

考单招——上高职单招网

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 定义集合 M 与 N 的新运算： $M + N = \{x | x \in M \text{ 或 } x \in N \text{ 且 } x \in M \cap N\}$ ，若 $M = \{1, 2, 3\}$ ， $N = \{2, 3, 4\}$ ，则 $M + N$ 等于()

A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\varnothing$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{1, 4\}$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 + a_5 + a_9 = \frac{\pi}{4}$ ，则 $\tan(a_2 + a_8) = ()$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. -1

3. 已知对任意实数 x ，有 $f(-x) = -f(x)$ ， $g(-x) = g(x)$ ，且 $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ， $g'(x) > 0$ ，则 $x < 0$ 时，有()

A. $f'(x) > 0$ ， $g'(x) > 0$ B. $f'(x) > 0$ ， $g'(x) < 0$

C. $f'(x) < 0$ ， $g'(x) > 0$ D. $f'(x) < 0$ ， $g'(x) < 0$

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $\triangle ABC$ 顶点 $A(-1, 0)$ 和 $C(1, 0)$ ，顶点 B 在椭圆

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上，则 $\frac{\sin A + \sin C}{\sin B}$ 的值是()

A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. 与点 B 位置有关

5. 四面体 $ABCD$ 的外接球球心在 CD 上，且 $CD = 2$ ， $AB = \sqrt{3}$ ，则在外接球球面上 A ， B 两点间的球面距离是()

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 设随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，且当二次方程 $x^2 - 2x + \xi = 0$ 无实根时的 ξ 的取值概率为 0.5，则 $\mu = ()$

A . 0 B . 0.5 C . 1 D . 2

7 . 设 a , b , c 均为正数 , 且 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a$, $(\frac{1}{2})^b = \log_{\frac{1}{2}} b$, $(\frac{1}{2})^c = \log_2 c$, 则 ()

考单招——上高职单招网

A . $a < b < c$ B . $c < b < a$ C . $c < a < b$ D . $b < a < c$

8 . 已知函数 $f(x) = 4x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. 规定: 给定一个实数 x_0 , 赋值 $x_1 = f(x_0)$, 若 $x_1 \leq 1025$, 则继续赋值 $x_2 = f(x_1)$, ... , 以此类推, 若 $x_{n-1} \leq 1025$, 则 $x_n = f(x_{n-1})$, 否则停止赋值, 如果得到 x_n 称为赋值了 n 次 ($n \in \mathbb{N}^*$) . 已知赋值 k 次后该过程停止, 则 x_0 的取值范围是 ()

A . $(4^{5-k}, 4^{6-k}]$ B . $(4^{5-k} + 1, 4^{6-k} + 17]$
C . $(4^{6-k} - 1, 4^{7-k} - 17]$ D . $(4^{6-k} + 1, 4^{7-k} + 17]$

二、填空题: 本大题共 7 小题, 每小题 5 分, 共 35 分 . 把答案填在答题卡中对应题号后的横线上。

9 . “ $a \neq 1$ 或 $b \neq 2$ ” 是 “ $a + b \neq 3$ ” 成立的 _____ 条件 (填 “充分不必要”、“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要” 中的一个) .

10 . $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} =$ _____

11 . 若 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AC 在平面 α 内, 顶点 B 在平面 α 外, 则两直角边 BA , BC 在平面 α 上的射影与斜边 AC 组成的图形是 _____ .

12 . 已知 e 是单位向量, $|a + e| = |a + 2e|$, 则 a 在 e 方向上的投影为 _____ .

13 . 由线性约束条件 $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq x \\ y \leq 2 - x \\ t \leq x \leq t + 1 \end{cases}$ 所确定的区域面积为 S , 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 记 $S = f(t)$, 则 $f(t)$ 的最大值为 _____ .

14 . 双曲线的实轴长、虚轴长与焦距的和为 8 , 则半焦距的取值范围是 _____ .

15 . 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 令 $T_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$, 称 T_n 为数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的 “理想数”, 已知数列 $a_1, a_2, \dots, a_{1005}$ 的 “理想数” 为 2012 , 那么数列

$-1, a_1, a_2, \dots, a_{1005}$ 的“理想数”是_____。

考单招——上高职单招网

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16 . (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数。

(1) 求函数 $F(x) = f(x)f'(x) + f^2(x)$ 的最大值和最小正周期；

(2) 若 $f(x) = 2f'(x)$, 求 $\frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$ 的值。

17 . (本小题满分 12 分)

某种项目的射击比赛，开始时在距目标 100m 处射击，如果命中记 3 分，且停止射击；若第一次射击未命中，可以进行第二次射击，但目标已经在 150m 处，这时命中记 2 分，且停止射击；若第二次仍未命中，还可以进行第三次射击，此时目标已在 200m 处，若第三次命中则记 1 分，并停止射击；若三次都未命中，则记 0 分。已知射手甲在 100m 处击中目标的概率为 $\frac{1}{2}$ ，他的命中率与目标的距离的平方成反比，且各次射击都是独立的。

(1)求这名射手分别在第二次、第三次射击中命中目标的概率及三次射击中命中目标的概率；

(2)设这名射手在比赛中得分数为 ξ , 求随机变量 ξ 的概率分布列和数学期望。

18 . (本小题满分 12 分)

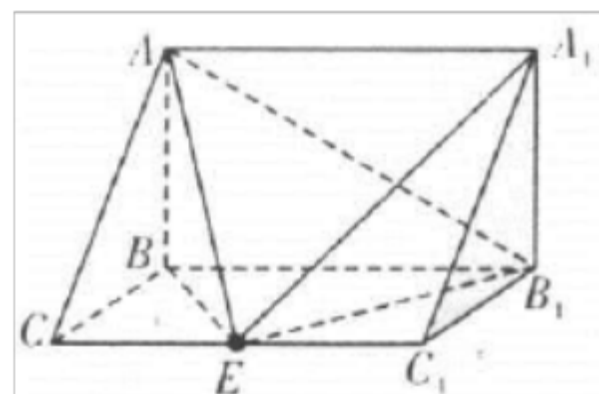
如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB \perp$ 侧面 B_1BCC_1 ，

E 为棱 CC_1 的中点，已知 $AB = \sqrt{2}$ ， $BB_1 = 2$ ，

$BC = 1$ ， $\angle BCC_1 = \frac{\pi}{3}$ ，求：

(1) 异面直线 AB 与 EB_1 的距离；

(2) 三面角 $A - EB_1 - A_1$ 的平面角的正切值。



19 . (本小题满分 13 分)

考单招——上高职单招网

某出版公司为一本畅销书定价如下: $C(n) = \begin{cases} 12n(1 \leq n \leq 24, n \in N^*) \\ 11n(25 \leq n \leq 48, n \in N^*) \\ 10n(n \geq 49, n \in N^*) \end{cases}$ 这里 n 表示

订购书的数量, $C(n)$ 表示订购 n 本所付的钱数(单位: 元)。

(1) 有多少个 n , 会出现买多于 n 本书比恰好买 n 本书所花钱少?

(2) 若一本书的成本价是 5 元, 现在甲、乙两人来买书, 每人至少买 1 本, 甲买的书不多于乙买的书, 两人共买 60 本, 问出版公司至少能赚多少钱? 最多能赚多少钱?

20. (本小题满分 13 分)

已知向量 $\vec{OA} = (2, 0)$, $\vec{OC} = \vec{AB} = (0, 1)$, 动点 M 到定直线 $y = 1$ 的距离等于 d , 并且满足 $\vec{OM} \cdot \vec{AM} = k \cdot (\vec{CM} \cdot \vec{BM} - d^2)$, 其中 O 是坐标原点, k 是参数。

(1) 求动点 M 的轨迹方程;

(2) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 若直线 AC 与动点 M 的轨迹相交于 A 、 D 两点, 线段 AD 的垂直平分线交 x 轴 E , 求 $|EM|$ 的取值范围;

(3) 如果动点 M 的轨迹是一条圆锥曲线, 其离心率 e 满足 $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq e \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 k 的取值范围。

21. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$, 数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \ln 2 + \ln a_{n+1} = a_{n+1} a_n + f\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

(1) 求证: $\ln(1+x) \leq x$;

(2) 求证数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 1}\right\}$ 是等差数列;

(3) 求证不等式: $a_1 + a_2 + \dots + a_n < n + \ln 2 - \ln(n+2)$

数学参考答案

一、选择题：

1 . D 2 . A 3 . B 4 . B 5 . C 6 . C 7 . A 8 . B

二、填空题：

9 . 必要不充分 10 . $-\frac{1}{2}$ 11 . 线段或钝角三角形 12 . $-\frac{3}{2}$
13 . $\frac{3}{4}$ 14 . $[4\sqrt{2}-4, 2)$ 15 . 2009

三、解答题：

16 . 解：(1) $\because f_1(x) = \cos x - \sin x$, (2分)

$$\therefore F(x) = f(x)f_1(x) + f_2(x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x + 1 + 2\sin x \cos x$$

$$= 1 + \sin 2x + \cos 2x$$

$$= 1 + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \dots\dots\dots (4分)$$

$$\therefore \text{当 } 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时, } F(x)_{\max} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi \dots\dots\dots (6分)$$

$$(2) \because f(x) = 2f_1(x) \rightarrow \sin x + \cos x = 2\cos x - 2\sin x$$

$$\therefore \cos x = 3\sin x \rightarrow \tan x = \frac{1}{3} \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin x \cos x} = \frac{2\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin x \cos x} = \frac{2\tan^2 x + 1}{1 - \tan x} = \frac{\frac{11}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{11}{2} \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

考单招——上高职单招网

17. 解: (1) 记第一、二、三次射击命中目标分别为事件 A、B、C, 三次均未命中目标的事件为 D. 依题意

$P(A) = \frac{1}{2}$. 设在 x 米处击中目标的概率为 $P(x)$, 则 $P(x) = \frac{k}{x^2}$, 由 $x = 100\text{m}$ 时

$P(A) = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{1}{2} = \frac{k}{100^2}$, $k = 5000$, 即 $P(x) = \frac{5000}{x^2}$, (2 分)

$P(B) = \frac{5000}{150^2} = \frac{2}{9}$, $P(C) = \frac{5000}{200^2} = \frac{1}{8}$ (5 分)

由于各次射击都是独立的, 所以该射手在三次射击中命中目标的概率为

$$P = P(A) + P(\overline{A}B) + P(\overline{A}\overline{B}C) = P(A) + P(\overline{A})P(B) + P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{95}{144} \text{ (8 分)}$$

(2) 依题意, 设射手甲得分为 ξ , 则 $P(\xi = 3) = \frac{1}{2}$, $P(\xi = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$,

$$P(\xi = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{144}, \quad P(\xi = 0) = P(D) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{49}{144},$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{49}{144}$	$\frac{7}{144}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$

$$\text{所以 } E\xi = 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{7}{144} + 0 \times \frac{49}{144} = \frac{85}{48} \text{ (12 分)}$$

18. 解: 解法一: (1) $\because AB \perp \text{平面 } BB_1C_1C, \therefore AB \perp BE$

1 1

又 $\because E$ 为 CC_1 的中点, $\therefore CE = 1$, 而 $BC = 1$, 且 $\angle BCC_1 = \frac{\pi}{3}$, $\therefore \triangle BCE$ 为等边三

1

1 3