

专题 04 一元函数的导数及其应用
(利用导函数研究不等式问题)(选填压轴题)

①构造 $F(x) = x^n f(x)$ 或 $F(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ ($n \in \mathbb{Z}$, 且 $n \neq 0$) 型

1. (2022 • 安徽师范大学附属中学高二期中) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) + f(x) > 0$, 且 $f(2) = 3$, 则 $f(e^x) > \frac{6}{e^x}$ 的解集为 ()

- A. $(\ln 2, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 1)$

【答案】A

令 $F(x) = xf(x)$, 可得 $F'(x) = xf'(x) + f(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数,

可得 $F(e^x) = e^x f(e^x)$, $f(2) = 3$, $F(2) = 2f(2) = 6$,

由 $f(e^x) > \frac{6}{e^x}$, 可得 $F(e^x) > F(2)$,

可得: $e^x > 2$, 所以 $x > \ln 2$,

所以不等式的解集为: $(\ln 2, +\infty)$,

故选: A.

2. (2022 • 河北 • 沧县中学高二阶段练习) 已知定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数 $f(x)$, 在 $x > 0$ 时满足: $xf'(x) + f(x) > 0$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

【答案】A

令 $F(x) = xf(x)$,

所以 $F(-x) = (-x)f(-x) = -xf(x) = -F(x)$

所以 $F(x)$ 是奇函数,

在 $x > 0$ 时, $F'(x) = xf'(x) + f(x) > 0$, 则在 $x > 0$ 时, $F(x)$ 单调递增,

由 $f(1) = 0$, 可得 $F(1) = 1 \times f(1) = 0$, $F(-1) = -F(1) = 0$,

所求 $f(x) = \frac{F(x)}{x} > 0$, 等价于 $\begin{cases} F(x) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} F(x) < 0 \\ x < 0 \end{cases}$,

解得 $x > 1$ 或 $x < -1$,

所以解集为: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

故选: A.

3. (2022 • 广东 • 佛山市顺德区东逸湾实验学校高二期中) 已知 $f'(x)$ 是偶函数 $f(x) (x \in \mathbb{R})$ 的导函数, $f(1) = 1$. 若 $x > 0$ 时, $3f(x) + xf'(x) > 0$, 则使得不等式 $(x - 2022)^3 f(x - 2022) > 1$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $(2021, +\infty)$ B. $(-\infty, 2021)$ C. $(2023, +\infty)$ D. $(-\infty, 2023)$

【答案】C

构造函数 $g(x) = x^3 f(x)$ ，其中 $x \in \mathbb{R}$ ，则 $g(-x) = (-x)^3 f(-x) = -x^3 f(x) = -g(x)$ ，

所以，函数 $g(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，

当 $x > 0$ 时， $g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^2 [3f(x) + xf'(x)] > 0$ ，所以，函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$

上为增函数，

因为 $f(1) = 1$ ，则 $g(1) = f(1) = 1$ ，

由 $(x - 2022)^3 f(x - 2022) > 1$ 得 $g(x - 2022) > g(1)$ ，可得 $x - 2022 > 1$ ，解得 $x > 2023$ 。

故选：C

4. (2022 · 河北 · 邢台市第二中学高二阶段练习) 定义在 $(0, 8)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为

$f'(x)$ ，且 $xf'(x) < 2f(x)$ ， $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ，则不等式 $f(x) < 4x^2$ 的解集为 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
C. $(0, 1)$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

【答案】A

设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ， $0 < x < 8$ ，则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} < 0$ ，则 $g(x)$ 在 $(0, 8)$ 上单调递减，

由 $f(x) < 4x^2$ ，得： $\frac{f(x)}{x^2} < 4$ ，而 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$ ，

所以 $g(x) < g\left(\frac{1}{2}\right)$ ，则 $\frac{1}{2} < x < 8$ 。

故不等式 $f(x) < 4x^2$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$ 。

故选：A

5. (2022 · 福建省德化第一中学高二阶段练习) 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，当 $x < 0$

时， $f(x) + xf'(x) < 0$ ，且 $f(-3) = 0$ ，则不等式 $xf(x) > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-3, 0) \cup (0, 3)$ B. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
C. $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ D. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$

【答案】C

设 $g(x) = xf(x)$ ，则 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$

而 $g(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -g(x)$ ，故 $g(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，

且 $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ ，

当 $x < 0$ 时，因为 $f(x) + xf'(x) < 0$ ，故 $g'(x) < 0$ ，

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数，故 $g(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的减函数，

而 $f(-3) = 0$ ，故 $g(-3) = 0$ ，所以 $g(3) = 0$

又 $xf(x) > 0$ 即为 $g(x) > 0$ ，故 $\begin{cases} x < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ ，

故 $\begin{cases} x < 0 \\ g(x) > g(-3) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0 \\ g(x) > g(3) \end{cases}$ ，

故 $x < -3$ 或 $0 < x < 3$ ，

故选：C.

6. (2022 · 宁夏吴忠 · 高二期中(理)) $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，且 $f(2) = 0$ ，当 $x > 0$

时，有 $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$ 恒成立，则 $\frac{f(x)}{x} > 0$ 的解集为 ()

A. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

C. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ D. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

【答案】C

设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ ，

由题知，当 $x > 0$ 时， $g'(x) < 0$ ，

$\therefore g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数， $\therefore f(-x) = -f(x)$

$\therefore g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = g(x)$ ，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，

$\therefore g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$ ，

$\because f(2) = 0$ ， $\therefore g(2) = \frac{f(2)}{2} = 0$ ， $g(-2) = 0$

$\therefore$ 当 $x < -2$ 或 $x > 2$ 时， $g(x) < 0$ ，

当 $-2 < x < 0$ 或 $0 < x < 2$ 时， $g(x) > 0$ ，

$$D. 2\sqrt{a}f(2\sqrt{a}) < \frac{4af(a+1)}{a+1} < (a+1)f\left(\frac{4a}{a+1}\right)$$

【答案】B

解：∵当 $x < 0$ 时， $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ 恒成立，∴ $xf'(x) < f(x)$ ，∴ $xf'(x) - f(x) < 0$ ，

令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，∴ $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ ，∴ $g'(x) < 0$ ，∴ $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，

∵ $f(-x) = f(x)$ ，∴ $g(-x) = -g(x)$ ，∴ $g(x)$ 为奇函数，在 $(0, +\infty)$ 上单调递减。

∵比较 $\frac{4af(a+1)}{a+1}$ ， $2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})$ ， $(a+1)f\left(\frac{4a}{a+1}\right)$ 的大小，

$$\therefore \frac{4af(a+1)}{a+1} = 4ag(a+1), \quad 2\sqrt{a}f(2\sqrt{a}) = 4ag(2\sqrt{a}), \quad (a+1)f\left(\frac{4a}{a+1}\right) = 4ag\left(\frac{4a}{a+1}\right)$$

$$\because a > 1, \therefore a+1-2\sqrt{a} = (\sqrt{a}-1)^2 > 0,$$

$$\therefore a+1 > 2\sqrt{a},$$

$$\frac{4a}{a+1} < \frac{4a}{2\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}, \therefore 2\sqrt{a} > \frac{4a}{a+1}.$$

$$\therefore a+1 > 2\sqrt{a} > \frac{4a}{a+1}, \therefore g(a+1) < g(2\sqrt{a}) < g\left(\frac{4a}{a+1}\right),$$

$$\therefore 4ag(a+1) < 4ag(2\sqrt{a}) < 4ag\left(\frac{4a}{a+1}\right),$$

$$\text{即 } \frac{4af(a+1)}{a+1} < 2\sqrt{a}f(2\sqrt{a}) < (a+1)f\left(\frac{4a}{a+1}\right).$$

故选：B.

9. (2022·四川雅安·三模(理)) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且当 $x > 0$ 时， $xf'(x) + 2f(x) < 0$ 。则 ()

$$A. \frac{f(e)}{4} > \frac{f(2)}{e^2}$$

$$B. 9f(3) > f(1)$$

$$C. 4f(-2) < 9f(-3)$$

$$D. \frac{f(e)}{9} > \frac{f(-3)}{e^2}$$

【答案】D

令 $g(x) = x^2 f(x)$ ，因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $g(x)$ 为偶函数，

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时， } g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) = x[2f(x) + xf'(x)] < 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减，在 $(-\infty, 0)$ 单调递增，

则 $g(e) < g(2)$ ，即 $e^2 f(e) < 2^2 f(2)$ ，则 $\frac{f(e)}{4} < \frac{f(2)}{e^2}$ ，故A错误；

$g(3) < g(1)$ ，即 $9f(3) < f(1)$ ，故 B 错误；

$g(-2) > g(-3)$ ，即 $4f(-2) > 9f(-3)$ ，故 C 错误；

$g(e) > g(3) = g(-3)$ ，即 $e^2 f(e) > 9f(-3)$ ，则 $\frac{f(e)}{9} > \frac{f(-3)}{e^2}$ ，故 D 正确。

故选：D.

②构造 $F(x) = e^{nx} f(x)$ 或 $F(x) = \frac{f(x)}{e^{nx}}$ ($n \in \mathbb{Z}$ ，且 $n \neq 0$) 型

1. (2022 · 广东 · 深圳市南山外国语学校 (集团) 高级中学高二期中) 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，已知 $f'(x) < f(x)$ ，且 $f(1) = 2e$ ，则满足不等式 $f(a) < 2e^a$ 的实数 a 的取值范围为 ()

A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

【答案】C

设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，则 $g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ ，

因为 $f'(x) < f(x)$ ， $e^x > 0$ ，所以 $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 是减函数，

$$g(1) = \frac{f(1)}{e} = \frac{2e}{e} = 2,$$

不等式 $f(a) < 2e^a$ 化为 $\frac{f(a)}{e^a} < 2$ ，即 $g(a) < g(1)$ ，

所以 $a > 1$ 。

故选：C.

2. (2022 · 安徽省芜湖市教育局模拟预测 (文)) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) - 2f(x) > 0$ ，则下列大小关系正确的是 ()

A. $f(2) > e^2 f(1) > e^3 f\left(\frac{1}{2}\right)$ B. $e^2 f(1) > f(2) > e^3 f\left(\frac{1}{2}\right)$
C. $e^2 f(1) > e^3 f\left(\frac{1}{2}\right) > f(2)$ D. $f(2) > e^3 f\left(\frac{1}{2}\right) > e^2 f(1)$

【答案】A

构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ ，其中 $x \in \mathbb{R}$ ，则 $g'(x) = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} > 0$ ，

所以，函数 $g(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的增函数，

所以， $g\left(\frac{1}{2}\right) < g(1) < g(2)$ ，即 $\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{e} < \frac{f(1)}{e^2} < \frac{f(2)}{e^4}$ ，因此， $e^3 f\left(\frac{1}{2}\right) < e^2 f(1) < f(2)$ 。

故选：A.

3. (2022·江西·南昌市八一中学三模(文))记定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,且 $f'(x)-f(x)>0$, $f(1)=1$,则不等式 $f(x)>e^{x-1}$ 的解集为_____.

【答案】 $(1,+\infty)$

设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$, $g'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$,所以函数 $g(x)$ 单调递增,

且 $g(1)=\frac{f(1)}{e}=\frac{1}{e}$,不等式 $f(x)>e^{x-1}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^x}>\frac{1}{e}\Leftrightarrow g(x)>g(1)$,所以 $x>1$.

故答案为: $(1,+\infty)$.

4. (2022·甘肃·玉门油田第一中学高二期中(理))已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,满足 $f'(x)<f(x)$,且 $f(x+3)$ 为偶函数, $f(6)=1$,则不等式 $f(x)>e^x$ 的解集为_____.

【答案】 $(-\infty,0)$

设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$,又 $f'(x)<f(x)$,

所以 $g'(x)<0$,即 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,

因为 $f(x+3)$ 为偶函数,所以 $f(x+3)$ 图象关于 y 轴对称,而 $f(x+3)$ 向右平移3个单位可得 $f(x)$,

所以 $f(x)$ 对称轴为 $x=3$,则 $f(0)=f(6)=1$,

所以 $g(0)=\frac{f(0)}{e^0}=1$,不等式 $f(x)>e^x$ 等价于 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}>1=g(0)$,故 $x<0$,

所以不等式 $f(x)>e^x$ 的解集为 $(-\infty,0)$.

故答案为: $(-\infty,0)$

5. (2022·福建省龙岩第一中学高二阶段练习)已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $f'(x)+f(x)<3$, $f(0)=3$,则 $f(x)>3$ 的解集为_____.

【答案】 $(-\infty,0)$

因为 $f'(x)+f(x)<3$,

所以 $e^x[f'(x)+f(x)]<3e^x$,

令 $F(x)=e^x[f(x)-3]$,

则 $F'(x)=e^x[f(x)-3]+e^x f'(x)$,

$=e^x[f'(x)+f(x)-3]<0$,

所以 $F(x)$ 是减函数,

$$\text{又 } F(0) = e^0[f(0) - 3] = 0,$$

$$f(x) > 3 \text{ 即 } f(x) - 3 > 0, \quad e^x[f(x) - 3] > 0,$$

$$\text{所以 } F(x) > F(0),$$

$$\text{所以 } x < 0,$$

$$\text{则 } f(x) > 3 \text{ 的解集为 } (-\infty, 0)$$

故答案为: $(-\infty, 0)$

6. (2022 · 全国 · 高三专题练习) 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) - 3f(x) > 0$,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = e, \text{ 则不等式 } f(x) > e^{3x} \text{ 的解集为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】} \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

$$\text{构造 } F(x) = \frac{f(x)}{e^{3x}}, \text{ 则 } F'(x) = \frac{e^{3x}f'(x) - 3e^{3x}f(x)}{e^{6x}} = \frac{f'(x) - 3f(x)}{e^{3x}},$$

函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) - 3f(x) > 0$, 则 $F'(x) > 0$, 故 $F(x)$ 在 R 上单调递增.

$$\text{又 } \because f\left(\frac{1}{3}\right) = e, \text{ 则 } F\left(\frac{1}{3}\right) = 1,$$

$$\text{则不等式 } f(x) > e^{3x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{3x}} > 1, \text{ 即 } F(x) > F\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\text{根据 } F(x) \text{ 在 } R \text{ 上单调递增, 可知 } x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

$$\text{③构造 } F(x) = f(x)\sin x \text{ 或 } F(x) = \frac{f(x)}{\sin x} \text{ 型}$$

1. (2022 · 山西 · 临汾第一中学校高二期末) 若函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 对任意

$x \in (0, \pi)$, $f'(x)\sin x < f(x)\cos x$ 恒成立, 则 ()

$$\text{A. } \sqrt{2}f\left(\frac{3\pi}{4}\right) > f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\text{B. } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) > \sqrt{2}f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\text{C. } \sqrt{2}f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\text{D. } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < \sqrt{2}f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

【答案】B

因为任意 $x \in (0, \pi)$, $f'(x)\sin x < f(x)\cos x$ 恒成立,

即任意 $x \in (0, \pi)$, $f'(x)\sin x - f(x)\cos x < 0$ 恒成立,

$$\text{所以} \left[\frac{f(x)}{\sin x} \right]' = \frac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{(\sin x)^2} < 0, \quad x \in (0, \pi)$$

所以 $\frac{f(x)}{\sin x}$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减,

$$\text{因为} \frac{5\pi}{6} > \frac{3\pi}{4}, \text{ 所以} \frac{f\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)} < \frac{f\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}, \text{ 即} \frac{f\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\frac{1}{2}} < \frac{f\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\text{所以} \sqrt{2}f\left(\frac{5\pi}{6}\right) < f\left(\frac{3\pi}{4}\right),$$

故选: B

2. (2022 · 江苏江苏 · 高二阶段练习) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, \pi)$, 其导函数是 $f'(x)$, 若 $f'(x)\sin x < -f(x)\cos x$, 则关于 x 的不等式 $\sqrt{2}f(x)\sin x < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的解集为_____.

$$\text{【答案】} \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$$

$$f'(x)\sin x < -f(x)\cos x \text{ 变形为 } f'(x)\sin x + f(x)\cos x < 0,$$

$$\sqrt{2}f(x)\sin x < f\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ 变形为 } f(x)\sin x < f\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin \frac{\pi}{4},$$

$$\text{故可令 } g(x) = f(x)\sin x, \quad x \in (0, \pi),$$

$$\text{则 } g'(x) = f'(x)\sin x + f(x)\cos x < 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 单调递减,

$$\text{不等式 } f(x)\sin x < f\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin \frac{\pi}{4} \text{ 即为 } g(x) < g\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{则 } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right),$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right).$$

3. (2022 · 全国 · 高三专题练习) 函数 $f(x)$ 定义在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$, 其导函数是 $f'(x)$, 且 $f(x) \cdot \cos x < f'(x) \cdot \sin x$ 恒成立, 则不等式 $f(x) > 2\sqrt{2}\sin x$ 的解集为_____.

$$\text{【答案】} \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{解: } \mathbf{Q} \quad f(x)\cos x < f'(x)\sin x$$

$$\therefore f'(x)\sin x - f(x)\cos x > 0,$$

构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$,

则 $g'(x) = \frac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{\sin^2 x}$,

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增,

$\therefore$ 不等式 $f(x) > 2\sqrt{2}\sin x$,

即 $\frac{f(x)}{\sin x} > 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin \frac{\pi}{6}}$

即 $g(x) > g\left(\frac{\pi}{6}\right)$,

$\therefore \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

故不等式的解集为 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

故答案为: $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. (2022 · 全国 · 高三专题练习) 设奇函数 $f(x)$ 定义在 $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ 上, 其导函数为

$f'(x)$, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 当 $0 < x < \pi$ 时, $f'(x)\sin x - f(x)\cos x < 0$, 则关于 x 的不等式

$f(x) < 2f\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x$ 的解集为.

【答案】 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \pi\right)$

设 $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$, $\therefore g'(x) = \frac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{\sin^2 x}$,

$\because f(x)$ 是定义在 $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ 上的奇函数, $\therefore g(-x) = \frac{f(-x)}{\sin(-x)} = \frac{f(x)}{\sin x} = g(x)$,

$\therefore g(x)$ 是定义在 $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ 上的偶函数,

$\because$ 当 $0 < x < \pi$ 时, $f'(x)\sin x - f(x)\cos x < 0$,

$\therefore g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减, $g(x)$ 在 $(-\pi, 0)$ 上单调递增,

$\because f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\therefore g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin \frac{\pi}{2}} = 0$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/117024061115006106>