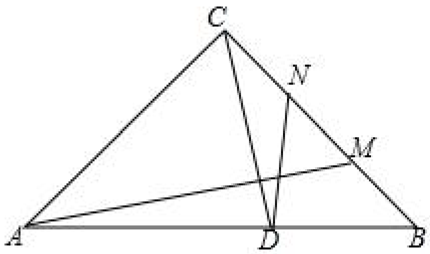
第一次月考难点特训（一）

与全等综合有关的压轴题

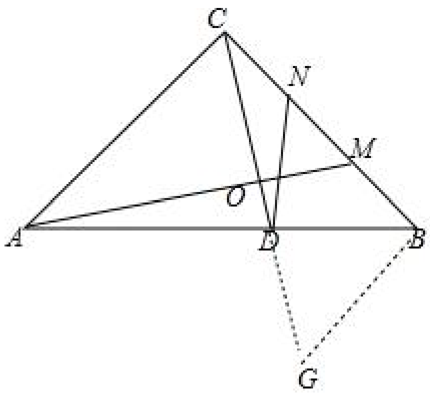
1．已知$\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\angle CAB=\angle CBA=45°$，点$M$为直线$BC$上任意一点，过点$C$作$CD\perp AM$交$AB$于点$D$，在$BC$上取一点$N$使$CN=BM$，连接$DN$

（1）如图，M、N在线段BC上，求证：$\angle AMC=\angle DNB$；

（2）若M、N分别在CB、BC的延长线上时，试画出图形，并说明（1）中的结论是否成立？



【解答】（1）证明：作$BG\perp BC$，交CD的延长线于G，AM交CD于O．



$\because AM\perp CD$，$BG\perp BC$，

$\therefore \angle AOC=\angle CBG=\angle ACM=90°$，

$\therefore \angle ACO+\angle CAO=90°$，$\angle ACO+\angle BCG=90°$，

$\therefore \angle CAM=\angle BCG$，

$\because AC=BC$，

$\therefore \triangle ACM\cong\triangle CBG$，

$\therefore CM=BG$，$\angle AMC=\angle G$，

$\because CN=BM$，

$\therefore CM=BN=BG$，

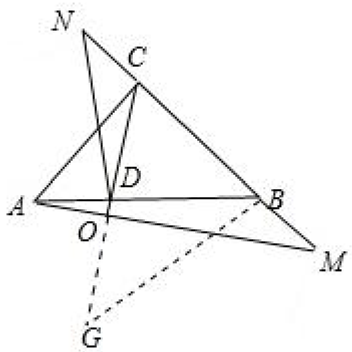
$\because BD=BD$，$\angle DBN=\angle DBG=45°$，

$\therefore \triangle DBN\cong\triangle DBG$，

∴$\angle G=\angle BND$，

∴$\angle AMC=\angle DNB$；

（2）解：（1）中的结论成立．



理由：作 $BG\perp BC$，交 CD 的延长线于 G，AM 交 CD 的延长线于 O．

∵$AM\perp CD$，$BG\perp BC$，

∴$\angle AOC=\angle CBG=\angle ACM=90°$，

∴$\angle ACO+\angle CAO=90°$，$\angle ACO+\angle BCG=90°$，

∴$\angle CAM=\angle BCG$，

∵$AC=BC$，

∴$\triangle ACM\cong\triangle CBG$，

∴$CM=BG$，$\angle M=\angle G$，

∵$CN=BN$，

∴$CN=BM=BG$，

∵$BD=BD$，$\angle DBN=\angle DBG=45°$，

∴$\triangle DBN\cong\triangle DBG$，

∴$\angle G=\angle M$，

∴$\angle M=\angle N$；

2．如图 1，点 P、Q 分别是边长为 4cm 的等边$\triangle ABC$ 边 AB、BC 上的动点，点 P 从顶点 A，点 Q 从顶点 B 同时出发，且它们的速度都为 1cm/s，

（1）连接 AQ、CP 交于点 M，则在 P、Q 运动的过程中，$\angle CMQ$ 变化吗？若变化，则说明理由，若不变，则求出它的度数；

（2）何时$\triangle PBQ$ 是直角三角形？

（3）如图 2，若点 P、Q 在运动到终点后继续在射线 AB、BC 上运动，直线 AQ、CP 交点为 M，则$\angle CMQ$ 变化吗？若变化，则说明理由，若不变，则求出它的度数．

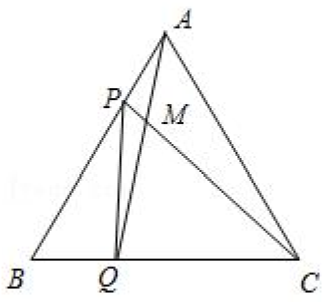


图 1

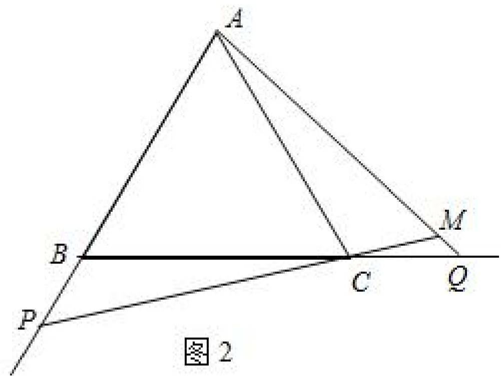


图 2

【解答】解：（1）$\angle CMQ=60°$ 不变．

∵等边三角形中，$AB=AC$，$\angle B=\angle CAP=60°$

又由条件得 $AP=BQ$，

∴$\triangle ABQ\cong\triangle CAP$（$SAS$），

∴$\angle BAQ=\angle ACP$，

∴$\angle CMQ=\angle ACP+\angle CAM=\angle BAQ+\angle CAM=\angle BAC=60°$．

（2）设时间为 t，则 $AP=BQ=t$，$PB=4-t$

①当$\angle PQB=90°$ 时，

∵$\angle B=60°$，

∴$PB=2BQ$，得 $4-t=2t$，$t=\frac{4}{3}$；

②当$\angle BPQ=90°$ 时，

∵$\angle B=60°$，

∴$BQ=2BP$，得 $t=2$（$4-t$），$t=\frac{8}{3}$；

∴当第$\frac{4}{3}$秒或第$\frac{8}{3}$秒时，$\triangle PBQ$ 为直角三角形．

（3）$\angle CMQ=120°$ 不变．

∵在等边三角形中，$BC=AC$，$\angle B=\angle CAP=60°$

∴$\angle PBC=\angle ACQ=120°$，

又由条件得 $BP=CQ$，

∴$\triangle PBC\cong\triangle QCA$（$SAS$）

.

∴∠BPC＝∠MQC

又∵∠PCB＝∠MCQ，

∴∠CMQ＝∠PBC＝180°－60°＝120°

3．如图1，△ACB为等腰直角三角形，即∠ABC＝90°，AB＝BC，∠BAC＝∠BCA＝45°．点P在线段BC上（不与B，C重合），以AP为腰长作等腰直角△PAQ，即∠PAQ＝90°，AQ＝AP，∠AQP＝∠APQ＝45°，且QE⊥AB于E．

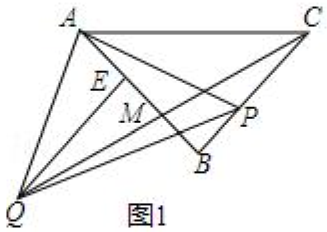


图1

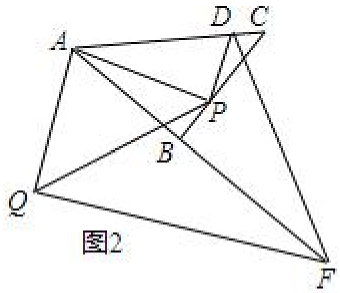


图2

（1）求证：△PAB≌△AQE；

（2）连接CQ交AB于M，若PC＝2PB，求$\frac{PC}{MB}$的值；

（3）如图2，过Q作QF⊥AQ交AB的延长线于点F，过P点作DP⊥AP交AC于D，连接DF，当点P在线段BC上运动时（不与B，C重合），式子$\frac{QF-DP}{DF}$的值会变化吗？若不变，求出该值；若变化，请说明理由．

【解答】（1）证明：∵△ACB为等腰三角形，∠ABC＝90°，点P在线段BC上（不与B，C重合），以AP为腰长作等腰直角△PAQ，QE⊥AB于E．

∴AP＝AQ，∠ABP＝∠QEA＝90°，∠QAE+∠BAP＝∠BAP+∠APB＝90°，

∴∠QAE＝∠APB，

在△PAB和△AQE中，

$$\begin{cases}\angle ABQ=\angle QEA\\ \angle QAE=\angle APB,\\ AQ=PA\end{cases}$$

∴△PAB≌△AQE（AAS）；

（2）解：∵△PAB≌△AQE，

∴AE＝PB，

∵AB＝CB，

∴QE＝CB．

在△QEM和△CBM中，

$$\begin{cases}\angle QME=\angle CMB\\ \angle QEM=\angle CBM,\\ QE=CB\end{cases}$$

∴$\triangle QEM\cong\triangle CBM$（$AAS$），

∴$ME=MB$，

∵$AB=CB$，$AE=PB$，$PC=2PB$，

∴$BE=PC$，

又∵$BE=2MB$，$PC=2MB$，

∴$\frac{PC}{MB}=2$；

（3）式子$\frac{QF-DP}{DF}$的值不会变化．

如下图2所示：作$HA\perp AC$交QF于点H，

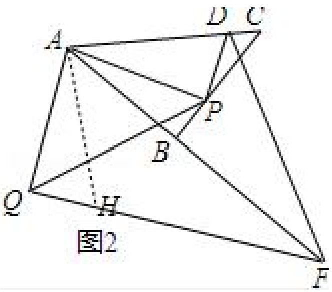


图2

∵$QA\perp AP$，$HA\perp AC$，$AP\perp PD$，

∴$\angle QAH+\angle HAP=\angle HAP+\angle PAD=90°$，$\angle AQH=\angle APD=90°$，

∴$\angle QAH=\angle PAD$，

∵$\triangle PAQ$为等腰直角三角形，

∴$AQ=AP$，

在$\triangle AQH$和$\triangle APD$中，

$$\begin{cases}\angle AQH=\angle APD\\ AQ=AP\\ \angle QAH=\angle PAD\end{cases},$$

∴$\triangle AQH\cong\triangle APD$（$ASA$），

∴$AH=AD$，$QH=PD$，

∵$HA\perp AC$，$\angle BAC=45°$，

∴$\angle HAF=\angle DAF$，

在$\triangle AHF$和$\triangle ADF$中，

$$\begin{cases} AH=AD \\ \angle HAF=\angle DAF, \\ AF=AF \end{cases}$$

∴$\triangle AHF \cong \triangle ADF$（$SAS$），

∴$HF=DF$，

∴$\frac{QF-DP}{DF}=\frac{QF-QH}{HF}=\frac{HF}{HF}=1$.

4．已知，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，过 A 任作一直线 l，作 $BD\perp l$ 于 D，$CE\perp l$ 于 E，观察三条线段 BD，CE，DE 之间的数量关系．

（1）如图 1，当 l 经过 BC 中点时，此时 BD__＝__CE；

（2）如图 2，当 l 不与线段 BC 相交时，BD，CE，DE 三者的数量关系为__$DE=BD+CE$，__，并证明你的结论．

（3）如图 3，当 l 与线段 BC 相交，交点靠近 B 点时，BD，CE，DE 三者的数量关系为__$CE-BD=DE$__．证明你的结论，并画图直接写出交点靠近 C 点时，BD，CE，DE 三者的数量关系为__$BD-CE=DE$__．

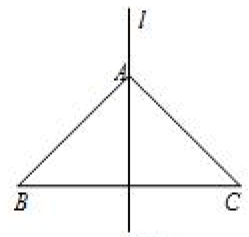


图 1

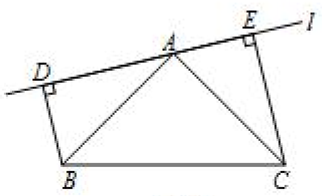


图 2

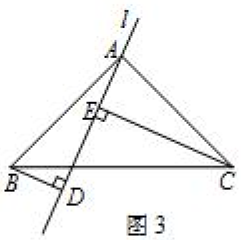
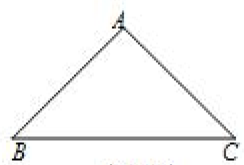


图 3



备用图

【解答】解：（1）∵$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，l 经过 BC 中点

∴直线 $l\perp BC$，

∴点 D，点 E 与 BC 的中点重合，

∴$BD=CD$

故答案为：＝

（2）如图 2：$DE=BD+CE$，

理由如下：

∵$BD\perp l$，$CE\perp l$，

$\therefore \angle BDA = \angle CEA = 90^\circ = \angle BAC$，

$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ$，$\angle BAD + \angle DBA = 90^\circ$

$\therefore \angle CAE = \angle DBA$，且 $AB = AC$，$\angle BDA = \angle CEA = 90^\circ$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$（$AAS$）

$\therefore AD = CE$，$AE = BD$

$\therefore DE = BD + CE$，

故答案为：$DE = BD + CE$，

（3）如图 3：$CE - BD = DE$

$\because BD \perp l$，$CE \perp l$，

$\therefore \angle BDA = \angle CEA = 90^\circ = \angle BAC$，

$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ$，$\angle BAD + \angle DBA = 90^\circ$

$\therefore \angle CAE = \angle DBA$，且 $AB = AC$，$\angle BDA = \angle CEA = 90^\circ$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$（$AAS$）

$\therefore AD = CE$，$AE = BD$

$\therefore DE = AD - AE = CE - BD$

如图 4，若交点靠近 C 点时，

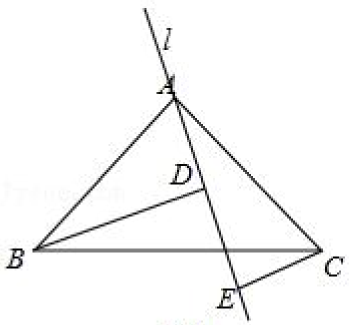


图4

$\because BD \perp l$，$CE \perp l$，

$\therefore \angle BDA = \angle CEA = 90^\circ = \angle BAC$，

$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ$，$\angle BAD + \angle DBA = 90^\circ$

$\therefore \angle CAE = \angle DBA$，且 $AB = AC$，$\angle BDA = \angle CEA = 90^\circ$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$（$AAS$）

$\therefore AD = CE$，$AE = BD$

$\therefore DE = AE - AD = BD - CE$.

故答案为：$CE - BD = DE$，$BD - CE = DE$

5．已知△ABC为等边三角形，取△ABC的边AB，BC中点D，E，连接DE，如图1，易证△DBE为等边三角形，将△DBE绕点B顺时针旋转，设旋转的角度∠ABD＝α，其中0＜α＜180°．

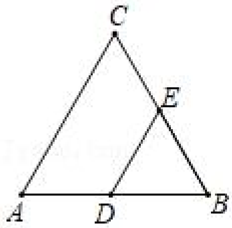


图1

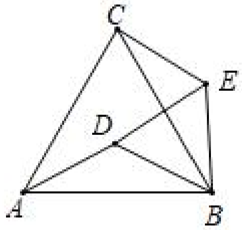


图2

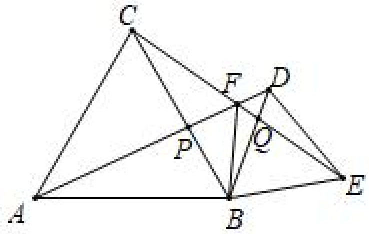


图3

（1）如图2，当α＝30°，连接AD，CE，求证：AD＝CE；

（2）在△DBE旋转过程中，当α超过一定角度时，如图3，连接AD，CE会交于一点，记交点为点F，AD交BC于点P，CE交BD于点Q，连接BF，请问BF是否会平分∠CBD？如果是，求出α，如果不是，请说明理由；

（3）在第（2）问的条件下，试猜想线段AF，BF和CF之间的数量关系，并说明理由．

【解答】证明：（1）∵△ABC，△DBE都是等边三角形，

∴AB＝BC，BD＝BE，∠ABC＝∠DBE＝60°，

∴∠ABD＝∠CBE，

在△ABD和△CBE中，

$$\begin{cases} AB=CB \\ \angle ABD=\angle CBE, \\ BD=BE \end{cases}$$

∴△ABD≌△CBE（SAS），

∴AD＝CE；

（2）不存在，

理由如下：如图3，过点B作BN⊥AD于N，过点B作BH⊥CE于H，

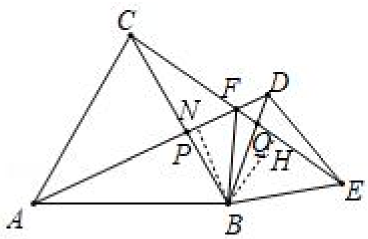


图3

∵△ABC，△DBE都是等边三角形，

∴AB＝BC，BD＝BE，∠ABC＝∠DBE＝60°，

.

∴$\angle ABD=\angle CBE$，

在$\triangle ABD$和$\triangle CBE$中，

$$\begin{cases}AB=CB\\ \angle ABD=\angle CBE\\ BD=BE\end{cases},$$

∴$\triangle ABD\cong\triangle CBE$（$SAS$），

∴$AD=CE$，$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CBE}$，$\angle BAD=\angle BCE$，

∴$\frac{1}{2}\times AD\times BN=\frac{1}{2}\times CE\times BH$，

∴$BN=BH$，

又∵$BF=BF$，

∴$\text{Rt}\triangle BFN\cong\text{Rt}\triangle BFH$（$HL$），

∴$\angle AFB=\angle EFB$，

∵$\angle BAD=\angle BCE$，$\angle CPF=\angle APB$，

∴$\angle AFC=\angle ABC=60°$，

∴$\angle AFB=\angle EFB=60°$，

∴$\angle CFB=\angle DFB=120°$，

当BF平分$\angle CBD$时，则$\angle CBF=\angle DBF$，

∴$\angle BCF=180°-\angle CBF-\angle CFB=180°-\angle DBF-\angle DFB=\angle ADB$，

∴$\angle DAB=\angle ADB$，

∴$AB=DB$，与题干$DB=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$相矛盾，

∴BF不会平分$\angle CBD$；

（3）$AF=CF+BF$，

理由如下：如图4，在AF上截取$MF=BF$，连接BM，

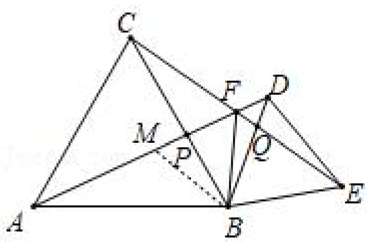


图4

∵$\angle AFB=60°$，$MF=FB$，

∴$\triangle MFB$是等边三角形，

∴$MB=BF$，$\angle MBF=\angle ABC=60°$，

∴$\angle ABM=\angle CBF$，

在△ABM和△CBF中，

$$\begin{cases}CB=AB\\ \angle ABM=\angle CBF\\ BM=BF\end{cases}，$$

∴△ABM≌△CBF（SAS），

∴$AM=CF$，

∵$AF=AM+MF$，

∴$AF=CF+BF$.

6.（1）如图1，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B=\angle D=90°$，E、F 分别是边 BC、CD 上的点，且$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$．求证：$EF=BE+FD$.

（2）如图2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180°$，E、F 分别是边 BC、CD 上的点，且$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请写出线段 EF、BE、FD 它们之间的数量关系，并证明.

（3）如图3，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle ADC=180°$，E、F 分别是边 BC、CD 延长线上的点，且$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请写出线段 EF、BE、FD 它们之间的数量关系，并证明.

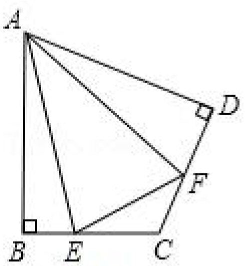


图1

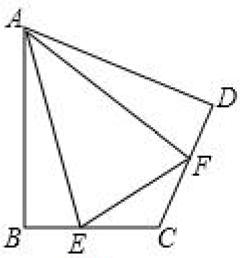


图2

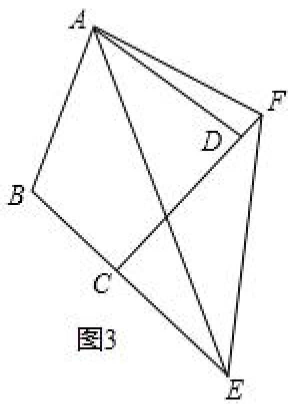


图3

【解答】证明：（1）如图1，延长 EB 到 G，使 $BG=DF$，连接 AG.

∵在△ABG与△ADF中，$\begin{cases}AB=AD\\ \angle ABG=\angle ADF=90°\\ BG=DF\end{cases}$，

∴△ABG≌△ADF（SAS）.

∴$AG=AF$，$\angle 1=\angle 2$.

∴$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3=\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$.

∴$\angle GAE=\angle EAF$.

又 $AE=AE$，

易证$\triangle AEG\cong\triangle AEF$.

∴$EG=EF$.

∵$EG=BE+BG$.

∴$EF=BE+FD$

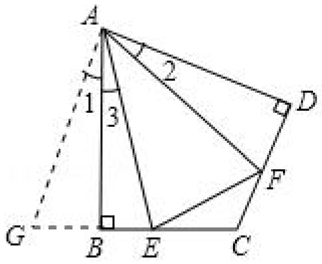


图1

（2）（1）中的结论 $EF=BE+FD$ 仍然成立．

证明：如图 2，延长 CB 至 M，使 $BM=DF$，

∵$\angle ABC+\angle D=180^\circ$，$\angle 1+\angle ABC=180^\circ$，

∴$\angle 1=\angle D$，

在$\triangle ABM$ 与$\triangle ADF$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD \\ \angle 1=\angle D, \\ BM=DF \end{cases}$$

∴$\triangle ABM\cong\triangle ADF$（$SAS$）.

∴$AF=AM$，$\angle 2=\angle 3$.

∵$\angle EAF=\dfrac{1}{2}\angle BAD$，

∴$\angle 2+\angle 4=\dfrac{1}{2}\angle BAD=\angle EAF$.

∴$\angle 3+\angle 4=\angle EAF$，即$\angle MAE=\angle EAF$.

在$\triangle AME$ 与$\triangle AFE$ 中，

$$\begin{cases} AM=AF \\ \angle MAE=\angle EAF, \\ AE=AE \end{cases}$$

∴$\triangle AME\cong\triangle AFE$（$SAS$）.

∴$EF=ME$，即 $EF=BE+BM$.

∴$EF=BE+DF$.

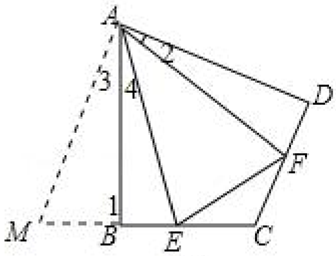


图2

（3）结论 $EF=BE+FD$ 不成立，应当是 $EF=BE-FD$．

证明：在 BE 上截取 BG，使 $BG=DF$，连接 AG．

∵$\angle B+\angle ADC=180°$，$\angle ADF+\angle ADC=180°$，

∴$\angle B=\angle ADF$．

∵在△ABG 与△ADF 中，

$$\begin{cases}AB=AD\\ \angle ABG=\angle ADF,\\ BG=DF\end{cases}$$

∴$\triangle ABG\cong\triangle ADF$（$SAS$）．

∴$\angle BAG=\angle DAF$，$AG=AF$．

∴$\angle BAG+\angle EAD=\angle DAF+\angle EAD=\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$．

∴$\angle GAE=\angle EAF$．

∵$AE=AE$，

易证$\triangle AEG\cong\triangle AEF$．

∴$EG=EF$

∵$EG=BE-BG$

∴$EF=BE-FD$．

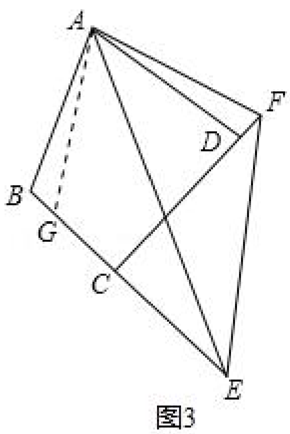


图3

7．直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，直线 l 过点 C．

（1）当 $AC=BC$ 时，如图 1，分别过点 A 和 B 作 $AD\perp$直线 l 于点 D，$BE\perp$直线 l 于点 E．△

ACD 与△CBE 是否全等，并说明理由；

（2）当 $AC=8cm$，$BC=6cm$ 时，如图 2，点 B 与点 F 关于直线 l 对称，连接 BF、CF．点 M 是 AC 上一点，点 N 是 CF 上一点，分别过点 M、N 作 $MD\perp$直线 l 于点 D，$NE\perp$直线 l 于点 E，点 M 从 A 点出发，以每秒 $1cm$ 的速度沿 $A\to C$ 路径运动，终点为 C．点 N 从点 F 出发，以每秒 $3cm$ 的速度沿 $F\to C\to B\to C\to F$ 路径运动，终点为 F．点 M、N 同时开始运动，各自达到相应的终点时停止运动，设运动时间为 t 秒．

①当△CMN 为等腰直角三角形时，求 t 的值；

②当△MDC 与△CEN 全等时，求 t 的值．

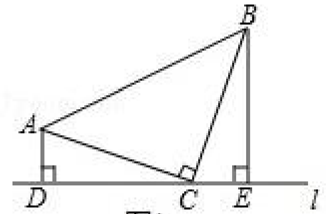


图1

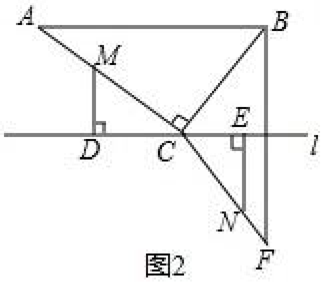


图2

【解答】解：（1）△ACD 与△CBE 全等．

理由如下：∵$AD\perp$直线 l，

∴$\angle DAC+\angle ACD=90^\circ$，

∵$\angle ACB=90^\circ$，

∴$\angle BCE+\angle ACD=90^\circ$，

∴$\angle DAC=\angle ECB$，

在△ACD 和△CBE 中，

$$\begin{cases}\angle ADC=\angle CEB\\ \angle DAC=\angle ECB,\\ CA=CB\end{cases}$$

∴△ACD≌△CBE（AAS）；

（2）①由题意得，$AM=t$，$FN=3t$，

则 $CM=8-t$，

由折叠的性质可知，$CF=CB=6$，

∴$CN=6-3t$，

点 N 在 BC 上时，△CMN 为等腰直角三角形，

当点 N 沿 $C\to B$ 路径运动时，由题意得，$8-t=3t-6$，

解得，$t=3.5$，

当点 N 沿 $B \to C$ 路径运动时，由题意得，$8-t=18-3t$，

解得，$t=5$，

综上所述，当 $t=3.5$ 秒或 5 秒时，$\triangle CMN$ 为等腰直角三角形；

②由折叠的性质可知，$\angle BCE=\angle FCE$，

∵$\angle MCD+\angle CMD=90^\circ$，$\angle MCD+\angle BCE=90^\circ$，

∴$\angle NCE=\angle CMD$，

∴当 $CM=CN$ 时，$\triangle MDC$ 与$\triangle CEN$ 全等，

当点 F 沿 $F \to C$ 路径运动时，$8-t=6-3t$，

解得，$t=-1$（不合题意），

当点 F 沿 $C \to B$ 路径运动时，$8-t=3t-6$，

解得，$t=3.5$，

当点 F 沿 $B \to C$ 路径运动时，由题意得，$8-t=18-3t$，

解得，$t=5$，

当点 F 沿 $C \to F$ 路径运动时，由题意得，$8-t=3t-18$，

解得，$t=6.5$，

综上所述，当 $t=3.5$ 秒或 5 秒或 6.5 秒时，$\triangle MDC$ 与$\triangle CEN$ 全等.

8．在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 是直线 BC 上一点（不与 B、C 重合），以 AD 为一边在 AD 的右侧作$\triangle ADE$，使 $AD=AE$，$\angle DAE=\angle BAC$，连接 CE.

（1）如图 1，当点 D 在线段 BC 上，如果$\angle BAC=90^\circ$，则$\angle BCE=$__90__度；

（2）如图 2，当点 D 在线段 BC 上，如果$\angle BAC=60^\circ$，则$\angle BCE=$__120__度；

（3）设$\angle BAC=\alpha$，$\angle BCE=\beta$

①如图 3，当点 D 在线段 BC 上移动，则α，β之间有怎样的数量关系？请说明理由；

②当点 D 在直线 BC 上移动，请直接写出α，β之间的数量关系，不用证明.