

2023-2024 学年贵州省安顺市平坝区集圣中学高三数学试题二模试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $f(x) = 4 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期是 3π ，则其图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的函数的一条对称轴是 ()

- A. $x = \frac{\pi}{4}$ B. $x = \frac{\pi}{3}$ C. $x = \frac{5\pi}{6}$ D. $x = \frac{19\pi}{12}$

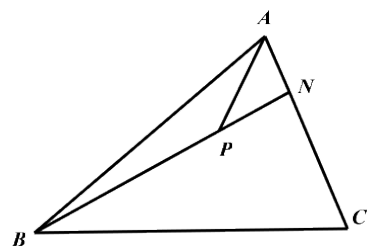
2. 已知复数 $z = \frac{(2+ai)i}{1-i}$ 是纯虚数，其中 a 是实数，则 z 等于 ()

- A. $2i$ B. $-2i$ C. i D. $-i$

3. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ ，则与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为 ()

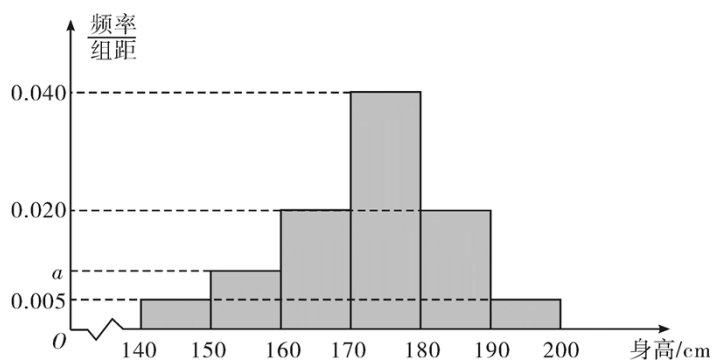
- A. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ ， P 是 BN 上的一点，若 $m\vec{AC} = \vec{AP} - \frac{2}{3}\vec{AB}$ ，则实数 m 的值为 ()



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{9}$ C. 1 D. 2

5. 从某市的中学生中随机调查了部分男生，获得了他们的身高数据，整理得到如下频率分布直方图：



根据频率分布直方图，可知这部分男生的身高的中位数的估计值为

- A. 171.25cm B. 172.75cm
C. 173.75cm D. 175cm

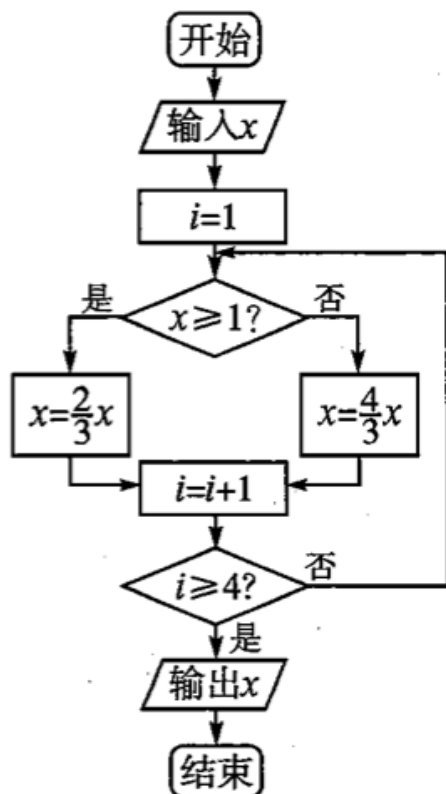
6. 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\cos x|$ 有下述四个结论：()

- ① $f(x)$ 是偶函数； ② $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上是单调递增函数；
③ $f(x)$ 在 R 上的最大值为 2； ④ $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点.

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ①②④ B. ①③ C. ①④ D. ②④

7. 相传黄帝时代，在制定乐律时，用“三分损益”的方法得到不同的竹管，吹出不同的音调．如图的程序是与“三分损益”结合的计算过程，若输入的 x 的值为 1，输出的 x 的值为 ()



- A. $\frac{64}{81}$ B. $\frac{32}{27}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{16}{27}$

8. 斜率为 1 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 A、B 两点，则 $|AB|$ 的最大值为 ()

- A. 2 B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

9. 设 $S = \{x | 2x + 1 > 0\}$, $T = \{x | 3x - 5 < 0\}$, 则 $S \cap T =$ ()

- A. $\emptyset$ B. $\{x | x < -\frac{1}{2}\}$ C. $\{x | x > \frac{5}{3}\}$ D. $\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{3}\}$

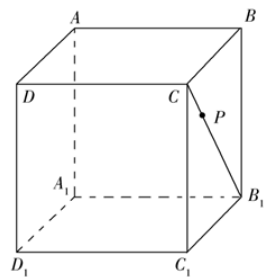
10. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{x | 3 < x < 4\}$ B. $\{x | x < 4 \text{ 或 } x > 6\}$
C. $\{x | -2 < x < -1\}$ D. $\{x | -1 < x < 4\}$

11. 设 M 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上任意一点, N 为 AM 的中点, 若 $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

12. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 P 在线段 CB_1 上, 且 $B_1P = 2PC$, 平面 α 经过点 A, P, C_1 , 则正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 被平面 α 截得的截面面积为 ()



- A. $3\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{6}$ C. 5 D. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，直角三角形 ABC 的三个顶点都在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 上，其中 A (0, 1) 为直角顶点. 若该三角形的面积的最大值为 $\frac{27}{8}$, 则实数 a 的值为_____.

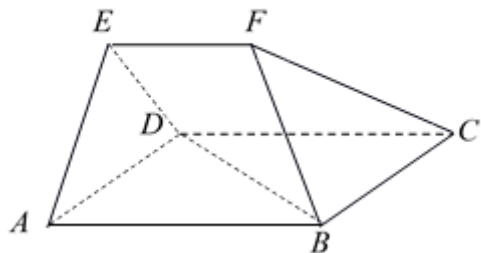
14. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是正方形 BB_1C_1C 的中心, M 为 C_1D_1 的中点, 过 A_1M 的平面 α 与直线 DE 垂直, 则平面 α 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面面积为_____.

15. 若 $a = \log_2 3, b = \log_3 2$, 则 $ab = \underline{\hspace{2cm}}, \lg a + \lg b = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知函数 $f(x) = x^2 - 4x - 4$. 若 $f(x) < 1$ 在区间 $(m-1, -2m)$ 上恒成立. 则实数 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在以 $ABCDEF$ 为顶点的五面体中，底面 $ABCD$ 为菱形， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AB = AE = ED = 2EF$ ， $EF \parallel AB$ ，二面角 $E-AD-B$ 为直二面角。



(I) 证明： $BD \perp FC$ ；

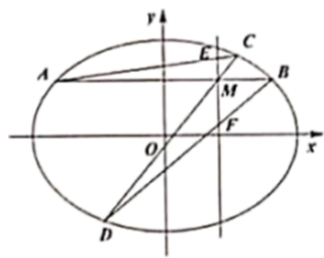
(II) 求二面角 $A-CF-B$ 的余弦值。

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2$ ，当 $x = 1$ 时，有极大值 3；

(1) 求 a, b 的值；

(2) 求函数 $f(x)$ 的极小值及单调区间。

19. (12 分) 如图，过点 $M(2, 2)$ 且平行与 x 轴的直线交椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = m (m > 0)$ 于 A, B 两点，且 $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ 。



(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 过点 M 且斜率为正的直线交椭圆于点 C, D ，直线 AC, BD 分别交直线 $x = 2$ 于点 E, F ，求证： $\frac{1}{|ME|} - \frac{1}{|MF|}$

是定值。

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = |2x - 1| + |x + 1|$

(1) 解不等式 $f(x) \geq 3$ ；

(2) 若 a 、 b 、 c 均为正实数，且满足 $a+b+c=m$ ， m 为 $f(x)$ 的最小值，求证： $\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} \geq \frac{3}{2}$ 。

21. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的各项都是正数， S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，都有

$$a_n^2 = 2S_n - a_n, \quad b_1 = e, \quad b_{n+1} = b_n^2, \quad c_n = a_n \cdot \ln b_n \quad (e \text{ 是自然对数的底数}).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

22. (10 分) 等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2, a_7 = 4a_5$ 。

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。若 $S_m = 126$ ，求 m 。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

由三角函数的周期可得 $\omega = \frac{2\pi}{3}$ ，由函数图像的变换可得，平移后得到函数解析式为 $y = 4\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{4\pi}{9}\right)$ ，再求其

对称轴方程即可。

【详解】

解：函数 $f(x) = 4\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期是 3π ，则函数 $f(x) = 4\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，经过平移后得到函数

解析式为 $y = 4\sin\left[\frac{2}{3}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 4\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{4\pi}{9}\right)$ ，由 $\frac{2}{3}x + \frac{4\pi}{9} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)，

得 $x = \frac{3}{2}k\pi + \frac{\pi}{12}$ ($k \in \mathbf{Z}$)，当 $k = 1$ 时， $x = \frac{19\pi}{12}$ 。

故选 D。

【点睛】

本题考查了正弦函数图像的性质及函数图像的平移变换，属基础题.

2、A

【解析】

对复数 z 进行化简，由于 z 为纯虚数，则化简后的复数形式中，实部为0，得到 a 的值，从而得到复数 z .

【详解】

$$z = \frac{(2+ai)i}{1-i} = \frac{-a+2i}{1+i} = \frac{(-a+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-a}{2} + \frac{a+2}{2}i$$

因为 z 为纯虚数，所以 $\frac{2-a}{2} = 0$ ，得 $a = 2$

所以 $z = 2i$.

故选 A 项

【点睛】

本题考查复数的四则运算，纯虚数的概念，属于简单题.

3、D

【解析】

根据题意得， $2\vec{a} - \vec{b} = (1, -\sqrt{3})$ 设与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为 (x, y) ，利用向量共线和单位向量模为1，列式求出 x, y 即可得出答案.

【详解】

因为 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ ，则 $2\vec{a} = (2, 0)$ ，

所以 $2\vec{a} - \vec{b} = (1, -\sqrt{3})$ ，

设与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为 (x, y) ，

$$\text{则} \begin{cases} -\sqrt{3}x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

所以与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线的单位向量为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

故选：D.

【点睛】

本题考查向量的坐标运算以及共线定理和单位向量的定义.

4、B

【解析】

$\vec{mAC} = \vec{AP} - \frac{2}{3}\vec{AB}$ 变形为 $\vec{AP} = m\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB}$, 由 $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ 得 $\vec{AC} = 3\vec{AN}$, 转化在 $\triangle ABN$ 中, 利用 B 、 P 、 N

三点共线可得.

【详解】

解: 依题: $\vec{AP} = m\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB} = 3m\vec{AN} + \frac{2}{3}\vec{AB}$,

又 B 、 P 、 N 三点共线,

$$\therefore 3m + \frac{2}{3} = 1, \text{ 解得 } m = \frac{1}{9}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查平面向量基本定理及用向量共线定理求参数. 思路是(1)先选择一组基底, 并运用该基底将条件和结论表示成向量的形式, 再通过向量的运算来解决. 利用向量共线定理及向量相等的条件列方程(组)求参数的值. (2)直线的向量式参数方程: A 、 P 、 B 三点共线 $\Leftrightarrow \vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$ (O 为平面内任一点, $t \in R$)

5、C

【解析】

由题可得 $(0.005 \times 2 + a + 0.020 \times 2 + 0.040) \times 10 = 1$, 解得 $a = 0.010$,

则 $(0.005 + 0.010 + 0.020) \times 10 = 0.35$, $0.35 + 0.040 \times 10 = 0.75 > 0.5$,

所以这部分男生的身高的中位数的估计值为 $170 + \frac{0.5 - 0.35}{10 \times 0.040} \times 10 = 173.75(\text{cm})$, 故选 C.

6、C

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的奇偶性、单调性、最值和零点对四个结论逐一分析, 由此得出正确结论的编号.

【详解】

$f(x)$ 的定义域为 R .

由于 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 故①正确.

由于 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) < f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上不是单调递增函数, 所以②错误.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \sin x + |\cos x| = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$,

且存在 $x = \frac{\pi}{4}$, 使 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \left|\cos \frac{\pi}{4}\right| = \sqrt{2}$.

所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq \sqrt{2}$;

由于 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $x \in \mathbf{R}$ 时 $f(x) \leq \sqrt{2}$,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 所以③错误.

依题意, $f(0) = \sin|0| + |\cos 0| = 1$, 当 $0 < x \leq 2\pi$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ \sin x - \cos x, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases},$$

所以令 $\sin x + \cos x = 0$, 解得 $x = \frac{7\pi}{4}$, 令 $\sin x - \cos x = 0$, 解得 $x = \frac{5\pi}{4}$. 所以在区间 $(0, 2\pi]$, $f(x)$ 有两个零点.

由于 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 0)$ 有两个零点. 故 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点. 所以④正确.

综上所述, 正确的结论序号为①④.

故选: C

【点睛】

本小题主要考查三角函数的奇偶性、单调性、最值和零点, 考查化归与转化的数学思想方法, 属于中档题.

7、B

【解析】

根据循环语句, 输入 $x = 1$, 执行循环语句即可计算出结果.

【详解】

输入 $x = 1$, 由题意执行循环结构程序框图, 可得:

第 1 次循环: $x = \frac{2}{3}$, $i = 2 < 4$, 不满足判断条件;

第 2 次循环: $x = \frac{8}{9}$, $i = 3 < 4$, 不满足判断条件;

第4次循环： $x = \frac{32}{27}$ ， $i = 4 \geq 4$ ，满足判断条件；输出结果 $x = \frac{32}{27}$ 。

故选：B

【点睛】

本题考查了循环语句的程序框图，求输出的结果，解答此类题目时结合循环的条件进行计算，需要注意跳出循环的判定语句，本题较为基础。

8、C

【解析】

设出直线的方程，代入椭圆方程中消去 y ，根据判别式大于 0 求得 t 的范围，进而利用弦长公式求得 $|AB|$ 的表达式，利用 t 的范围求得 $|AB|$ 的最大值。

【详解】

解：设直线 l 的方程为 $y = x + t$ ，代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，消去 y 得 $\frac{5}{4}x^2 + 2tx + t^2 - 1 = 0$ ，

由题意得 $\Delta = (2t)^2 - 1(t^2 - 1) > 0$ ，即 $t^2 < 1$ 。

弦长 $|AB| = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5-t^2}}{5} \leq \frac{4\sqrt{10}}{5}$ 。

故选：C。

【点睛】

本题主要考查了椭圆的应用，直线与椭圆的关系。常需要把直线与椭圆方程联立，利用韦达定理，判别式找到解决问题的突破口。

9、D

【解析】

集合 S ， T 是一次不等式的解集，分别求出再求交集即可

【详解】

$$Q S = \left\{ x \mid 2x + 1 > 0 \right\} = \left\{ x \mid x > -\frac{1}{2} \right\},$$

$$T = \left\{ x \mid 3x - 5 < 0 \right\} = \left\{ x \mid x < \frac{5}{3} \right\},$$

$$\text{则 } S \cap T = \left\{ x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{3} \right\}$$

故选 D

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/117066055033006161>