

第 05 讲 一元二次方程根与系数的关系（5 种题型）

【知识梳理】

韦达定理：如果 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 - bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根，由解方程中的公式法得，

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

那么可推得 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 这是一元二次方程根与系数的关系.



【考点剖析】

题型 1：求根与系数关系

例 1. (2020 秋·广东揭阳·九年级统考期末) 已知一元二次方程 $2x^2 - 3x - 10 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ，则 $x_1 \cdot x_2$ 的值得为_____.

题型 2：利用根与系数的关系式求代数式的值

例 2. (2023·山东济宁·统考二模) 已知方程 $x^2 - 2023x + 1 = 0$ 的两根分别为 m, n ，则 $m^2 - \frac{2023}{n}$ 的值为 ()

A. 1

B. -1

C. 2023

D. -2023

例 3. (2023·江苏南京·统考二模) 已知 a, b 是一元二次方程 $2x^2 + 3x - 4 = 0$ 的两个根，那么 $ab^2 + a^2b$ 的值是_____.

例 4. (2023·湖北鄂州·统考二模) 若实数 a, b 分别满足 $a^2 - 2a = 1, b^2 - 2b = 1$ ，且 $a \neq b$ ，则代数式 $a^2b + ab^2$ 的值为_____.

题型 3：已知一元二次方程的两根关系求字母的取值（范围）

例 5. (2023·河北邯郸·统考三模) 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 + ax - 2b = 0$ 的两实数根，且 $x_1 + x_2 = -2$ ， $x_1 \cdot x_2 = 1$ ，则 a 的值为_____， b^a 的值是_____.

例 6. (2022 秋·八年级单元测试) 已知关于 x 的方程 $x + \frac{a}{x} + b = 0$ 的两根均大于 1 且小于 2，则 $a+b$ 的取值范围是_____.

题型 4：已知含字母的一元二次方程的一个根，求另一个根及字母的值

例 7. (2023·北京海淀·统考二模) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0 (m < 0)$.

(1) 判断方程根的情况, 并说明理由;

(2) 若方程的一个根为 -1 , 求 m 的值和方程的另一个根.

题型 5: 有关一元二次方程的根与系数关系的创新题

例 8. 已知一个直角三角形的两个直角边的长恰好是方程: $2x^2 - 8x + 7 = 0$ 两个根, 求这个直角三角形的周长.

例 9. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^2 + (2m-1)x + 3-m = 0 (m \text{ 为实数})$ 有两根 x_1, x_2 , 其中 $x_1 > 0, x_2 < 0$ 且 $|x_1| > |x_2|$, 求 m 的取值范围.

例 10. 已知方程: $x^2 - 4x + a = 0$ 的一个根大于 3, 另一个根小于 3, 求 a 的取值范围.

【过关检测】

一、单选题

1. (2023·河南新乡·河南师大附中校考三模) 如果 m , n 是两个不相等的实数, 且满足 $m^2 + m = 4$, $n^2 + n = 4$, 那么代数式 $3n^2 - mn - 3m$ 的值是 ()
- A. 19 B. 18 C. 16 D. 15
2. (2023·四川绵阳·统考三模) 若关于 x 的方程 $2x^2 - (k-1)x + k + 1 = 0$ 的两个实数根满足关系式 $|x_1 - x_2| = 1$, 则 k 的值为 ()
- A. 11 B. -1 C. 11 或 -1 D. 11 或 -1 或 1
3. (2023·湖北武汉·统考模拟预测) 已知 m , n 是一元二次方程 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 的两根, 则 $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}$ 的值是 ()
- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. -3 D. $\frac{3}{2}$
4. (2023·云南昆明·统考二模) 一元二次方程 $x^2 + x = 2$ 的两个根分别为 x_1 和 x_2 , 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为 ()
- A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
5. (2023·湖北武汉·武汉市卓刀泉中学统考模拟预测) 已知 a , b 是方程 $x^2 - 6x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $\frac{2a}{a^2 - b^2} - \frac{1}{a - b}$ 的值是 ()
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$
6. (2023·湖北武汉·校考模拟预测) 已知 m , n 是一元二次方程 $x^2 + kx - 1 = 0$ 的两根, 且代数式 $\frac{1}{m-2} - \frac{1}{2-n}$ 的值为 $\frac{1}{3}$, 则 k 的值为 ()
- A. $\frac{17}{5}$ B. $-\frac{17}{5}$ C. 3 D. -3
7. (2023·湖北咸宁·统考一模) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - kx - 1 = 0$ (k 为常数), 下列说法错误的是 ()
- A. 该方程有两个不相等的实数根 B. 该方程有两个异号实数根
- C. 抛物线 $y = x^2 - kx$ 与直线 $y = 1$ 必相交 D. 该方程有两实根但不互为相反数
8. (2023 春·浙江·八年级期末) 已知关于 x 的一元二次方程: $x^2 - 2x - a = 0$, 有下列结论:
- ①当 $a > -1$ 时, 方程有两个不相等的实根;
- ②当 $a > 0$ 时, 方程不可能有两个异号的实根;
- ③当 $a > -1$ 时, 方程的两个实根不可能都小于 1;

④当 $a > 3$ 时，方程的两个实根一个大于 3，另一个小于 3.

以上 4 个结论中，正确的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

二、填空题

9. (2023·四川成都·校考三模) 若 a, b 是一元二次方程 $x^2 - 5x - 2 = 0$ 的两个实数根，则 $\frac{a^3 + a^2b}{5a + 2}$ 的值为_____.

10. (2023·湖南永州·校考三模) 已知 x_1, x_2 分别为一元二次方程 $x^2 - 2024x - 4 = 0$ 的两个实数解，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为_____.

11. (2023·新疆博尔塔拉·校考二模) 已知 m, n 是方程 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 的两根，则 $m^2 - 5m - n$ 的值为_____.

12. (2023·山东济南·统考三模) 若 $x = -2$ 是方程 $x^2 + x + m = 0$ 的一个根，则此方程的另一个根是_____.

13. (2023·湖北恩施·统考二模) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2m^2 = 5x$ 的两个实数根为 a, b ，且 $a^2 + ab = 15$ ，则 $m =$ _____.

14. (2023·山东日照·统考二模) 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 2x + 3m - 1 = 0$ 两个实数根 x_1, x_2 且 $x_1 \cdot x_2 > x_1 + x_2 - 4$ ，则 m 的取值范围是_____;

15. (2023·江西吉安·统考一模) 已知方程 $x^2 - 5x - 2 = 0$ 的两个解分别为 x_1, x_2 ，则 $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ 的值为_____.

16. (2023·江苏泰州·统考二模) 关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + 3m = 0 (m < 0)$ 的两个实根分别为 x_1, x_2 ，则 $\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} =$ _____.

17. (2023·江苏泰州·泰州市海军中学校考二模) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 5x - 1 = 0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2 =$ _____.

18. (2023·江苏泰州·统考二模) $x = 1$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx - 5 = 0$ 的一个根，则此方程的另一个根是_____.

19. (2023·四川成都·统考二模) 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 + mx - 3 = 0$ 的两个实数根，且 $x_1 = -1$ ，则 $m - 2x_1x_2 =$ _____.

20. (2023·四川成都·统考二模) 若边长为 5 的菱形的两条对角线的长分别是关于 x 的一元二次方程

$x^2 + (2m+1)x + m^2 - 4 = 0$ 两根的 2 倍, 则 m 的值为_____.

21. (2023·江西抚州·校联考三模) 设 m, n 是方程 $x^2 + x - 2023 = 0$ 的两个实数根, 则 $m^2 + 2m + n + mn$ 的值为_____.

三、解答题

22. (2023·河南南阳·统考二模) 【阅读与思考】如表是小亮同学在数学杂志上看到的小片段, 请仔细阅读并完成相应的任务.

一元二次方程根与系数的关系通过学习用公式法解一元二次方程可以发现, 一元二次方程的根完全由它的系数确定, 求根公式就是根与系数关系的一种形式. 除此以外, 一元二次方程的根与系数之间还有一些其他形式的关系.

从因式分解的角度思考这个问题, 若把一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根分别记为 x_1, x_2 , 则有恒等式 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, 即 $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$. 比较两边系数可得: $x_1 + x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_1 \cdot x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

任务:

(1) 填空: $x_1 + x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_1 \cdot x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 小亮同学利用求根公式进行推理, 同样能够得出一元二次方程两根之和、两根之积与系数之间的关系. 下面是小亮同学的部分推理过程, 请完成填空, 并将推理和运算过程补充完整.

解: 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$,

当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时, 有两个实数根 $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

.....

(3) 已知关于 x 的方程 $2x^2 + 3mx + m^2 = 0$ 的两根之和与两根之积的和等于 2, 直接写出 m 的值.

23. (2023·江苏·统考二模) 问题: 已知实数 a, b, c 满足 $a^2 \leq b$, 且 $2023(a-b) + \sqrt{2023}(b-c) + (c-a) = 0$,

求证: $\frac{(c-b)(c-a)}{(a-b)^2} - \sqrt{2023} = 2023$.

小明在思考时，感觉无从下手，就去请教学霸小刚，小刚审题后思考了片刻，对小明说：我们可以构造一个一元二次方程，利用一元二次方程根与系数的关系及整体代入即可解答，并写下了部分解题过程供小明参考：

令 $\sqrt{2023} = x$ ，则 $2023 = x^2$ ，原等式可变形为关于 x 的一元二次方程：

$$(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0 (a \neq b).$$

可以发现： $(a-b) \times 1^2 + (b-c) \times 1 + (c-a) = 0$.

从而可知构造的方程两个根分别是 1 和 $\sqrt{2023}$.

利用根与系数的关系得： $1 + \sqrt{2023} = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $1 \times \sqrt{2023} = \underline{\hspace{2cm}}$ ； ...

请你根据小刚的思路完整地解答本题.

24. (2023·江苏泰州·泰州市海军中学校考二模) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m+3)x + 2 + m = 0$.

(1) 试说明：对于任意实数 m ，该方程总有实数根；

(2) 若这个一元二次方程的一根大于 2，另一根小于 2，求 m 的取值范围.

25. (2023 春·浙江·八年级期末) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(a-1)x + a^2 - a - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(1) 若 a 为正整数，求 a 的值；

(2)若 x_1, x_2 满足 $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 16$, 求 a 的值.

26. (2023·湖北随州·统考一模) 关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -2$, 求 m 的值.

27. (2023·湖北襄阳·统考一模) 阅读材料, 解答问题:

已知实数 m, n 满足 $m^2 - m - 1 = 0$, $n^2 - n - 1 = 0$, 且 $m \neq n$, 则 m, n 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个不相等的实数根, 由韦达定理可知 $m + n = 1$, $mn = -1$.

根据上述材料, 解决以下问题:

(1) 直接应用: 已知实数 a, b 满足: $a^2 - 7a + 1 = 0$, $b^2 - 7b + 1 = 0$, 且 $a \neq b$, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$, $ab = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 间接应用: 在 (1) 条件下, 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值;

(3) 拓展应用: 已知实数 m, n 满足: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} = 7$, $n^2 - n = 7$ 且 $mn + 1 \neq 0$, 则 $\frac{1}{m} - n = \underline{\hspace{2cm}}$.

28. (2022 春·八年级单元测试) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$.

(1) 若方程有实数根, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若方程两实数根分别为 x_1, x_2 , 且满足 $(x_1 + x_2)^2 = 16 - x_1 x_2$, 求实数 m 的值.

第 05 讲 一元二次方程根与系数的关系 (5 种题型)

【知识梳理】

韦达定理：如果 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 - bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根，由解方程中的公

式法得，
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

那么可推得 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 这是一元二次方程根与系数的关系。



【考点剖析】

题型 1：求根与系数关系

例 1. (2020 秋·广东揭阳·九年级统考期末) 已知一元二次方程 $2x^2 - 3x - 10 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ，则 $x_1 \cdot x_2$ 的值得为_____.

【答案】-5

【分析】直接利用根与系数的关系求得即可.

【详解】解：∵一元二次方程 $2x^2 - 3x - 10 = 0$ 的两实数根分别为 x_1, x_2

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = \frac{-10}{2} = -5$$

故答案为：-5.

【点睛】本题考查了根与系数的关系：若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根时， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

题型 2：利用根与系数的关系式求代数式的值

例 2. (2023·山东济宁·统考二模) 已知方程 $x^2 - 2023x + 1 = 0$ 的两根分别为 m, n ，则

$m^2 - \frac{2023}{n}$ 的值为 ()

A. 1

B. -1

C. 2023

D. -2023

【答案】B

【分析】由题意得 $mn = 1$ ， $m^2 - 2023m + 1 = 0$ ，将代数式变形后再代入求解即可.

【详解】解：∵方程 $x^2 - 2023x + 1 = 0$ 的两根分别为 m, n ，

$$\therefore mn = 1, m^2 - 2023m + 1 = 0, m \neq 0,$$

$$\therefore m^2 - 2023m = -1$$

$$\begin{aligned}
 & \therefore m^2 - \frac{2023}{n} \\
 &= m^2 - \frac{2023m}{mn} \\
 &= m^2 - \frac{2023m}{1} \\
 &= m^2 - 2023m \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

故选：B.

【点睛】本题考查根的定义及根与系数的关系：若 x_1, x_2 是一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 。熟练掌握代数式的求值技巧是解题的关键。

例 3. (2023·江苏南京·统考二模) 已知 a, b 是一元二次方程 $2x^2 + 3x - 4 = 0$ 的两个根，那么 $ab^2 + a^2b$ 的值是_____.

【答案】3

【分析】根据根与系数的关系，进行计算即可。

【详解】解：∵ a, b 是一元二次方程 $2x^2 + 3x - 4 = 0$ 的两个根，

$$\therefore a + b = -\frac{3}{2}, ab = -2,$$

$$\therefore ab^2 + a^2b = ab(a + b) = -\frac{3}{2} \times (-2) = 3;$$

故答案为：3.

【点睛】本题考查根与系数的关系，因式分解，代数式求值。熟练掌握根与系数的关系，是解题的关键。

例 4. (2023·湖北鄂州·统考二模) 若实数 a, b 分别满足 $a^2 - 2a = 1, b^2 - 2b = 1$ ，且 $a \neq b$ ，则代数式 $a^2b + ab^2$ 的值为_____.

【答案】-2

【分析】根据一元二次方程根与系数的关系求解即可。

【详解】解：设 a, b 是 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的根，

则 $a + b = 2$ ，

$$ab = -1,$$

$$\therefore a^2b + ab^2$$

$$= ab(a + b)$$

$$= 2 \times (-1)$$

$$=-2$$

【点睛】此题考查了一元二次方程的根与系数的关系，解题的关键是熟悉一元二次方程根与系数的关系式.

题型 3：已知一元二次方程的两根关系求字母的取值（范围）

例 5.（2023·河北邯郸·统考三模）已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 + ax - 2b = 0$ 的两实数根，且 $x_1 + x_2 = -2$ ， $x_1 \cdot x_2 = 1$ ，则 a 的值为_____， b^a 的值是_____.

【答案】 2 $\frac{1}{4}/0.25$

【分析】利用一元二次方程根与系数的关系，即可求解.

【详解】解：∵ x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 + ax - 2b = 0$ 的两实数根，

$$\therefore x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 \cdot x_2 = -2b,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -2, \quad x_1 \cdot x_2 = 1,$$

$$\therefore a = 2, -2b = 1,$$

$$\text{即 } b = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore b^a = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{故答案为：} 2; \frac{1}{4}$$

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的根与系数的关系，熟练掌握若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 是解题的关键.

例 6.（2022 秋·八年级单元测试）已知关于 x 的方程 $x + \frac{a}{x} + b = 0$ 的两根均大于 1 且小于 2，则 $a+b$ 的取值范围是_____.

【答案】 $-3 < a+b < 3$

【分析】先化简分式方程得一元二次方程，再根据根与系数的关系列出两个根与 a, b 的关系式，最后根据根的范围，求出 $a+b$ 的取值范围.

【详解】解： $x + \frac{a}{x} + b = 0$,

$$\text{去分母得， } x^2 + bx + a = 0,$$

$$\text{设 } x^2 + bx + a = 0 \text{ 的两个根为 } x_1, x_2,$$

由根与系数的关系可知，

$$x_1 \cdot x_2 = a,$$

$$x_1 + x_2 = -b,$$

$$\therefore a+b=x_1 \cdot x_2 - (x_1+x_2),$$

$\because x_1, x_2$ 均大于 1 且小于 2,

$$\therefore 1 < x_1 \cdot x_2 < 4, \quad 1 < x_1 + x_2 < 4,$$

$$\therefore -4 < -(x_1 + x_2) < -1.$$

$$\therefore -3 < x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) < 3.$$

$$\therefore -3 < a+b < 3.$$

故答案为: $-3 < a+b < 3$

【点睛】本题考查根与系数的关系和代数式取值范围问题, 熟练进行解方程, 解不等式, 正确运算是解题的关键.

题型 4: 已知含字母的一元二次方程的一个根, 求另一个根及字母的值

例 7. (2023·北京海淀·统考二模) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0 (m < 0)$.

(1) 判断方程根的情况, 并说明理由;

(2) 若方程的一个根为 -1 , 求 m 的值和方程的另一个根.

【答案】(1) 方程有两个不相等的实数根, 理由见解析

(2) $m = -3$, 另一个根为 3

【分析】(1) 求得 $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4m$, 根据 $m < 0$, 可得 $\Delta > 0$, 进而即可求解;

(2) 把 $x = -1$ 代入方程, 求出 m 的值, 再根据一元二次方程根与系数的关系求出即可.

【详解】(1) 解: $\because x^2 - 2x + m = 0$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4m,$$

$$\because m < 0,$$

$$\therefore 4 - 4m > 0,$$

$$\text{即 } \Delta > 0,$$

$\therefore$ 该方程有两个不相等的实数根.

(2) 解: $\because$ 方程的一个根为 -1 ,

$$\therefore 1 - 2 \times (-1) + m = 0,$$

$$\text{解得: } m = -3,$$

设方程的另一个根为 x_2 ,

$$\because x_1 x_2 = m, \quad m = -3, \quad x_1 = -1,$$

$$\therefore x_2 = 3,$$

$\therefore$ 另一个根为 3.

【点睛】本题考查了解一元二次方程、根的判别式和根与系数的关系等知识点, 能熟记根的判别式和根与系数的关系是解此题的关键.

题型 5：有关一元二次方程的根与系数关系的创新题

例 8. 已知一个直角三角形的两个直角边的长恰好是方程： $2x^2 - 8x + 7 = 0$ 两个根，求这个直角三角形的周长.

【答案】 7 .

【解析】解 设直角三角形的三边长为 a , b , c , 且 c 是斜边长, 由题知, $a + b = 4$, $ab = \frac{7}{2}$,

由勾股定理, 可得: $c^2 = a^2 + b^2$, 所以 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a+b)^2 - 2ab} = 3$,

所以直角三角形的周长 $a + b + c = 7$.

【总结】本题考查韦达定理 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ 的灵活应用, 并且考查了直角三角形的性质, 即勾股定理的应用.

例 9. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^2 + (2m-1)x + 3-m = 0$ (m 为实数) 有两根 x_1, x_2 , 其中 $x_1 > 0, x_2 < 0$ 且 $|x_1| > |x_2|$, 求 m 的取值范围.

【答案】 $\frac{1}{2} < m < 1$.

【解析】因为方程有两根, 所以 $m-1 \neq 0$, 即 $m \neq 1$; 由韦达定理, 可得: $x_1 + x_2 = \frac{1-2m}{m-1}$,

$x_1 x_2 = \frac{3-m}{m-1}$, 因为 $x_1 > 0, x_2 < 0$ 且 $|x_1| > |x_2|$, 所以 $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 x_2 < 0$,

即 $\frac{1-2m}{m-1} > 0$ 且 $\frac{3-m}{m-1} < 0$, 解得: $\frac{1}{2} < m < 1$.

【总结】本题考查韦达定理的应用和一元二次方程的概念以及解不等式的应用.

例 10. 已知方程: $x^2 - 4x + a = 0$ 的一个根大于 3, 另一个根小于 3, 求 a 的取值范围.

【答案】 $a < 3$.

【解析】解: 设方程的两根为 x_1, x_2 , 由 $x_1 > 3, x_2 < 3$, 可得: $(x_1 - 3)(x_2 - 3) < 0$,

即 $x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 < 0$, 而由韦达定理可得 $x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = a$,

所以 $a - 3 \times 4 + 9 < 0$, 即 $a < 3$.

【总结】本题考查韦达定理 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ 的灵活应用.

【过关检测】

一、单选题

1. (2023·河南新乡·河南师大附中校考三模) 如果 m, n 是两个不相等的实数, 且满足 $m^2 + m = 4, n^2 + n = 4$, 那么代数式 $3n^2 - mn - 3m$ 的值是 ()

- A. 19 B. 18 C. 16 D. 15

【答案】 A

【分析】根据题意， m ， n 可以看作一元二次方程 $x^2 + x - 4 = 0$ 的两根，则 $m + n = -1$ ， $mn = -4$ ，代入代数式，即可求解。

【详解】解：∵ $m^2 + m = 4$ ， $n^2 + n = 4$ ，
∴ m ， n 可以看作一元二次方程 $x^2 + x - 4 = 0$ 的两根，
∴ $m + n = -1$ ， $mn = -4$ ，
∵ $n^2 = 4 - n$ ，
∴ $3n^2 - mn - 3m = 3(4 - n) - mn - 3m$
 $= 12 - 3n - mn - 3m$
 $= 12 - 3(m + n) - mn$
 $= 12 - 3 \times (-1) + 4$
 $= 19$ ，

故选：A.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的解和一元二次方程根与系数的关系，解题的关键是熟练掌握一元二次方程解的定义以及一元二次方程两根之和为 $-\frac{b}{a}$ ，两根之积为 $\frac{c}{a}$ 。

2. (2023·四川绵阳·统考三模) 若关于 x 的方程 $2x^2 - (k-1)x + k+1 = 0$ 的两个实数根满足关系式 $|x_1 - x_2| = 1$ ，则 k 的值为()

A. 11 B. -1 C. 11 或 -1 D. 11 或 -1 或 1

【答案】C

【分析】先根据根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = \frac{k-1}{2}$ ， $x_1 x_2 = \frac{k+1}{2}$ ，再把 $|x_1 - x_2| = 1$ 两边平方后利用完全平方公式变形得到 $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1$ ，然后将 $x_1 + x_2 = \frac{k-1}{2}$ ， $x_1 x_2 = \frac{k+1}{2}$ 代入求关于 k 的方程，最后再利用判别式确定 k 的取值。

【详解】解：∵ 关于 x 的方程 $2x^2 - (k-1)x + k+1 = 0$ 的两个实数根

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{k-1}{2}, x_1 x_2 = \frac{k+1}{2},$$

$$\therefore |x_1 - x_2| = 1$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1$$

$$\therefore \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{k+1}{2} = 1, \text{ 整理得: } k^2 - 10k - 11 = 0, \text{ 解得 } k_1 = 11, k_2 = -1,$$

当 $k = 11$ 时，方程变形为 $2x^2 - 10x + 12 = 0$ ，即 $x^2 - 5x + 6 = 0$ ， $\Delta = 25 - 4 \times 6 > 0$ ，方程有两个不相等的实数解；

当 $k = -1$ 时，方程变形为 $2x^2 + 2x = 0$ ，即 $x^2 + x = 0$ ， $\Delta = 1 > 0$

，方程有两个不相等的实数解；

$\therefore k$ 的值为 11 或 -1.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的根与系数的关系、根的判别式等知识点，若方程两个为 x_1, x_2 ，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$ 是解答本题的关键.

3. (2023·湖北武汉·统考模拟预测) 已知 m, n 是一元二次方程 $x^2+3x+1=0$ 的两根，则

$\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}$ 的值是 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. 3

C. -3

D. $\frac{3}{2}$

【答案】B

【分析】根据一元二次方程根与系数的关系得出 $m+n=-3, mn=1$ ，进而可得 $m<0, n<0$ ， $|m|+|n|=-(m+n)=3$ ，根据二次根式的性质化简即可求解.

【详解】解： $\because m, n$ 是一元二次方程 $x^2+3x+1=0$ 的两根，

$$\therefore m+n=-3, mn=1$$

$$\therefore m<0, n<0,$$

$$\therefore |m|+|n|=-(m+n)=3$$

$$\therefore \sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}=\frac{\sqrt{mn}}{|n|}+\frac{\sqrt{mn}}{|m|}=\frac{1}{|n|}+\frac{1}{|m|}=\frac{|m|+|n|}{mn}=|m|+|n|=3,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了一元二次方程根与系数的关系，二次根式的性质，熟练掌握二次根式的性质以及一元二次方程根与系数的关系是解题的关键.

4. (2023·云南昆明·统考二模) 一元二次方程 $x^2+x=2$ 的两个根分别为 x_1 和 x_2 ，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值为 ()

A. $\frac{3}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【分析】利用一元二次方程根与系数的关系求解即可.

【详解】解：一元二次方程 $x^2+x=2$ 化为一般形式为 $x^2+x-2=0$

$\because$ 一元二次方程 $x^2+x=2$ 的两个根分别为 x_1 和 x_2 ，

$$\therefore x_1+x_2=-1, x_1 \cdot x_2=-2,$$

$$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}, \text{ 故 D 正确.}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/117030110126006155>