

2023-2024 学年广东省韶关市新丰县第一中学高三下摸底统一考试数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 从 5 名学生中选出 4 名分别参加数学, 物理, 化学, 生物四科竞赛, 其中甲不能参加生物竞赛, 则不同的参赛方案种数为

- A. 48 B. 72 C. 90 D. 96

2. 下列判断错误的是()

A. 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, $P(\xi \leq 4) = 0.78$, 则 $P(\xi \leq -2) = 0.22$

B. 已知直线 $l \perp$ 平面 α , 直线 $m //$ 平面 β , 则“ $\alpha // \beta$ ”是“ $l \perp m$ ”的充分不必要条件

C. 若随机变量 ξ 服从二项分布: $\xi: B\left(4, \frac{1}{4}\right)$, 则 $E(\xi) = 1$

D. $am > bm$ 是 $a > b$ 的充分不必要条件

3. 关于函数 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 的单调性, 下列叙述正确的是 ()

- A. 单调递增 B. 单调递减 C. 先递减后递增 D. 先递增后递减

4. 已知实数 $a > 0$, $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x < 1 \\ x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 R 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $1 < a \leq 2$ B. $a < 5$ C. $3 < a < 5$ D. $2 \leq a \leq 5$

5. 复数 $z = \frac{2+i}{1-i}$, i 是虚数单位, 则下列结论正确的是

- A. $|z| = \sqrt{5}$ B. z 的共轭复数为 $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
- C. z 的实部与虚部之和为 1 D. z 在复平面内的对应点位于第一象限

6. 在 $\begin{cases} 2x - y - 6 \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ 条件下, 目标函数 $z = ax + by$ ($a > 0, b > 0$) 的最大值为 40, 则 $\frac{5}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 2

- A. $i \leq 5$ B. $i \leq 6$ C. $i \leq 7$ D. $i \leq 8$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.（5 分）已知 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})=-\frac{4}{5}$ ，且 $\alpha \in (-\frac{\pi}{2},0)$ ，则 $2\cos^2\alpha+\sqrt{2}\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})$ 的值是_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ ，则 $\cos C$ 的最小值是_____.

15. 设变量 x ， y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+2\leq 0 \\ x+2y-4\geq 0 \\ y-3\leq 0 \end{cases}$ ，则目标函数 $z=x-2y$ 的最小值为_____.

16. 已知函数 $f(x)=a\ln(2x)-e^{\frac{2x}{e}}$ 有且只有一个零点，则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1=1$ ， $a_2=3$ ，且 $a_{n+2}=(-1)^n(a_n-1)+2a_n+1$ ， $n\in N^*$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$ ， S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求证： $S_n<\frac{2^n-n}{2^n+1}$.

18.（12 分）某大型单位举行了一次全体员工都参加的考试，从中随机抽取了 20 人的分数.以下茎叶图记录了他们的考试分数（以十位数字为茎，个位数字为叶）：

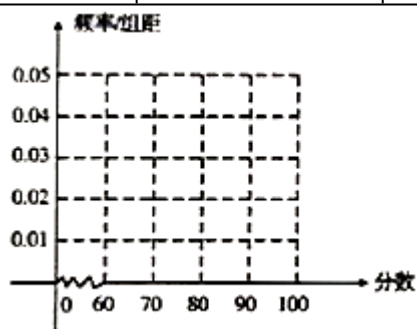


若分数不低于 95 分，则称该员工的成绩为“优秀”.

- (1) 从这 20 人中任取 3 人，求恰有 1 人成绩“优秀”的概率；
- (2) 根据这 20 人的分数补全下方的频率分布表和频率分布直方图，并根据频率分布直方图解决下面的问题.

组别	分组	频数	频率	$\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$
1	[60,70)			
2	[70,80)			
3	[80,90)			

4	[90,100]			
---	----------	--	--	--



- ①估计所有员工的平均分数（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；
 ②若从所有员工中任选3人，记 X 表示抽到的员工成绩为“优秀”的人数，求 X 的分布列和数学期望。

19. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足， $a_1 = 2$ ， $b_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 2a_n$ ($n \in N^*$)，

$$b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \dots + \frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - 1 \quad (n \in N^*).$$

(I) 求 a_n 与 b_n ；

(II) 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{b_n b_{n+2}}, & n \text{ 为奇数}, \\ -\frac{1}{a_n}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ ，若对 $n \in N^*$ ， $T_{2n} \geq T_{2k}$ 恒成立，求正整数 k 的值。

20. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{x-1}{ae^x} - 1$ ($a \in R, a \neq 0$)。

(1) 当 $a = 1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(2) 若函数 $f(x)$ 没有零点，求实数 a 的取值范围。

21. (12分) 已知 $f(x) = e^x - mx$ 。

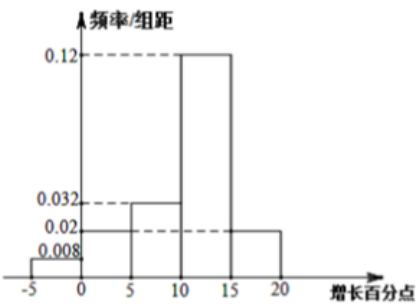
(1) 若曲线 $y = \ln x$ 在点 $(e^2, 2)$ 处的切线也与曲线 $y = f(x)$ 相切，求实数 m 的值；

(2) 试讨论函数 $f(x)$ 零点的个数。

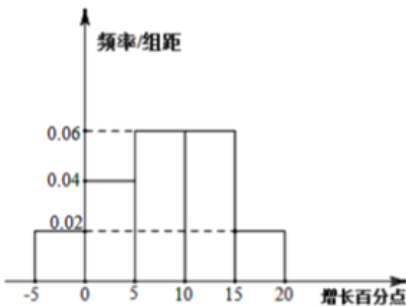
22. (10分) 新型冠状病毒肺炎疫情发生以来，电子购物平台成为人们的热门选择。为提高市场销售业绩，某公司设计了一套产品促销方案，并在某地区部分营销网点进行试点。运作一年后，对“采用促销”和“没有采用促销”的营销网点各选取了50个，对比上一年度的销售情况，分别统计了它们的年销售总额，并按年销售总额增长的百分点分成5组：

$[-5, 0)$, $[0, 5)$, $[5, 10)$, $[10, 15)$, $[15, 20]$ ，分别统计后制成如图所示的频率分布直方图，并规定年销售总额增长10个百分点及以上的营销网点为“精英店”。

“采用促销”的销售网点



“没有采用促销”的销售网点



(1) 请你根据题中信息填充下面的列联表，并判断是否有的把握认为“精英店与采用促销活动有关”；

	采用促销	没有采用促销	合计
精英店			
非精英店			
合计	50	50	100

(2) 某“精英店”为了创造更大的利润，通过分析上一年度的售价 x_i (单位：元)和日销量 y_i (单位：件) ($i = 1, 2, \dots, 10$)

的一组数据后决定选择 $y = a + bx^2$ 作为回归模型进行拟合.具体数据如下表，表中的 $w_i = x_i^2$ ：

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^{10} (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
45.8	395.5	2413.5	4.6	21.6	- 2.3	-7.2

①根据上表数据计算 a, b 的值；

②已知该公司成本为 10 元/件，促销费用平均 5 元/件，根据所求出的回归模型，分析售价 x 定为多少时日利润 z 可以达到最大.

附①：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

附②： 对应一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), \dots, (u_n, v_n)$ ，其回归直线 $v = \alpha + \beta u$

的斜率和截距的最小二乘法估计分别为 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (v_i - \bar{v})(u_i - \bar{u})}{\sum_{i=1}^{10} (u_i - \bar{u})^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

因甲不参加生物竞赛，则安排甲参加另外 3 场比赛或甲学生不参加任何比赛

①当甲参加另外 3 场比赛时，共有 $C_3^1 \cdot A_4^3 = 72$ 种选择方案；②当甲学生不参加任何比赛时，共有 $A_4^4 = 24$ 种选择方案。综上所述，所有参赛方案有 $72+24=96$ 种

故答案为：96

点睛：本题以选择学生参加比赛为载体，考查了分类计数原理、排列数与组合数公式等知识，属于基础题。

2、D

【解析】

根据正态分布、空间中点线面的位置关系、充分条件与必要条件的判断、二项分布及不等式的性质等知识，依次对四个选项加以分析判断，进而可求解。

【详解】

对于 A 选项，若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, $P(\xi \leq 4) = 0.78$ ，根据正态分布曲线的对称性，有

$P(\xi \leq -2) = P(\xi \geq 4) = 1 - P(\xi \leq 4) = 1 - 0.78 = 0.22$ ，故 A 选项正确，不符合题意；

对于 B 选项，已知直线 $l \perp$ 平面 α ，直线 $m \parallel$ 平面 β ，则当 $\alpha \parallel \beta$ 时一定有 $l \perp m$ ，充分性成立，而当 $l \perp m$ 时，不一定有 $\alpha \parallel \beta$ ，故必要性不成立，所以“ $\alpha \parallel \beta$ ”是“ $l \perp m$ ”的充分不必要条件，故 B 选项正确，不符合题意；

对于 C 选项，若随机变量 ξ 服从二项分布： $\xi \sim B\left(4, \frac{1}{4}\right)$ ，则 $E(\xi) = np = 4 \times \frac{1}{4} = 1$ ，故 C 选项正确，不符合题意；

对于 D 选项，Q $am > bm$ ，仅当 $m > 0$ 时有 $a > b$ ，当 $m < 0$ 时， $a > b$ 不成立，故充分性不成立；若 $a > b$ ，仅当 $m > 0$

时有 $am > bm$ ，当 $m < 0$ 时， $am > bm$ 不成立，故必要性不成立。

因而 $am > bm$ 是 $a > b$ 的既不充分也不必要条件，故 D 选项不正确，符合题意。

故选：D

【点睛】

本题考查正态分布、空间中点线面的位置关系、充分条件与必要条件的判断、二项分布及不等式的性质等知识，考查理解辨析能力与运算求解能力，属于基础题。

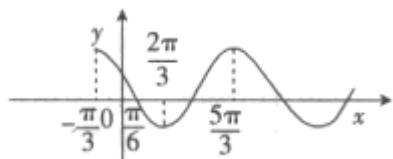
3、C

【解析】

先用诱导公式得 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，再根据函数图像平移的方法求解即可。

【详解】

函数 $f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可由 $y = \cos x$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到，如图所示， $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上先递减后递增。



故选：C

【点睛】

本题考查三角函数的平移与单调性的求解，属于基础题。

4、D

【解析】

根据题意，对于函数分 2 段分析：当 $x < 1$ ， $f(x) = a^x$ ，由指数函数的性质分析可得 $a > 1$ ①，当

$x \geq 1$ ， $f(x) = x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x$ ，由导数与函数单调性的关系可得 $f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2} + \frac{a}{x} \geq 0$ ，在 $[1, +\infty)$ 上恒成立，变形可得 $a \geq 2$ ②，再结合函数的单调性，分析可得 $a \leq 1 + 4$ ③，联立三个式子，分析可得答案。

【详解】

解：根据题意，函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x < 1 \\ x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 R 上单调递增，

当 $x < 1$ ， $f(x) = a^x$ ，若 $f(x)$ 为增函数，则 $a > 1$

①,

当 $x \geq 1$, $f(x) = x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x$,

若 $f(x)$ 为增函数, 必有 $f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2} + \frac{a}{x} \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

变形可得: $a \geq \frac{4}{x} - 2x^2$,

又由 $x \geq 1$, 可得 $g(x) = \frac{4}{x} - 2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $\frac{4}{x} - 2x^2 \leq \frac{4}{1} - 2 = 2$,

若 $a \geq \frac{4}{x} - 2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 则有 $a \geq 2$ ②,

若函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增, 左边一段函数的最大值不能大于右边一段函数的最小值,

则需有 $a \leq 1 + 4 = 5$, ③

联立①②③可得: $2 \leq a \leq 5$.

故选: D.

【点睛】

本题考查函数单调性的性质以及应用, 注意分段函数单调性的性质.

5、D

【解析】

利用复数的四则运算, 求得 $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, 在根据复数的模, 复数与共轭复数的概念等即可得到结论.

【详解】

由题意 $z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+3i}{1-i^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$,

则 $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$, z 的共轭复数为 $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$,

复数 z 的实部与虚部之和为 2, z 在复平面内对应点位于第一象限, 故选 D.

【点睛】

复数代数形式的加减乘除运算的法则是进行复数运算的理论依据, 加减运算类似于多项式的合并同类项, 乘法法则类似于多项式乘法法则, 除法运算则先将除式写成分式的形式, 再将分母实数化, 其次要熟悉复数相关基本概念, 如复数 $a+bi$ ($a, b \in R$) 的实部为 a 、虚部为 b 、模为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 、对应点为 (a, b) 、共轭为 $a-bi$.

6、B

【解析】

画出可行域和目标函数, 根据平移得到最值点, 再利用均值不等式得到答案.

【详解】

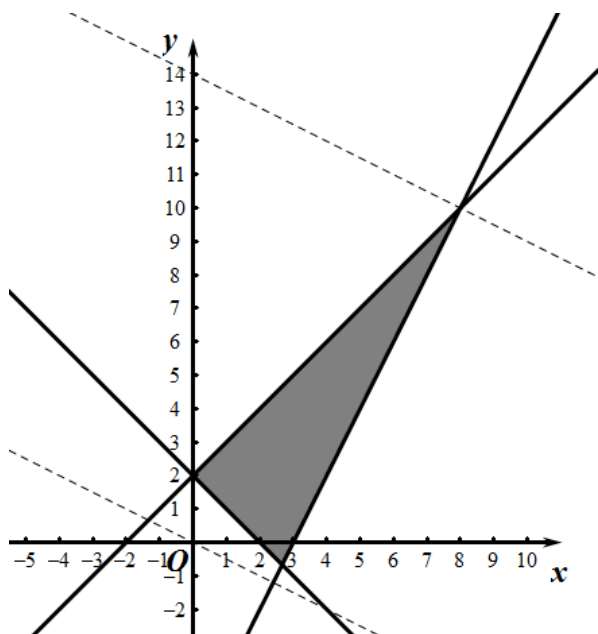
如图所示，画出可行域和目标函数，根据图像知：

当 $x=8, y=10$ 时， $z=8a+10b$ 有最大值为 40，即 $z=8a+10b=40$ ，故 $4a+5b=20$ 。

$$\frac{5}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{20} \left(\frac{5}{a} + \frac{1}{b} \right) (4a+5b) = \frac{1}{20} \left(25 + \frac{25b}{a} + \frac{4a}{b} \right) \geq \frac{1}{20} (25 + 2\sqrt{100}) = \frac{9}{4}.$$

当 $\frac{25b}{a} = \frac{4a}{b}$ ，即 $a = \frac{10}{3}, b = \frac{4}{3}$ 时等号成立。

故选：B。



【点睛】

本题考查了线性规划中根据最值求参数，均值不等式，意在考查学生的综合应用能力。

7、D

【解析】

先根据向量坐标运算求出 $\vec{u} + \vec{v} = (3, \sqrt{3})$ 和 $\cos \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$ ，进而求出 $\sin \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$ ，代入题中给的定义即可求解。

【详解】

由题意 $\vec{v} = \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) = (1, \sqrt{3})$ ，则 $\vec{u} + \vec{v} = (3, \sqrt{3})$ ， $\cos \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，得 $\sin \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}$ ，由定义知

$$\left| \vec{r} \times (\vec{u} + \vec{v}) \right| = |\vec{r}| \cdot |\vec{u} + \vec{v}| \sin \langle \vec{r}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3},$$

故选：D。

【点睛】

此题考查向量的坐标运算，引入新定义，属于简单题目。

8、C

【解析】

求出函数定义域，在定义域内确定函数的单调性，利用单调性解不等式.

【详解】

由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 得 $-1 < x < 1$,

在 $x \in (-1, 1)$ 时, $y = x^3$ 是增函数, $y = \sin x$ 是增函数, $y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(-1 + \frac{2}{1-x})$ 是增函数, $\therefore$

$f(x) = x^3 + \sin x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 是增函数,

$\therefore$ 由 $f(2a-1) > f(0)$ 得 $0 < 2a-1 < 1$, 解得 $\frac{1}{2} < a < 1$.

故选: C.

【点睛】

本题考查函数的单调性, 考查解函数不等式, 解题关键是确定函数的单调性, 解题时可先确定函数定义域, 在定义域内求解.

9、A

【解析】

由已知先确定出双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 再分别找到 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形的两种情况, 最后再结合

$|PF_1| - |PF_2| = 2$ 即可解决.

【详解】

由已知可得 $2a = 2$, $\frac{c}{a} = 2$, 所以 $a = 1, c = 2, b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$, 从而双曲线方程为

$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 不妨设点 P 在双曲线 C 右支上运动, 则 $|PF_1| - |PF_2| = 2$, 当 $|PF_1| \perp |PF_2|$ 时,

此时 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 16 = (|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1||PF_2|$, 所以 $|PF_1||PF_2| = 6$,

$(|PF_1| + |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1||PF_2| = 28$, 所以 $|PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{7}$;

当 $|PF_2| \perp x$ 轴时, $|PF_1|^2 = |PF_2|^2 + 16$, 所以 $|PF_1| + |PF_2| = \frac{16}{2} = 8$, 又 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三

角形, 所以 $|PF_1| + |PF_2| \in (2\sqrt{7}, 8)$.

故选: A.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/117062035033006161>