x^{\mathrm{T}}R_x & R_x^{\mathrm{T}}R_y & R_x^{\mathrm{T}}R_z \\ R_y^{\mathrm{T}}R_x & R_y^{\mathrm{T}}R_y & R_y^{\mathrm{T}}R_z \\ R_z^{\mathrm{T}}R_x & R_z^{\mathrm{T}}R_y & R_z^{\mathrm{T}}R_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于任何$R\in SO(3)$， $R$可逆且 $R^{-1}=R^{\mathrm{T}}$

- ${}_B^AR$ 与 ${}_A^BR$ 的关系

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix}{}_B^AR \qquad \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B \end{bmatrix}{}_A^BR$$

$${}_A^BR={}_B^AR^{-1}={}_B^AR^{\mathrm{T}}$$

# 2.3 两个坐标系的几何关系

## 2.3.2 两个坐标系的相对位置

- ${}^{A}O_{B}$ 与 ${}^{B}O_{A}$ 的关系

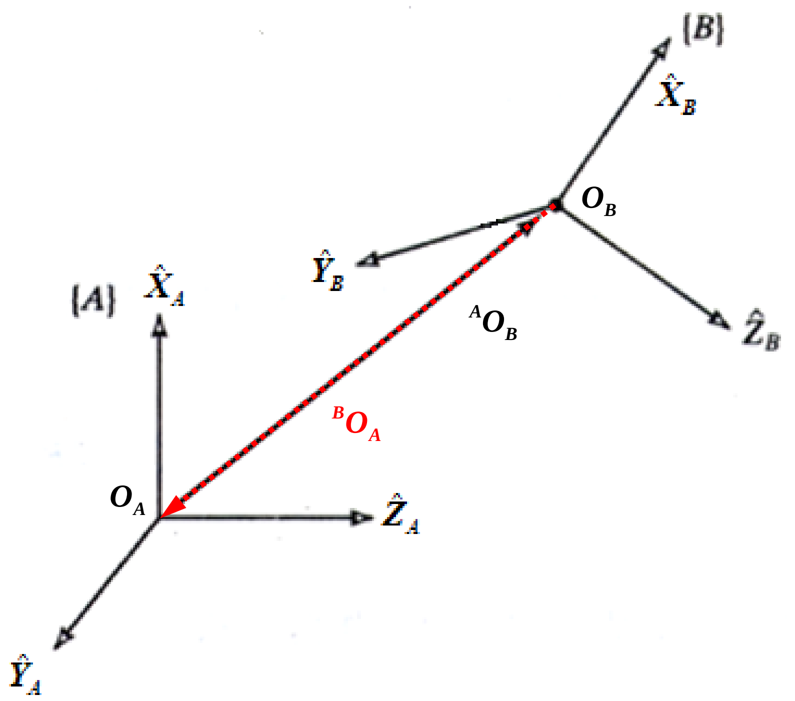
$$\overrightarrow{O_A O_B} = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} {}^{A}O_B$$

$$\overrightarrow{O_B O_A} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B \end{bmatrix} {}^{B}O_A$$

$$-\begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} {}^{A}O_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B \end{bmatrix} {}^{B}O_A$$

$$-\begin{bmatrix} \hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B \end{bmatrix} {}_{A}^{B}R\, {}^{A}O_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B \end{bmatrix} {}^{B}O_A$$

$${}^{B}O_A = -{}_{A}^{B}R\, {}^{A}O_B$$



# 2.3 两个坐标系的几何关系

## 2.3.3 两个坐标系的相对位姿

$$^{B}O_{A} = -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}O_{B} \qquad {}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{-1} = {}^{A}_{B}R^{\mathrm{T}}$$

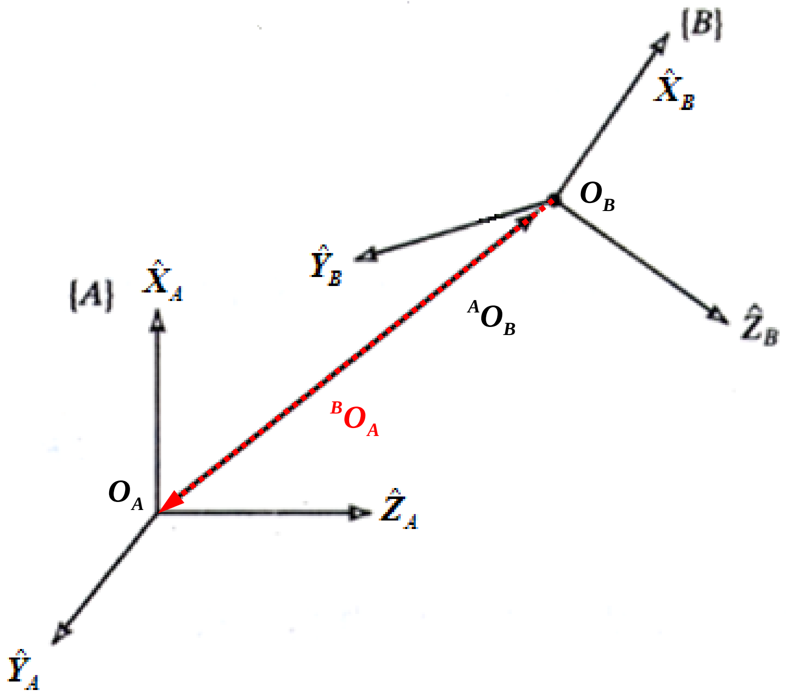
- ${}^{A}_{B}T$ 与 ${}^{B}_{A}T$ 的关系

$$^{A}_{B}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}O_{B} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{B}_{A}R & & {}^{B}O_{A} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{B}_{A}R & & -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}O_{B} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$^{A}_{B}T\,{}^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}O_{B} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{B}_{A}R & & -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}O_{B} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{A}R & & -{}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{A}R\,{}^{A}O_{B} + {}^{A}O_{B} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = I$$




$$^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1}$$

# 2.3 两个坐标系的几何关系

- 对于任何 $T=\left[\begin{array}{ccc|c} & R & & O \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\in SE(3)$，$T$可逆且

$$T^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|c} & R^{\mathrm{T}} & & -R^{\mathrm{T}}O \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

例：已知 ${}^{A}_{B}T=\left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$，试求 ${}^{B}_{A}T$

解：

$${}^{B}_{A}T=\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R^{\mathrm{T}} & & -{}^{A}_{B}R^{\mathrm{T}}\,{}^{A}O_{B} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

# 2.3 两个坐标系的几何关系

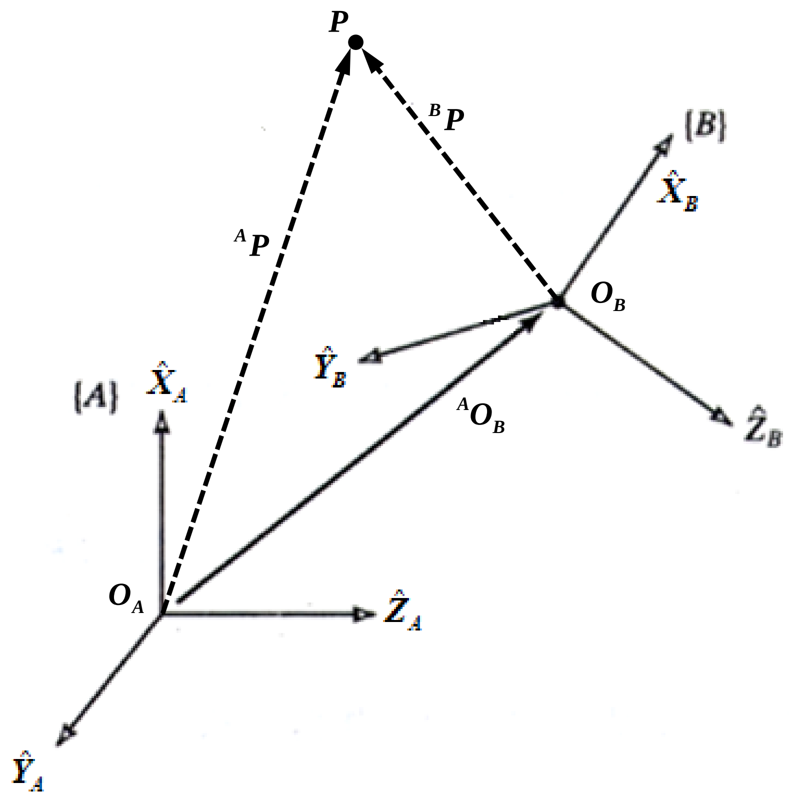
## 2.3.4 同一个点在两个参考系中的描述

- 齐次变换矩阵 ${}^A_BT=\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_BR & & {}^AO_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$ 以及 ${}^BP$ 均已知，求 ${}^AP$

$$\overrightarrow{O_AP}=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^AP \qquad {}^AP \neq {}^AO_B+{}^BP$$

$$\overrightarrow{O_AO_B}=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^AO_B$$

$$\overrightarrow{O_BP}=\begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix}{}^BP$$



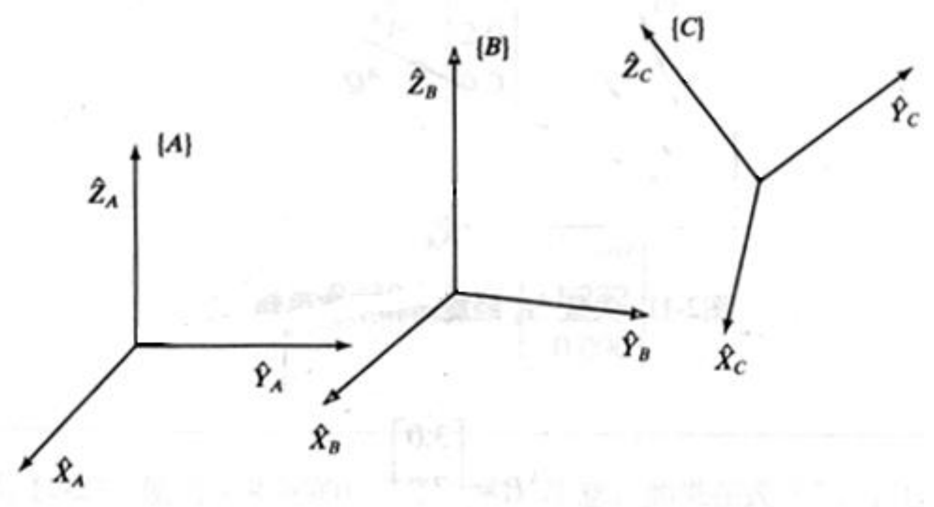

$$\begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^A_BR$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^AP &=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^AO_B+\begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix}{}^BP \\ &=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^AO_B+\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^A_BR\,{}^BP\end{aligned}$$

$${}^AP={}^AO_B+{}^A_BR\,{}^BP \qquad \begin{bmatrix}{}^AP \\ 1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_BR & & {}^AO_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}{}^BP \\ 1\end{bmatrix}={}^A_BT\begin{bmatrix}{}^BP \\ 1\end{bmatrix}$$

## 2.3.5 坐标系变换的链乘法则

- ${}^{B}_{C}R$ 、${}^{A}_{B}R$ 和 ${}^{A}_{C}R$ 的关系




$$\begin{bmatrix}\hat{X}_C & \hat{Y}_C & \hat{Z}_C\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix} {}^{B}_{C}R$$

$$\begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix} {}^{A}_{B}R$$

$$\begin{bmatrix}\hat{X}_C & \hat{Y}_C & \hat{Z}_C\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix} {}^{A}_{B}R\, {}^{B}_{C}R$$

$$\begin{bmatrix}\hat{X}_C & \hat{Y}_C & \hat{Z}_C\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix} {}^{A}_{C}R$$

$${}^{A}_{C}R = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}_{C}R$$

对于$\boldsymbol{n}$个坐标系{1},{2},···,{$\boldsymbol{n}$}，它们的相对姿态有链乘法则

$${}^{1}_{n}R = {}^{1}_{2}R\, {}^{2}_{3}R \cdots {}^{n-1}_{n}R$$

# 2.3 两个坐标系的几何关系

- ${}^{B}_{C}T$ 、${}^{A}_{B}T$ 和 ${}^{A}_{C}T$ 的关系

$$ {}^{B}_{C}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{B}_{C}R & & {}^{B}O_{C} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad {}^{A}_{B}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}O_{B} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad {}^{A}_{C}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{C}R & & {}^{A}O_{C} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}O_{B} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{B}_{C}R & & {}^{B}O_{C} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R = {}^{A}_{C}R $$

$$ = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}O_{C} + {}^{A}O_{B} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}O_{B} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P $$

$$ = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{C}R & & {}^{A}O_{C} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = {}^{A}_{C}T $$

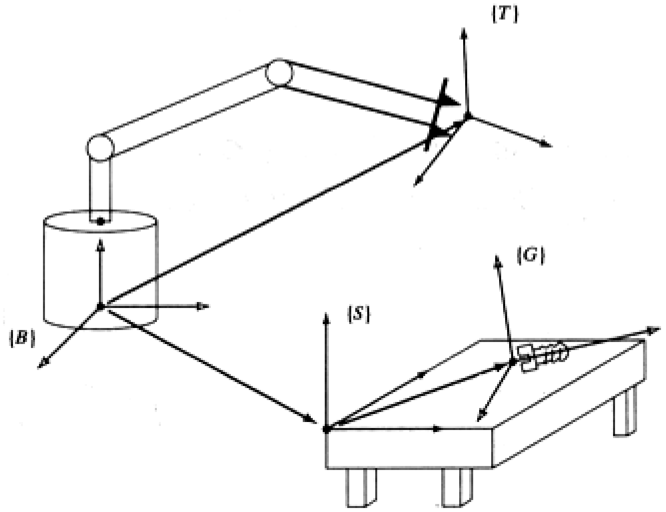
$$ {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T = {}^{A}_{C}T $$

**对于$n$个坐标系{1},{2},⋯,{$n$}，它们的相对位姿有链乘法则**

$$ {}^{1}_{n}T = {}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T \cdots {}^{n-1}_{n}T $$

# 2.3 两个坐标系的几何关系

- 例：已知操作臂指端的坐标系$\{T\}$相对于操作臂基座$\{B\}$的位姿${}^{B}_{T}T$，又已知工作台坐标系$\{S\}$相对操作臂基座$\{B\}$的位置姿态${}^{B}_{S}T$，并且已知工作台上螺栓的坐标系$\{G\}$相对工作台坐标系的位姿${}^{S}_{G}T$，求螺栓相对操作手的位姿即${}^{T}_{G}T$




$${}^{B}_{T}T = {}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T\,{}^{G}_{T}T \quad \Longrightarrow \quad {}^{T}_{G}T = {}^{B}_{T}T^{-1}\,{}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T$$

# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

- 旋转矩阵的自由度

$$SO(3)=\left\{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}\left|\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}=1,\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=1,\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}\right.\right\}$$

**9个矩阵元素有6个约束：**

$$r_{11}^2+r_{21}^2+r_{31}^2=1$$

$$r_{12}^2+r_{22}^2+r_{32}^2=1$$

$$r_{11}r_{12}+r_{21}r_{22}+r_{31}r_{32}=0$$

$$r_{13}=r_{21}r_{32}-r_{31}r_{22}$$

$$r_{23}=r_{31}r_{12}-r_{11}r_{32}$$

$$r_{33}=r_{11}r_{22}-r_{21}r_{12}$$

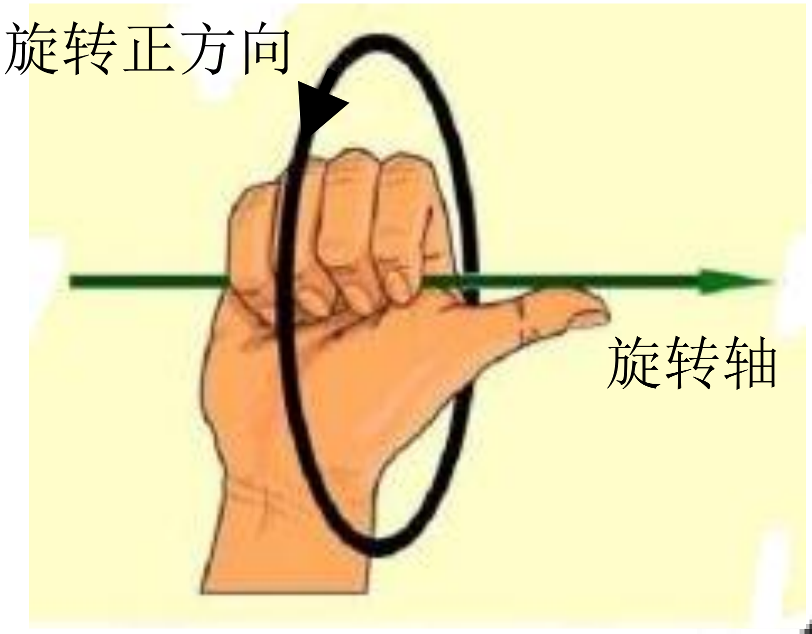
$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

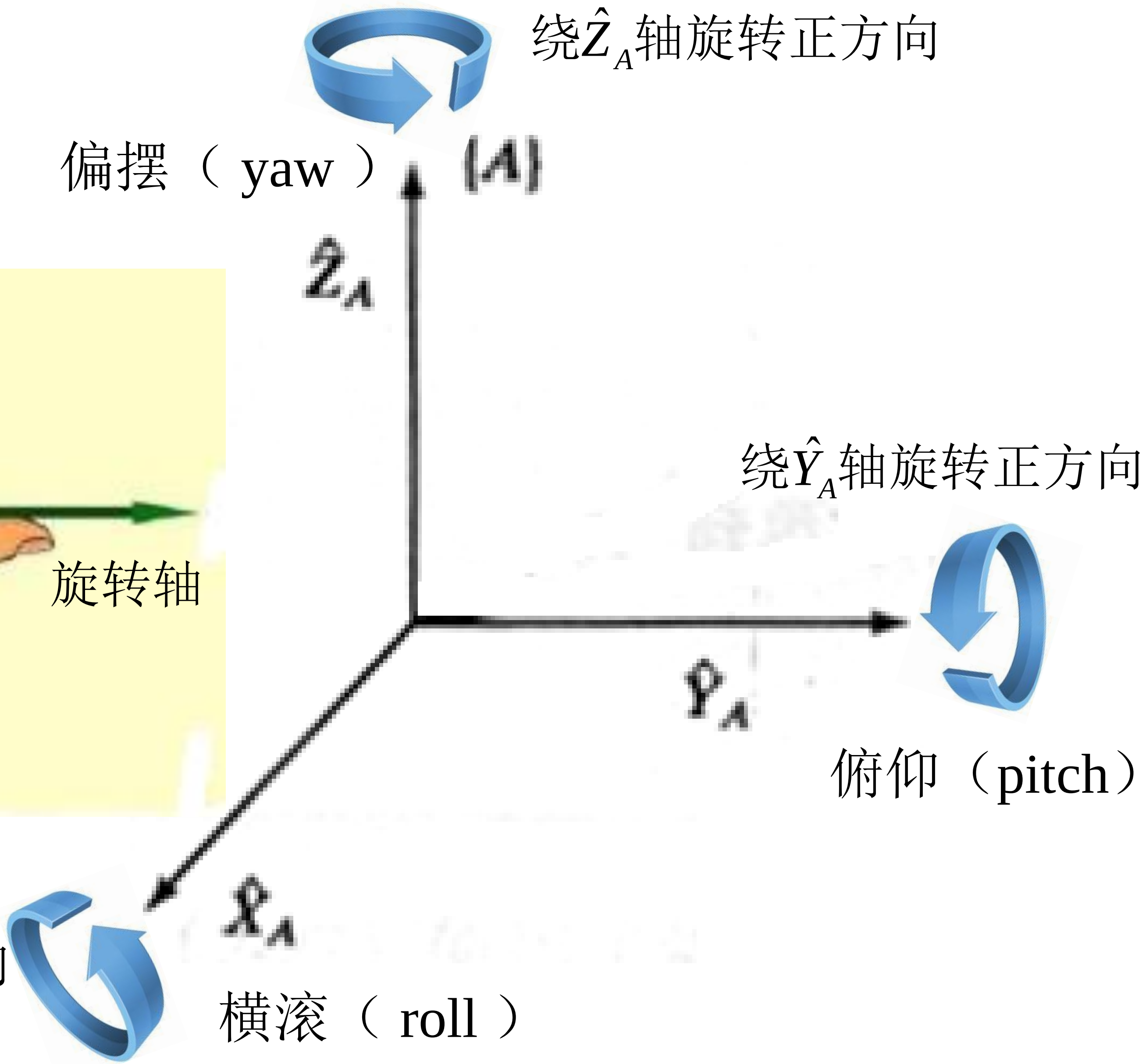
$$\begin{cases} w_x=p_yq_z-p_zq_y \\ w_y=p_zq_x-p_xq_z \\ w_z=p_xq_y-p_yq_x \end{cases}$$

# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

## 2.4.1 基本旋转矩阵

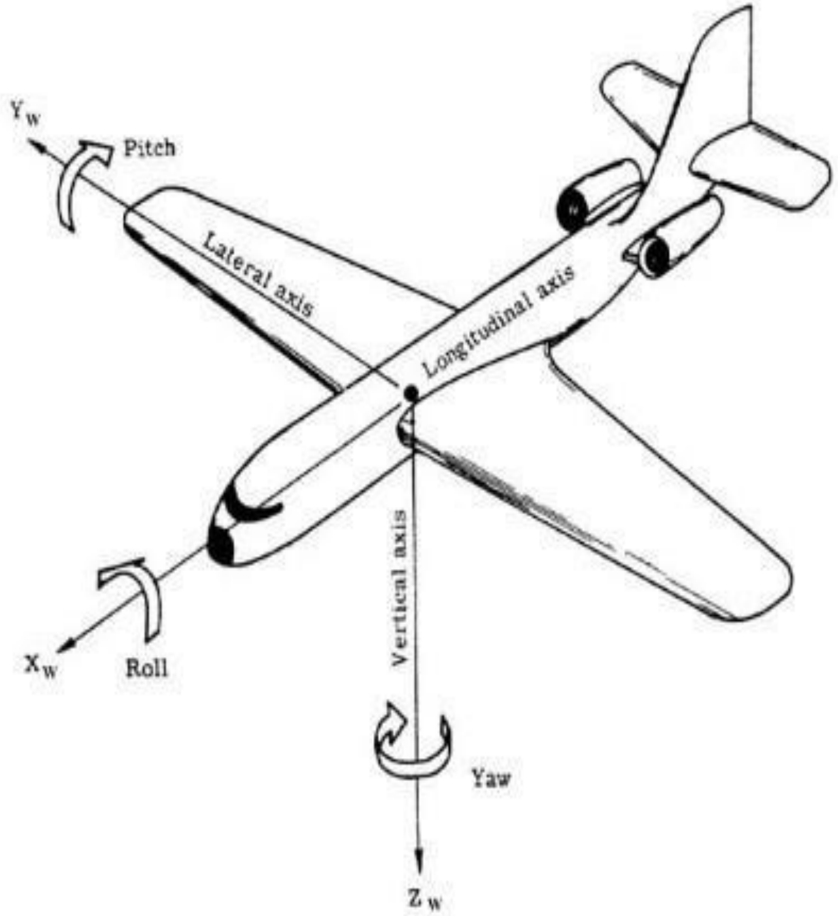
- 用右手定则确定旋转正方向



# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

- 飞机常用的联体坐标系



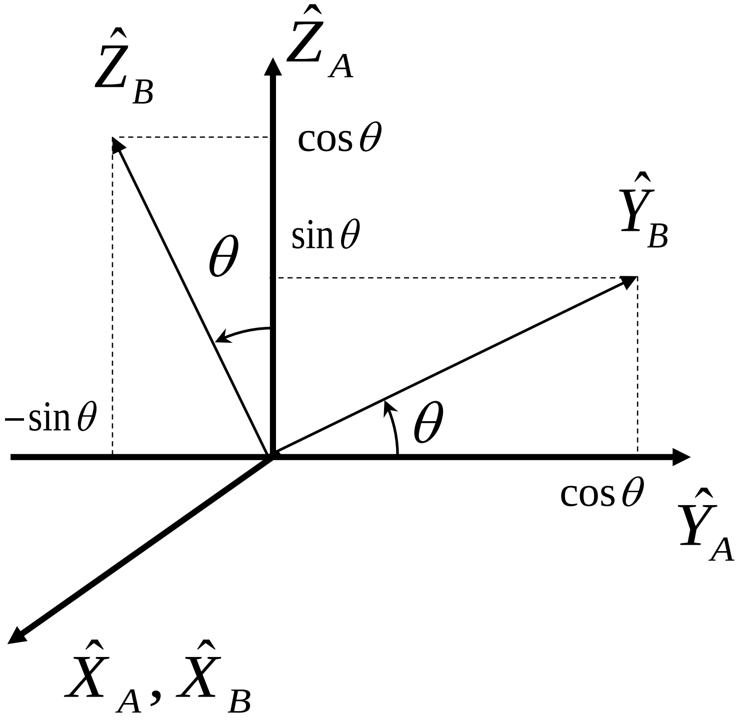
# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

- 初始的$\{B\}$与$\{A\}$重合，$\{B\}$绕$\hat{X}_A$旋转$\theta$角，求旋转后的${}^A_BR$

  绕$x$轴旋转$\theta$

$$\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{Y}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\hat{Z}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$




$${}^A_BR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$= R_x(\theta)$ 基本旋转矩阵

# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

绕z轴旋转$\theta$

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\theta & -s\theta & 0\\ s\theta & c\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

如：${}_B^AR=R_z(\theta)$表示$\{B\}$的姿态是相对$\{A\}$绕$\hat{Z}_A$轴旋转$\theta$

绕y轴旋转$\theta$

$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\theta & 0 & s\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\theta & 0 & c\theta\end{bmatrix}$$

如：${}_B^AR=R_y(\theta)$表示$\{B\}$的姿态是相对$\{A\}$绕$\hat{Y}_A$轴旋转$\theta$

绕x轴旋转$\theta$

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta\\ 0 & s\theta & c\theta\end{bmatrix}$$

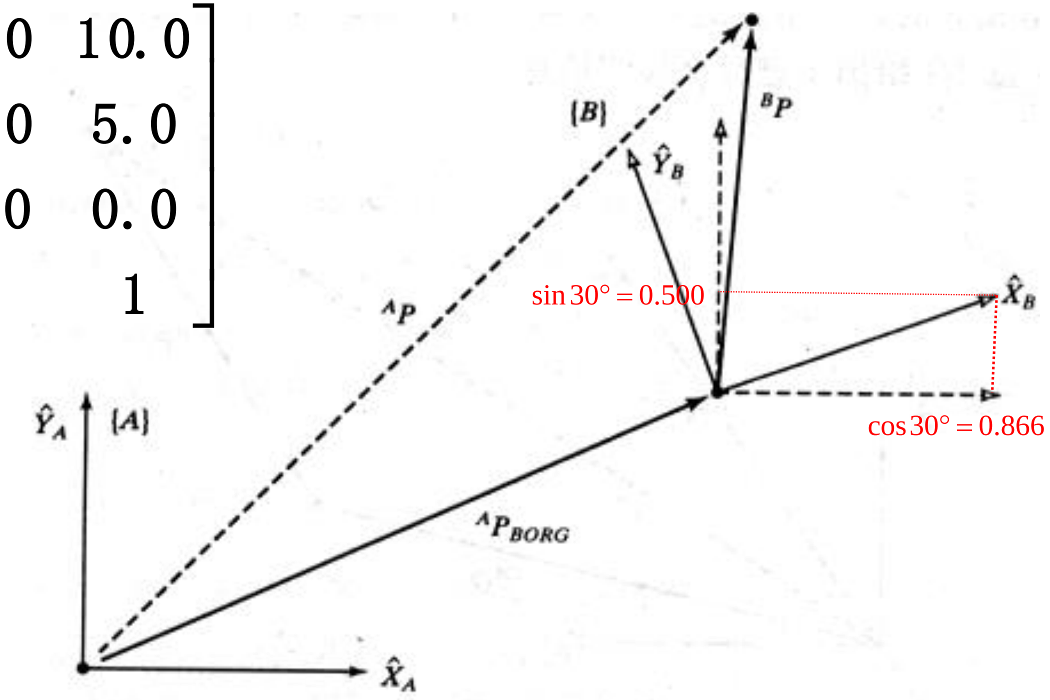
如：${}_B^AR=R_x(\theta)$表示$\{B\}$的姿态是相对$\{A\}$绕$\hat{X}_A$轴旋转$\theta$

- 例：坐标系$\{B\}$相对坐标系$\{A\}$绕$\hat{Z}_A$轴旋转30 度，沿$\hat{X}_A$平移10 个单位，沿$\hat{Y}_A$平移5个单位。已知${}^{B}P=\begin{bmatrix}3.0 & 7.0 & 0.0\end{bmatrix}^T$，求${}^{A}P$

$$\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.500 \\ 0.000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.500 \\ 0.866 \\ 0.000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 1.000 \end{bmatrix} \quad {}^{A}O_B = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 5.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$${}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{A}_{B}T \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

## 2.4.2 姿态的欧拉角表示

设$\{A\}$的$\hat{X}_A$和$\hat{Y}_A$在水平面上，$\hat{Z}_A$ 垂直于水平面并指向下方

以飞机为例（其联体坐标系$\{G\}$ 的$\hat{X}_G$ 轴方向为机身向前方向、$\hat{Y}_G$ 轴方向为右机翼向右方向）

如何将飞机一个任意初始姿态（$\{G(t_0)\}=\{D\}$ ）旋转为基准姿态（$\{G(t_f)\}=\{A\}$ ）？

可分3步，设$t_0<t_1<t_2<t_f$

第1步$(t_0,t_1)$：飞机$\{G\}$ 绕$\{D\}$ 的$\hat{X}_D$ 旋转$-\gamma$ 角，以使左右机翼高度相等，$\{G(t_1)\}=\{C\}$

第2步$(t_1,t_2)$：飞机$\{G\}$ 绕$\{C\}$ 的$\hat{Y}_C$ 旋转$-\beta$ 角，以使机头机尾高度相等，$\{G(t_2)\}=\{B\}$

第3步$(t_2,t_f)$：飞机$\{G\}$ 绕$\{B\}$ 的$\hat{Z}_B$ 旋转$-\alpha$ 角，以使 $\{G(t_f)\}=\{A\}$

飞机如何从基准姿态$\{A\}$ 旋转为姿态$\{D\}$ ？

第1步：$\{G\}$ 绕$\hat{Z}_A$ 旋转$\alpha$ 角到$\{B\}$ ，即 ${}^A_BR=R_z(\alpha)$

第2步：$\{G\}$ 绕$\hat{Y}_B$ 旋转$\beta$ 角到$\{C\}$ ，即 ${}^B_CR=R_y(\beta)$

第3步：$\{G\}$ 绕$\hat{X}_C$ 旋转$\gamma$ 角到$\{D\}$ ，即 ${}^C_DR=R_x(\gamma)$

# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

Z-Y-X欧拉角：$^{A}_{D}R = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}_{D}R = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$

物体的姿态由3个独立的角度$\alpha$ 、$\beta$ 和$\gamma$ 来确定

$$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma\\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma\\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma\end{bmatrix}$$

任何$R\in SO(3)$可用$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)$ 表示出来

任何$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)\in SO(3)$

同理，还存在X-Y-Z 欧拉角、X-Z-Y 欧拉角、Y-X-Z 欧拉角、Y-Z-X 欧拉角和Z-X-Y 欧拉角

# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

还有其它形式的欧拉角吗？

将飞机从一个任意初始姿态（$\{G(t_0)\}=\{D\}$ ）旋转为基准姿态（$\{G(t_f)\}=\{A\}$ ）

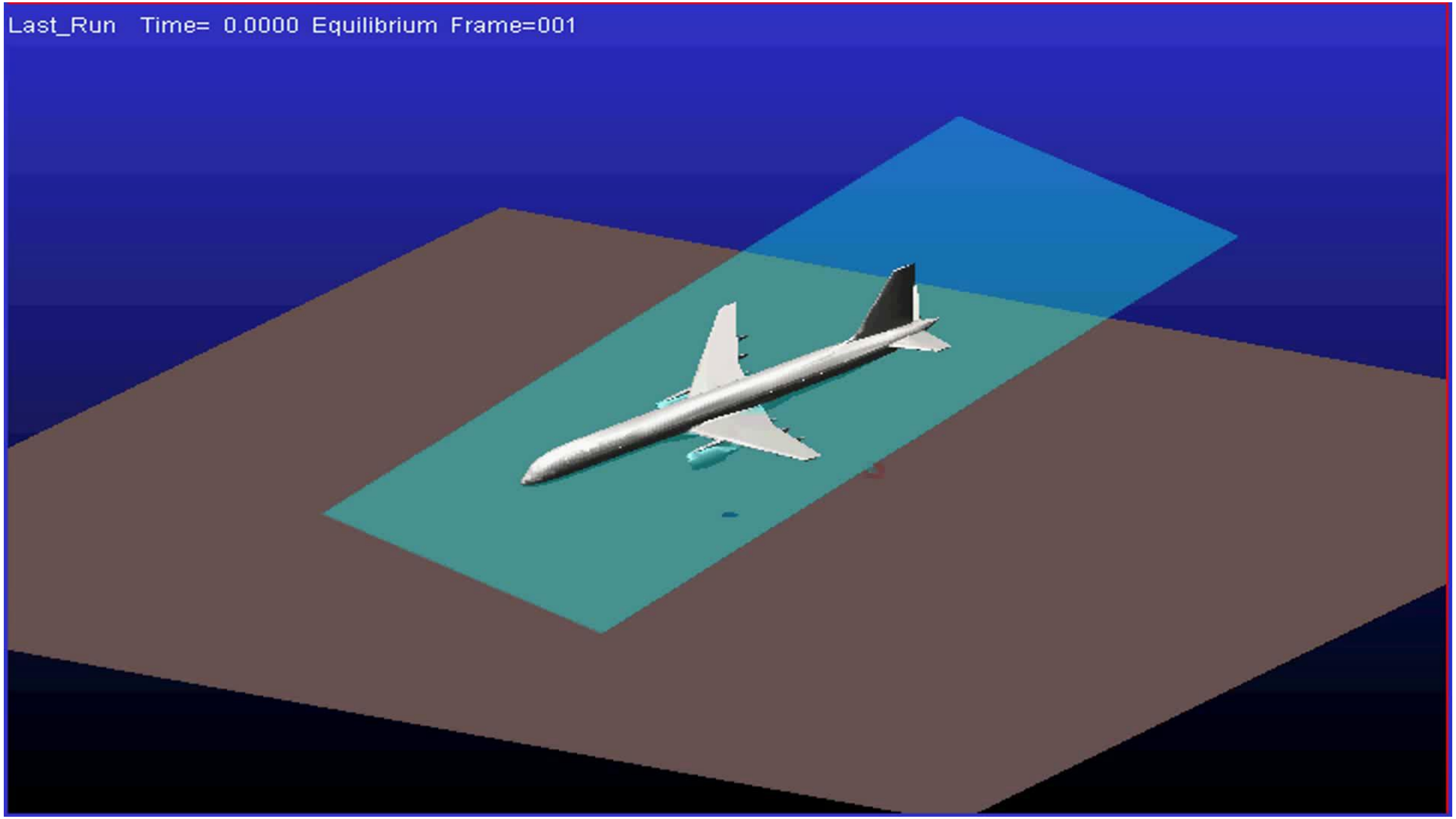
第1步$(t_0,t_1)$：飞机$\{G\}$ 绕$\{D\}$ 的$\hat{X}_D$ 旋转$-\gamma$ 角，以使左右机翼高度相等，$\{G(t_1)\}=\{C\}$

第2步$(t_1,t_2)$：飞机$\{G\}$ 绕$\{C\}$ 的$\hat{Y}_C$ 旋转$-\beta$ 角，以使机头机尾高度相等，$\{G(t_2)\}=\{B\}$

第3步$(t_2,t_f)$：飞机$\{G\}$ 绕$\{B\}$ 的$\hat{Z}_B$ 旋转$-\alpha$ 角，以使 $\{G(t_f)\}=\{A\}$

# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

还有其它形式的欧拉角吗？



# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

还有其它形式的欧拉角吗？

在第1步中,$\{G\}$ 绕$\{D\}$ 的$\hat{Z}_D$ 旋转一个合适的角度，也能使左右机翼高度相等,$\{G(t_1)\}=\{C'\}$

第2步:$\{G\}$ 绕$\{C'\}$ 的$\hat{Y}_{C'}$ 旋转一个合适的角度，以使机头机尾高度相等,$\{G(t_2)\}=\{B'\}$

第3步:$\{G\}$ 绕$\{B'\}$ 的$\hat{Z}_{B'}$ 旋转一个合适的角度，以使$\{G(t_f)\}=\{A\}$

# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

Z-Y-Z欧拉角：${}^{A}_{D}R = {}^{A}_{B'}R\,{}^{B'}_{C'}R\,{}^{C'}_{D}R = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$

物体的姿态由3个独立的角度$\alpha$ 、$\beta$ 和$\gamma$ 来确定

$$R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\end{bmatrix}$$

任何$R\in SO(3)$可用$R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)$ 表示出来

任何$R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)\in SO(3)$

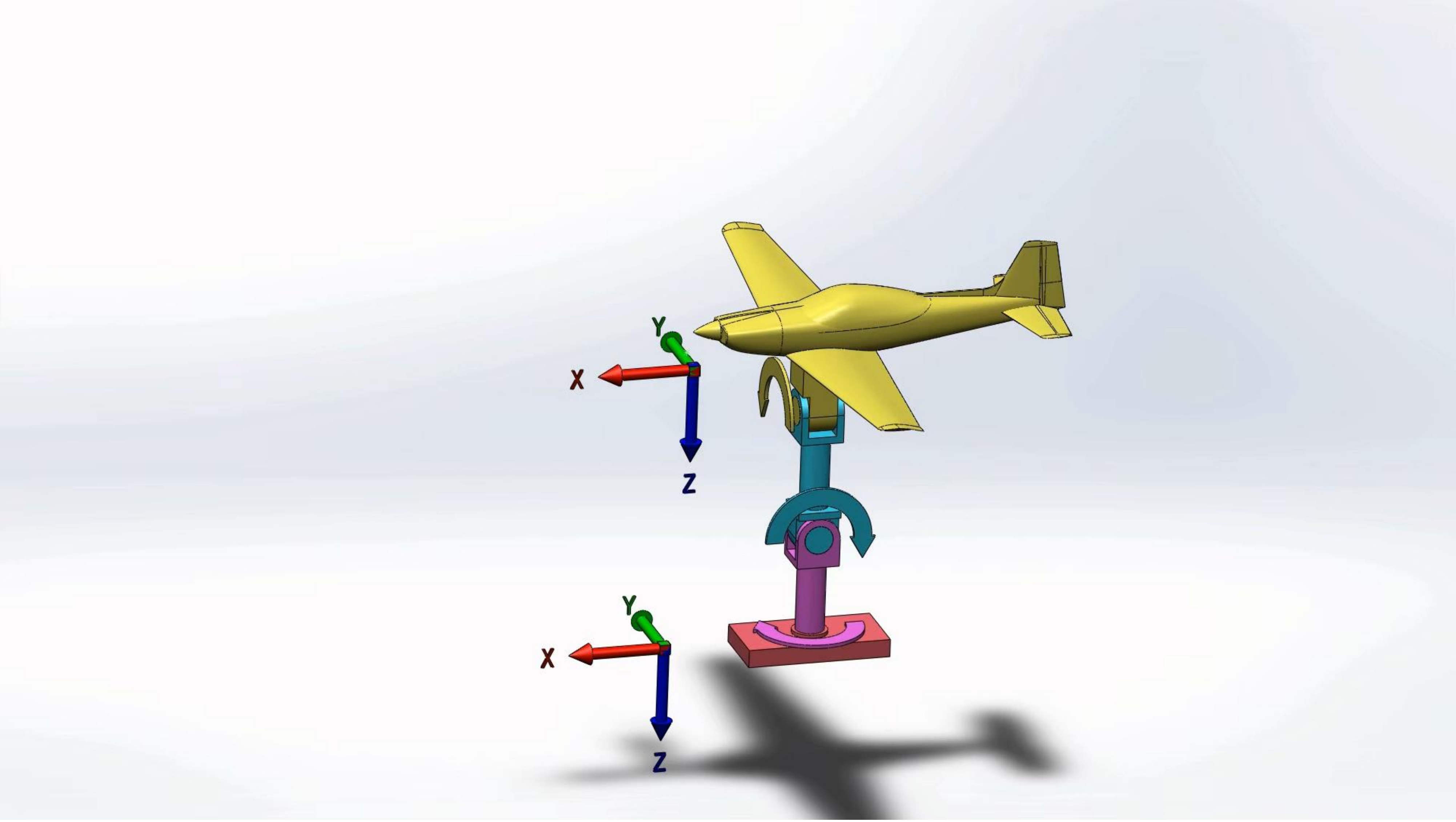
**同理，还存在X-Y-X欧拉角、X-Z-X欧拉角、Y-X-Y欧拉角、Y-Z-Y欧拉角和Z-X-Z欧拉角**

有12种欧拉角表示法

# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

## 2.4.3 姿态的固定角表示

视频展示：按腰−肩−肘的顺序旋转



# 2.4 姿态的欧拉角表示和固定角表示

视频展示：按肘－肩－腰的顺序旋转