曲阜师范大学附属中学2021级高三上学期第五次教学质量检测

数学试卷

命题人：高三数学组　　审题人：高三数学组

分值：150分　　考试时间：120分钟

一、单选题（每题5分，共40分）

1. 已知集合$A=\{x|-3<x<1\}$，$B=\{x|-2<x\le 4\}$，则$A\cup B=$（　　）

A. $\{x|-3<x<-2\}$　　B. $\{x|-2<x<1\}$

C. $\{x|1<x<4\}$　　D. $\{x|-3<x\le 4\}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用并集概念进行求解.

【详解】$A\cup B=\{x|-3<x<1\}\cup\{x|-2<x\le 4\}=\{x|-3<x\le 4\}$.

故选：D

2. 已知复数z满足$(z+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$，则$z$的共轭复数$\overline{z}=$（　　）

A. $2-\mathrm{i}$　　B. $2+\mathrm{i}$　　C. $-2+\mathrm{i}$　　D. $-2-\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数的四则运算化简复数z，利用共轭复数的定义可得结果.

【详解】因为$(z+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$，则$z=\dfrac{5}{2-\mathrm{i}}-2\mathrm{i}=\dfrac{5(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}-2\mathrm{i}=2+\mathrm{i}-2\mathrm{i}=2-\mathrm{i}$，

所以，$\overline{z}=2+\mathrm{i}$.

故选：B.

3. 以点$\left(\dfrac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$为对称中心的函数是（　　）.

A. $y=\sin x$　　B. $y=\cos x$

C. $y=\tan x$　　D. $y=|\tan x|$

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角函数的对称性依次判定.

【详解】对于 A 选项，对称中心为$\left(k\pi,0\right)(k\in\mathbf{Z})$，故不选 A;

对于 B 选项，对称中心为$\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi,0\right)(k\in\mathbf{Z})$，故不选 B;

对于 C 选项，对称中心为$\left(\dfrac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，故 C 选项正确;

对于 D 选项，不是中心对称图形，故不选 D.

故选：C.

4. 在$\triangle ABC$中，点M是边AC上靠近点 A 的三等分点，点N是BC的中点，若$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$x+y=$（　　）

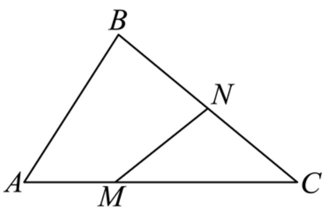
A. 1　　　　B. $\dfrac{2}{3}$　　　　C. $-\dfrac{2}{3}$　　　　D. -1

【答案】B

【解析】

【分析】根据平面向量的基本定理和线性运算即可求解.

【详解】点M是边AC上靠近点 A 的三等分点，点N是BC的中点，如图所示，

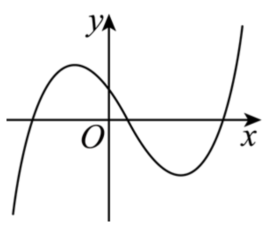


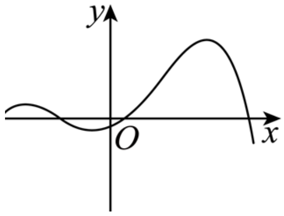
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

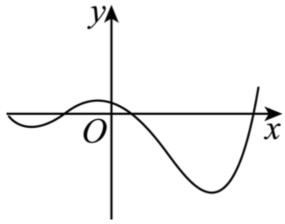
所以$x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{6},x+y=\dfrac{2}{3}$.

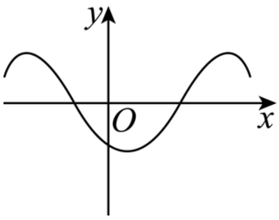
故选：B.

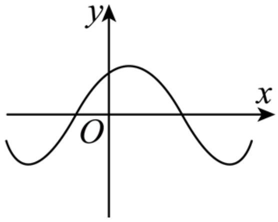
5. 函数$y=f(x)$的导函数$y=f'(x)$的图象如图所示，则函数$y=f(x)$的图象可能是（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】

【详解】原函数先减再增，再减再增，且 $x=0$ 位于增区间内，因此选 D.

【名师点睛】本题主要考查导数图象与原函数图象的关系：若导函数图象与 x 轴的交点为 x_0，且图象在 x_0 两侧附近连续分布于 x 轴上下方，则 x_0 为原函数单调性的拐点，运用导数知识来讨论函数单调性时，由导函数 $f'(x)$ 的正负，得出原函数 $f(x)$ 的单调区间.

6. 过点 $P(-1,3\sqrt{3})$ 作圆 $C: x^2+y^2-4x-5=0$ 的两条切线，切点分别为 A,B，则劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度是（　　）

A. 2π　　B. $\dfrac{3\pi}{2}$　　C. $\dfrac{4\pi}{3}$　　D. π

【答案】A

【解析】

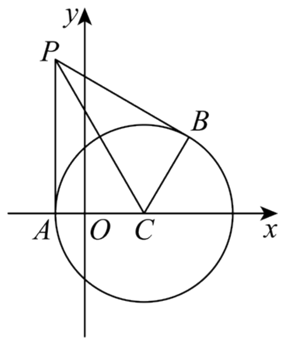
【分析】应用点到圆心的距离结合切线的几何性质，可得劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角，进而可求.

【详解】$C: x^2+y^2-4x-5=0$，即 $(x-2)^2+y^2=9$，则圆心 $C(2,0)$，$r=3$，

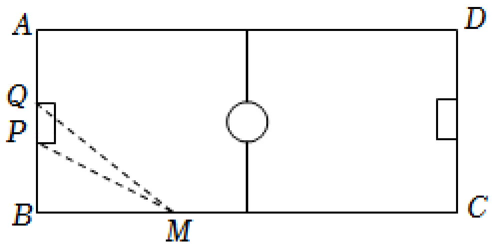
则 $|PC|=\sqrt{(2+1)^2+(0-3\sqrt{3})^2}=6$，则 $\mathrm{Rt}\triangle PCA$ 中，$\cos\angle PCA=\dfrac{r}{|PC|}=\dfrac{1}{2}$，

则 $\angle PCA=\dfrac{\pi}{3}, \therefore \angle BCA=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{2\pi}{3}\cdot 3=2\pi$.

故选：A.



7. 在足球比赛中，球员在对方球门前的不同的位置起脚射门对球门的威胁是不同的，出球点对球门的张角越大，射门的命中率就越高.如图为室内5人制足球场示意图，设球场（矩形）长BC大约为40米，宽AB大约为20米，球门长PQ大约为4米.在某场比赛中有一位球员欲在边线BC上某点M处射门（假设球贴地直线运行），为使得张角$\angle PMQ$最大，则BM大约为（　　）（精确到1米）



A. 8米　　B. 9米　　C. 10米　　D. 11米

【答案】C

【解析】

【分析】利用$\tan\angle PMQ=\tan\left(\angle QMB-\angle PMB\right)$表示出$\tan\angle PMQ$，再结合基本不等式求解.

【详解】由题意知，$PB=8,QB=12$，设$\angle PMB=\alpha,\angle QMB=\beta,BM=x$，则

$\tan\alpha=\dfrac{8}{x},\tan\beta=\dfrac{12}{x}$，所以

$\tan\angle PMQ=\tan\left(\beta-\alpha\right)=\dfrac{\dfrac{12}{x}-\dfrac{8}{x}}{1+\dfrac{12}{x}\cdot\dfrac{8}{x}}=\dfrac{4x}{x^2+96}=\dfrac{4}{x+\dfrac{96}{x}}\le\dfrac{4}{2\sqrt{x\cdot\dfrac{96}{x}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$，当且仅当$x=\dfrac{96}{x}$，即

$x=\sqrt{96}$时取等号，又因为$\sqrt{96}\approx10$，所以BM大约为10米.

故选：C.

8. 已知正方体每条棱所在直线与平面α所成角相等，平面α截此正方体所得截面边数最多时，截面的面积为S，周长为l，则（　　）

A. S不为定值，l为定值

B. S为定值，l不为定值

C. S与l均为定值

D. S与l均不为定值

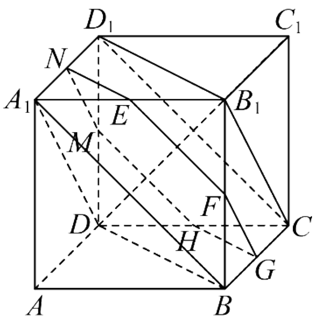
【答案】A

【解析】

【分析】利用正方体棱的关系，判断平面α所成的角都相等的位置，可知截面边数最多时为六边形，如图所示，可计算出周长为定值，计算正三角形A_1DB的面积和截面为正六边形时的截面面积通过比较即可得答案.

【详解】正方体的所有棱中，实际上是3组平行的棱，每条棱所在直线与平面α所成的角都相等，

如图：与面A_1BD平行的面且截面是六边形时满足条件，不失一般性设正方体边长为1，



可得平面α与其他各面的交线都与此平面的对角线平行，即$EF//A_1B$等

设$\frac{EF}{A_1B}=\lambda$，则$\frac{B_1E}{A_1B_1}=B_1E=\lambda$，$\therefore\frac{NE}{B_1D_1}=\frac{A_1E}{A_1B_1}=1-\lambda$，

$\therefore EF+NE=\sqrt{2}\lambda+\sqrt{2}\left(1-\lambda\right)=\sqrt{2}$，同理可得六边形其他相邻两边的和为$\sqrt{2}$，

$\therefore$六边形的周长l为定值$3\sqrt{2}$.

正三角形A_1DB的面积为$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

如上图，当$MNEFGH$均为中点时，六边形的边长相等即截面为正六边形时截面面积最大，截面面积为

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，所以截面从$A_1DB$平移到$B_1CD_1$的过程中，截面面积的变化过程是由小到大，再由大到小，

故可得周长l为定值，面积S不为定值，

故选：A.

二、多选题（每题5分，漏选2分，共20分）

9. 若m，n为空间中两条不同的直线，α，β，γ为空间三个不同的平面，则下列结论正确的是（　　）

A. 若$\alpha \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$，则$\alpha // \beta$

B. 若$m \perp \alpha$，$m // \beta$，则$\alpha \perp \beta$

C. 若$m // \alpha$，$n \perp \alpha$，则$m \perp n$

D. 若$\alpha // \beta$，$m // \alpha$，$n \subset \beta$，则$m // n$

【答案】BC

【解析】

【分析】由点、线、面的位置关系对选项一一判断即可得出答案.

【详解】对于 A，若$\alpha \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$，则可能$\alpha \perp \beta$，故 A 错误；

对于 B，因为$m // \beta$，则能在β内找一条直线b，使得$b // m$，

因为$m \perp \alpha$，则$b \perp \alpha$，因为$b \subset \beta$，由面面垂直的判定定理可得$\alpha \perp \beta$，故 B 正确；

对于 C，若$m // \alpha$，则能在α内找一条直线c，使得$c // m$，

$n \perp \alpha$，$c \subset \alpha$，则$m \perp c$，又因为$c // m$，所以$m \perp n$，故 C 正确；

对于 D，若$\alpha // \beta$，$m // \alpha$，$n \subset \beta$，则m,n可能异面，故 D 错误.

故选：BC.

10. 下列说法正确的是（　　）

A. “$a > b$”是“$a^2 > b^2$”的既不充分也不必要条件

B. $y = \log_2\left(-x^2 + \frac{1}{4}\right)$的最大值为$-2$

C. 若$\cos^2\alpha + \sin^2\beta = 1$，则$\alpha = \beta$

D. 命题“$\forall x \in (0, +\infty)$，$x + \frac{1}{x} > 1$”的否定是“$\forall x \in (0, +\infty)$，$x + \frac{1}{x} \leqslant 1$”

【答案】AB

【解析】

【分析】利用特殊值判断 A，根据对数函数的性质判断 B，利用平方关系及诱导公式判断 C，根据含有一个量词命题的否定判断 D.

【详解】对于 A：若$a = 0$，$b = -1$，满足$a > b$，但是$a^2 < b^2$，故充分性不成立，

若$a = -1$，$b = 0$，满足$a^2 > b^2$，但是$a < b$，故必要性不成立，

即“$a > b$”是“$a^2 > b^2$”的既不充分也不必要条件，故 A 正确；

对于 B：由$-x^2+\frac{1}{4}>0$，解得$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$，所以函数$y=\log_2\left(-x^2+\frac{1}{4}\right)$的定义域为$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

又$0<-x^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$，所以当$x=0$时函数$y=\log_2\left(-x^2+\frac{1}{4}\right)$取得最大值，且$y_{\max}=\log_2\frac{1}{4}=-2$，故 B 正确；

对于 C：因为$\cos^2\alpha+\sin^2\beta=1$，又$\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，所以$\cos^2\alpha=\cos^2\beta$，

所以$\beta=\alpha+k\pi$，$k\in Z$，故 C 错误；

对于 D：命题"$\forall x\in(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}>1$"的否定是"$\exists x\in(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}\leqslant 1$"，故 D 错误；

故选：AB

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数$f(x)$和$g(x)$，$g'(x)$是$g(x)$的导函数且定义域为 $\mathbf{R}$.若$g(x)$为偶函数，$f(x)+g'(x)-5=0$，$f(x)-g'(4-x)-5=0$，则下列选项正确的是（　　）

A. $f(4)=5$　　　　B. $g'(-4)=1$

C. $f(1)+f(3)=10$　　　　D. $g'(-2)+f(2)=10$

【答案】AC

【解析】

【分析】根据题意，先利用求导证明$g'(x)$为奇函数，再证明其还为周期为 4 的函数，再通过合理赋值可一一核对各选项的对错.

【详解】因为$g(x)$为偶函数，则$g(-x)=g(x)$，两边求导得$-g'(-x)=g'(x)$，

所以$g'(x)$为奇函数，因为$f(x)+g'(x)-5=0$，$f(x)-g'(4-x)-5=0$，

所以$f(x)-5=-g'(x)=g'(4-x)$，故$g'(-x)=g'(4-x)$，所以$g'(x)=g'(4+x)$，

即$g'(x)$的周期$T=4$且$g'(0)=g'(4)=0$，则$g'(-4)=g(0)=0$，故 B 错误；

在$f(x)+g'(x)-5=0$，$f(x)-g'(4-x)-5=0$中，

令$x=4$，可得$f(4)+g'(4)-5=0$，所以$f(4)=5$，故 A 正确；

由$f(x)-5=-g'(x)=g'(4-x)$，令$x=2$，可得$g'(2)=-g'(2)$，则$g'(-2)=g'(2)=0$，则

$f(2)-5=0$，即$f(2)=5$，

所以 $g'(-2)+f(2)=5$，故 D 错误；

在 $f(x)+g'(x)-5=0$ 中，令 $x=1$ 得，$f(1)+g'(1)-5=0$，

在 $f(x)-g'(4-x)-5=0$ 中，令 $x=3$ 得，$f(3)-g'(1)-5=0$，

两式相加得 $f(1)+f(3)-10=0$，即 $f(1)+f(3)=10$，故 C 正确.

故选：AC.

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M，N 分别为 AB，CC_1 的中点，P 为正方体的内切球 O 上任意一点，则（　　）

A. 球 O 被 MN 截得的弦长为 $\sqrt{2}$

B. $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的范围为 $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

C. AP 与 A_1C_1 所成角的范围是 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$

D. 球 O 被四面体 ACB_1D_1 表面截得的截面面积为 $\dfrac{8}{3}\pi$

【答案】ABD

【解析】

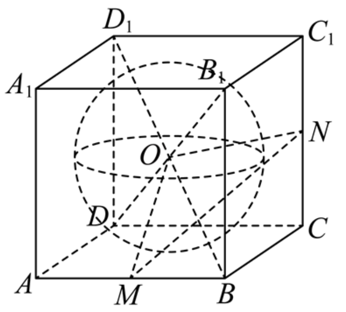
【分析】对于 A，利用对称性以及球心到端点 M,N 的距离，再结合余弦定理可计算得弦长为 $\sqrt{2}$，从而可判断出选项 A 的正误；

对于 B，利用向量运算可得 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\sqrt{2}\cos\langle\overrightarrow{PO},\overrightarrow{OG}\rangle$，即可求得其范围为 $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，从而可判断出选项 B 的正误；

对于 C，截取截面 AA_1C_1C 可知，当 AP 与球 O 相切时，AP 与 A_1C_1 所成的最大 θ 满足 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，可得 $\theta>\dfrac{\pi}{3}$，从而可判断出选项 C 的正误；

对于 D，求得球心到正四面体 ACB_1D_1 表面的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，可得四个相同截面圆的半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，即可得截面面积为 $\dfrac{8}{3}\pi$，从而可得出选项 D 正确.

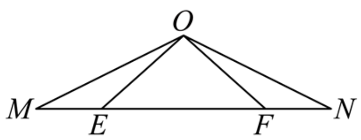
【详解】如图所示，



对于选项 A，易知内切球O的半径$R=1$，且球心在正方体的中心，易得$OM=ON=\sqrt{2}$，

设球O被MN截得的弦长为EF，在$\mathrm{Rt}\triangle MCN$中，易得$MN=\sqrt{NC^2+MC^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$，

如下图所示，在$\triangle OMN$中，



由对称性可知，$OE=OF=1$，且$ME=NF$，由余弦定理知$\cos\angle OMN=\dfrac{2+6-2}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

在$\triangle OME$中，$\cos\angle OME=\dfrac{2+ME^2-1}{2\times\sqrt{2}\times ME}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得$ME=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$或$ME=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}>\dfrac{\sqrt{6}}{2}$（舍），

则弦长$EF=MN-2ME=\sqrt{2}$，所以选项 A 正确；

对于选项 B，不妨设M,N的中点为Q，

则$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON})=\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$，

由选项 A 知，$\sin\angle OMN=\sqrt{1-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{1}{2}$，$\angle MON=\dfrac{2\pi}{3}$，所以$OQ=OM\sin\angle OMN=\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cos 120^\circ=-1$，

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PO}^2+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1+2\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\overrightarrow{PO},\overrightarrow{OQ}-1=\sqrt{2}\cos\overrightarrow{PO},\overrightarrow{OQ}$，

当$\overrightarrow{PO},\overrightarrow{OQ}$共线同向时，$(\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN})_{\max}=\sqrt{2}\cos 0^\circ=\sqrt{2}$，

当$\overrightarrow{PO},\overrightarrow{OQ}$共线反向时，$(\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN})_{\min}=\sqrt{2}\cos 180^\circ=-\sqrt{2}$，

所以，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$的范围为$\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，即选项 B 正确；

对于选项 C，易知当A,P,C三点共线时，AP与A_1C_1所成的角最小为0°，