5.3.1等比数列（一）

趣味情景导学

对于等差数列，我们已经进行了深入的认识和了解，那么，同学们会问：在我们的数列家族中除了等差数列外还有没有其他的数列呢？回答是明确的，还有其他很多特殊的数列，下面就让我们一起认识和学习一个新的数列——等比数列.

学习目标定位

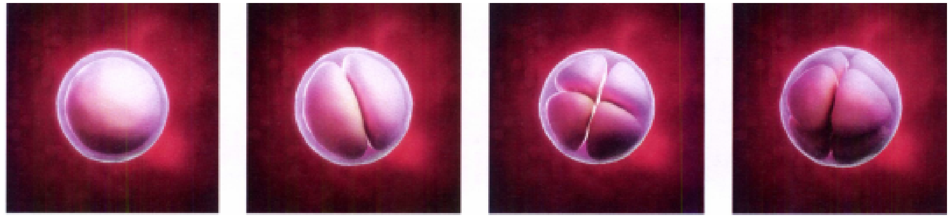
1. 理解等比数列的定义，能够应用定义判断一个数列是否为等比数列.（重点）

2. 掌握等比数列的通项公式并能应用，体会等比数列的通项公式与指数函数的关系.（难点）

问题导学探究

探究点1：等比数列的定义

情境1：如图所示，有些细胞在分裂时，会中1个变成2个，2个变成4个，4个变成8个……，



这里细胞的个数构成数列 1，2，4，8，16，32，…　　①

思考1：这个数列有什么特点？

提示：后一次与前一次的比值都相等，且都等于定值2.

情境2：《庄子》中说“一尺之棰，日取其半，万事不竭.” 其意思是:一尺长的木棒，每日取其一半，永远也取不完，如果记木棒的长度为1，则不断取一半的过程中，每日之后木棒的长度构成数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots \qquad ②$$

思考2：这个数列有什么特点？

提示：后一次与前一次的比值都相等，且都等于定值$\frac{1}{2}$.

情境3： 我们都知道，如果将钱存在银行里，那么将会获得利息，例如如果某年年初将1000元钱存为年利率为3%的5年定期存款，且银行每年年底结算一次利息，则这5年中,每年年底的本息和构成数列

$$1000\times1.03，1000\times 1.03^2，…，1000\times1.03^5. \quad ③$$

思考3：这个数列有什么特点？

提示：后一次与前一次的比值都相等，且都等于定值1.03.

追问： 让我们共同观察这四组数列，找出它们的共同特征是什么？类比等差数列的定义可归纳出什么结论？

$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ ①

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ ②

$1000\times1.03, 1000\times1.03^2, \ldots, 1000\times1.03^5.$ ③

等比数列

提示：通过观察，四个数列各项之间存在这样的共同特征：

数列从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数

类比等差数列的概念，给等比数列下个定义.

等比数列的概念

一般地，如果数列$\{a_n\}$从第2项起，每一项与它的前一项之比都等于同一个常数q，即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\ (q\neq 0)$$

$$\text{公比}=\frac{\text{后一项}}{\text{前一项}}$$

恒成立，则称$\{a_n\}$为等比数列，其中q称为等比数列的公比.

例如：数列① 1，2，4，8，16，32，...的公比是2.

例1.判断以下数列是否是等比数列？如果是，指出公比；如果不是，说明理由.

（1）1，10，100，1000，10000；（2）0，1，2，4，8；

（3）1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$.

【解析】(1) 因为 $\frac{10}{1}=\frac{100}{10}=\frac{1000}{100}=\frac{10000}{1000}=10$,

所以是等比数列，且公比为10.

(2) 因为$\frac{1}{0}$没有意义，所以不是等比数列.

(3) 因为 $\frac{-\frac{1}{2}}{1}=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{16}}{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$

所以是等比数列，且公比为$-\frac{1}{2}$.

比数列中任

项$a_n \neq 0$

探究点2：等比数列的通项公式

思考1：你能根据等差数列的特征写出探究1中数列①②③的通项公式吗？

1，2，4，8，16，32，…　　…　　　　①

【提示】 用$\{a_n\}$表示数列①，$q=2$，根据等比数列的定义，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$

故 $a_2=a_1q=1\times 2$，

$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2=1\times 2^2$，

$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3=1\times 2^3$，

……

由此可知数列①的通项公式为：$a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，… ②

1000×1.03，1000×1.03^2，…，1000×1.03^5. ③

类似地，数列②的通项公式为：

$$b_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

数列③的通项公式为：

$$c_n=\underline{1000\times1.03\times1.03^{n-1}=1000\times1.03^n}$$

思考2：如果等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公比为q，那么它的通项公式是怎样的?

【提示】一般地，如果等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为q，那么根据等比数列的定义有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

即$a_{n+1}=a_nq$, 从而

$$a_2=a_1q$$

$$a_3=a_2q=a_1q^2$$

$$a_4=a_3q=a_1q^3$$

……

归纳法

由此可归纳出等差数列的通项公式为

$$\boxed{a_n=a_1q^{n-1}}$$

另外，由等比数列的定义可得 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$，

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = q，$$

……

$$\frac{a_3}{a_2} = q，$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q \quad ，$$

累乘法

将这n－1个式子两边分别相乘，则有 $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$，

即等比数列的通项公式为 $\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$