



## 第五章

# 几何非线性基础

## 5. 几何非线性基础

### 什么是几何非线性行为?

- 一个结构的总体刚度依赖于它的单个零部件(单元)的取向和刚度.
- 当单元的节点移动时, 单元对总体刚度的贡献可以分为几种情况.
  - 由于几何变形而引起的刚度改变归类为*几何非线性*.
  - **ANSYS** 按特征将几何非线性分为三种:
    - 大应变.
    - 大挠度 (大转动).
    - 应力刚化.

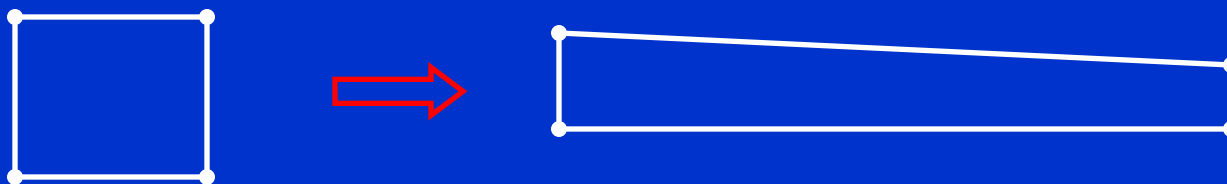
## ... 几何非线性基础

- 本章将通过以下主题介绍几何非线性基础：
  - A. 综述
  - B. 三类几何非线性
  - C. 一致切向矩阵
  - D. 建模
  - E. 求解
  - F. 后处理
- 目的是理解如何解释分析中的几何非线性效应。

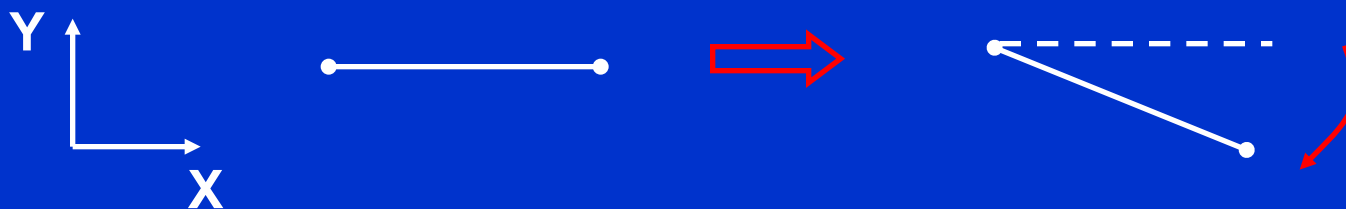
# A. 综述

考虑与几何非线性有关的三种现象:

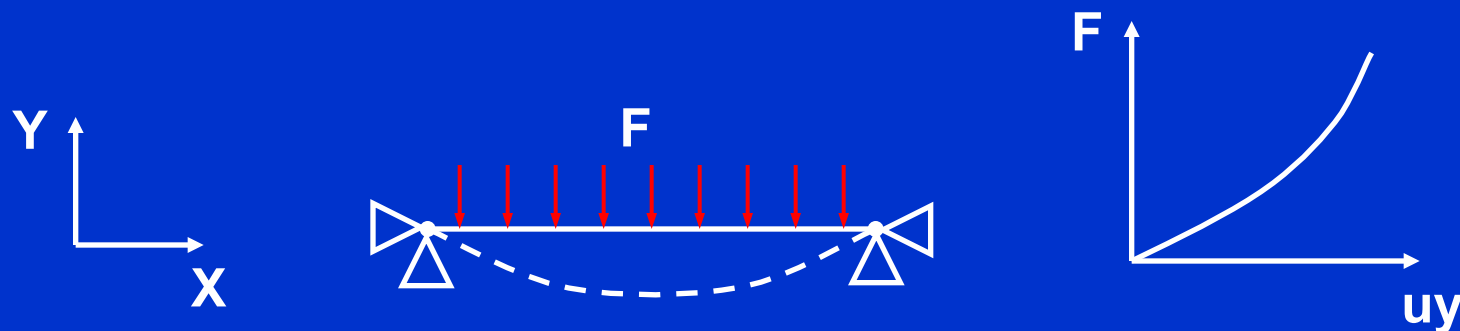
- 如果单元的 **形状** 改变 (面积, 厚度等), 其单独的单元刚度将改变.



- 2 如果单元的 **取向** 改变 (转动), 其局部刚度转化为全局分量时将发生变化.



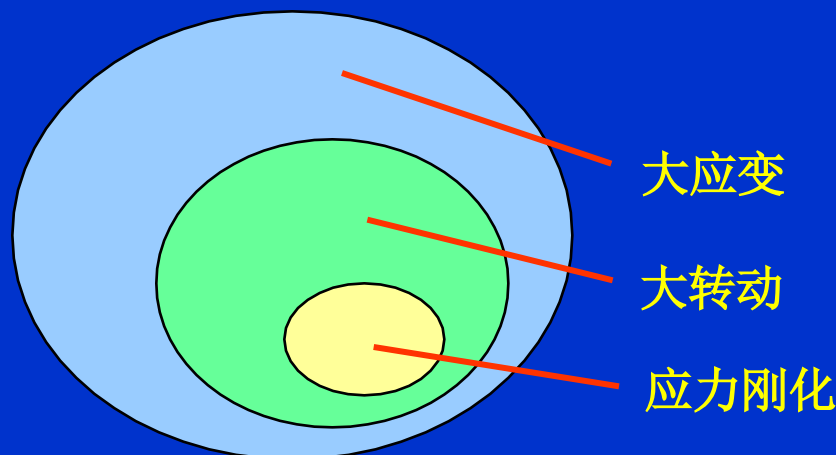
- 3 如果单元的应变产生较大的平面内应力状态 (**膜应力**), 平面法向刚度将受到显著的影响.



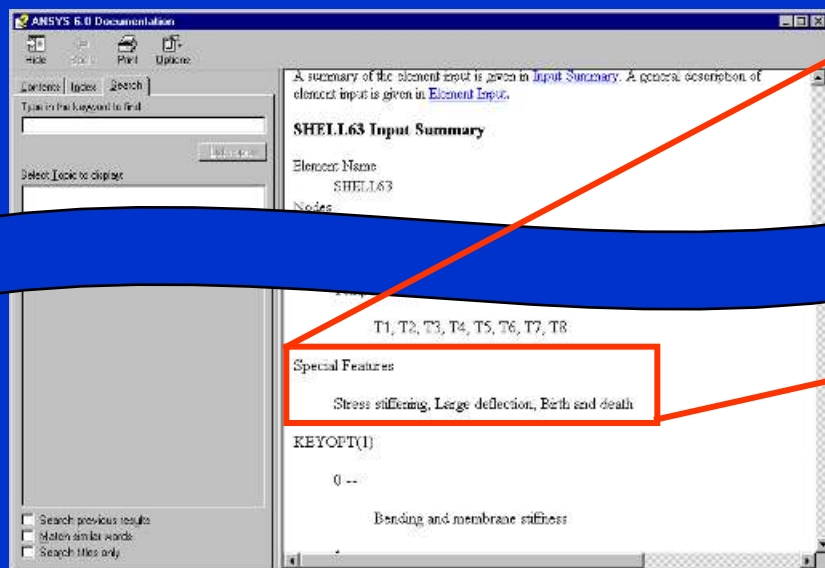
随着垂直挠度的增加 (**UY**), 较大的膜应力 (**SX**) 导致刚化效应.

## ... 综述

- **大应变** 行为包含所有这三种现象.
- **大挠度** 行为仅包含最后两种现象.
- **应力刚化** 行为仅包含第三种现象.
- 因而，应力刚化理论是大挠度理论的子集，大挠度理论是大应变理论



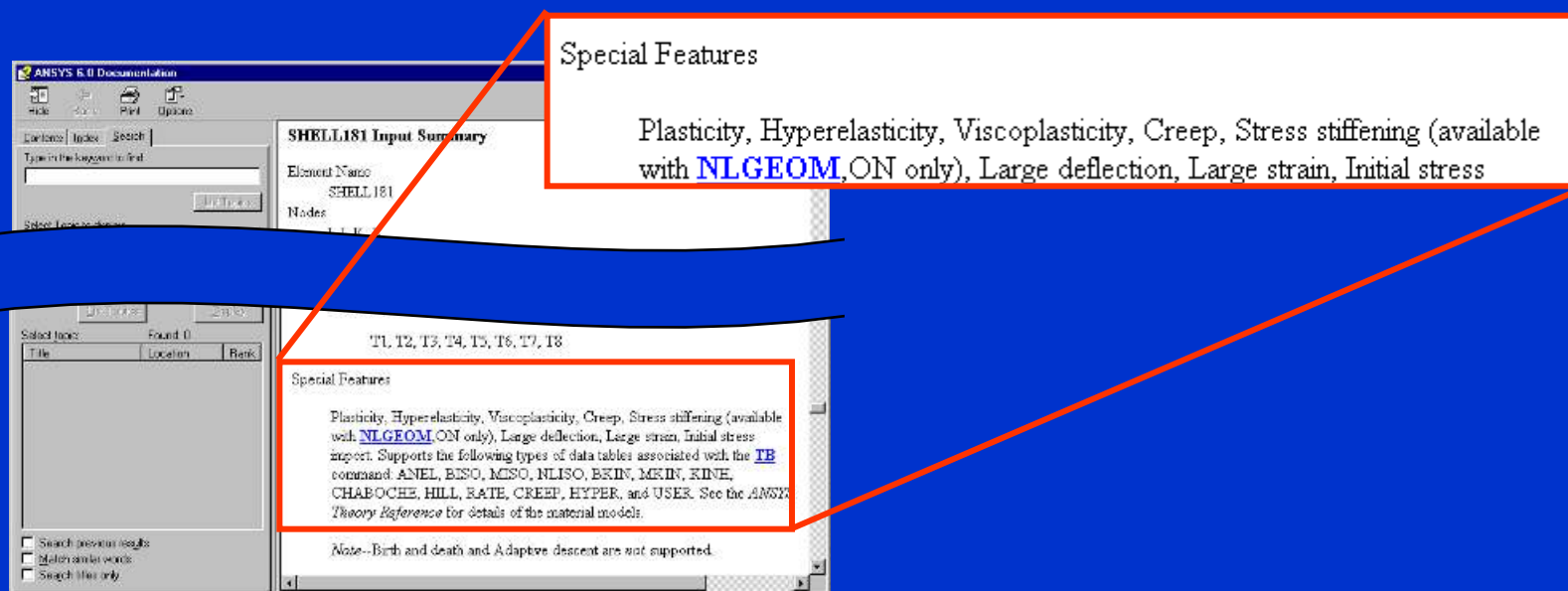
- 分析中将包含几何非线性, 如果:
  - 指定 **大位移** 分析, 并且
  - 模型中的单元类型支持几何非线性效应.
    - 可以在单元描述的 **特殊特征** 列表中找到这条信息.



Special Features  
Stress stiffening, Large deflection, Birth and death

例如, 注意 **SHELL63** 支持应力刚化和大挠度, **但不支持大应变**.

- 相比而言，**SHELL181** 支持所有的三类几何非线性：应力刚化，大挠度和大应变。

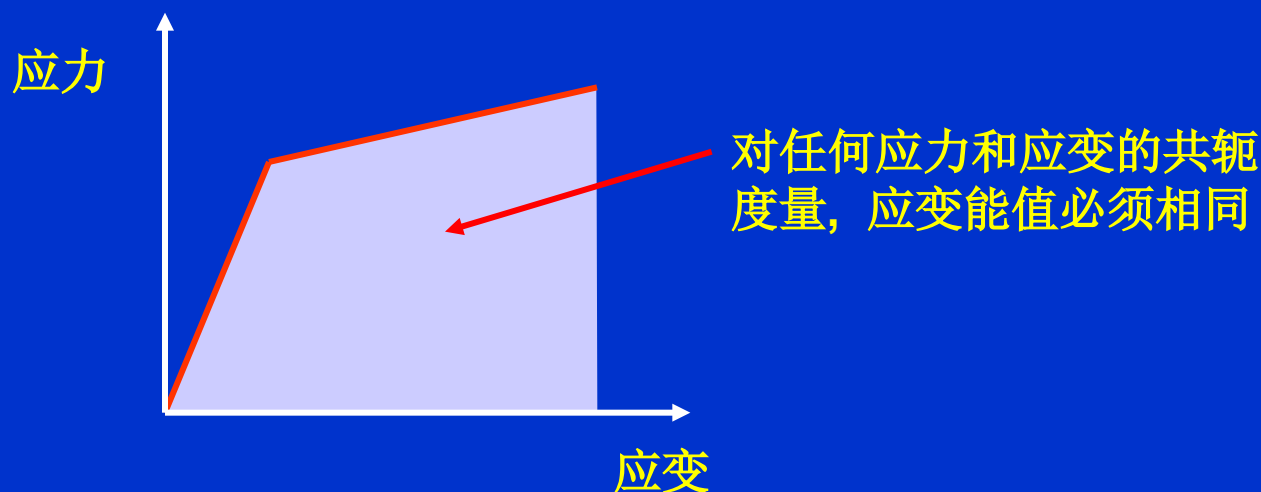


- 确保选择的单元类型支持必要的非线性几何行为!

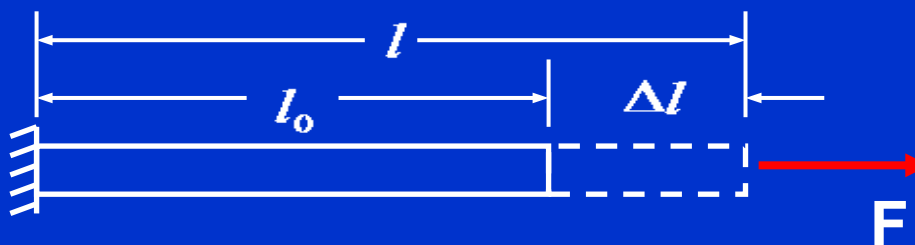


- 改进的应变数学定义有利于大应变分析。
  - 根据物理意义, 应变总是定义为对变形体的规范化度量.
  - 然而, 应变有许多种可能的数学定义.
- 尽管应变的数学定义有点任意性, 但它必须符合一定的要求:
  - 没有变形时, 应变应该为零 (如纯粹刚体运动, 包括转动).
  - 有变形时, 应变应该不为零.
  - 应变应该通过材料的应力-应变关系与应力相联系.

- 在非线性大应变分析中，采用的应力的度量必须与应变的度量**共轭**。
- **共轭**意味着应变能 (一个标量, 是应力与应变乘积的函数) 与所选的应力和应变的度量无关。



- ANSYS 程序采用三种应变和应力的度量：
  - 工程应变和工程应力.
  - 对数应变和真实应力.
  - Green-Lagrange 应变和第二 Piola-Kirchoff 应力.
- 程序根据分析类型和采用的单元自动选择用哪一种度量.
- 将通过一个简单的一维例子研究这些不同的应力和应变定义.



- **工程应变** 是小应变度量，用初始几何构形计算：

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

- 由于工程应变依赖于已知的初始几何构形 (如长度)，因此工程应变度量是个线性度量。
- 材料限制为小转动，因为中等程度的刚体转动将导致非零应变。
- **ANSYS** 将其用于小位移分析。

- **工程应力** ( $\sigma$ ), 是工程应变 ( $\epsilon$ ) 的共轭应力度量. 在它的计算中, 用当前力  $F$  和初始面积  $A_0$ .

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

- 在支持大挠度但不支持大应变的单元的大位移分析中，程序用一种**共转**方法，该方法从总位移中分离出刚体转动。
  - 这样就排除了由于大转动而引起的非零应变，只剩下小应变变形分量。
  - 因此，大挠度、小应变分析也采用工程应变 ( $\epsilon$ ) 和工程应力 ( $\sigma$ ) 。

- **对数应变** 是一种大应变度量, 按下式计算:

$$\epsilon_l = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \text{Ln} \left( \frac{l}{l_0} \right)$$

- 该度量是一种非线性应变度量, 因为它是未知的最终长度  $l$  的非线性函数. 也被称为 **log** 应变. **Log** 应变的三维等效是 **Hencky** 应变.
- **ANSYS** 将其用于大位移分析中支持大应变的大多数单元.

- **真实应力** ( $\tau$ ) 是对数应变 ( $\epsilon_l$ ) 的共轭一维应力度量, 用力  $F$  除以当前 (或变形的) 面积  $A$  来计算:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

- 该度量一般也被称为 **Cauchy** 应力.



- **Green-Lagrange应变** 是另外一种大应变度量，在一维中按下式计算：

$$\epsilon_G = \frac{1}{2} \left( \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \right)$$

- 因为该度量依赖于未知的更新的长度  $l$  的平方，所以是非线性的。
- 相对于 **Log** 或 **Hencky** 应变，该应变度量的计算优势是，在大应变问题中，它自动容纳任何大转动。
- **ANSYS** 将它用于大位移分析中支持大应变的一些单元。

- Green-Lagrange 应变 ( $\epsilon_G$ ) 的共轭应力度量是 **第二 Piola-Kirchoff (S)**. 在一维中可按下式计算:

$$S = \frac{l_0}{l} \frac{F}{A_0}$$

- 应该注意该应力几乎没有物理意义. 为了输出, **ANSYS** 总是将其转化为 **Hencky** 或 **真实应力 ( $\tau$ )** 输出.

## ANSYS 使用哪一种应变和应力度量?

- 为了能够正确地输入数据和解释结果, 必须知道 **ANSYS** 程序用哪一种度量输入和输出.
  - 对给定的单元类型和分析选项 (大或小位移), 程序选择应变度量的种类.
  - 除了可以选择单元类型和分析选项, 不能控制程序采用哪一种应变度量.

- 一般地：
  - ANSYS 将工程应力和工程应变用于小位移分析或仅支持大挠度单元的大位移分析。
  - ANSYS 将对数应变和真实应力用于支持大应变的大多数单元的大挠度。
  - Mooney-Rivlin 超弹性例外，见下表所示。

Analysis Type		Small Displacement	Large Displacement	Large Displacement	Large Displacement	Large Displacement
Elements		All	Large Deflection	Large Strain	Mooney-Rivlin hyper	Blatz-Ko hyper
Input	Strain	Engineering ( $\epsilon$ )	Engineering ( $\epsilon$ )	Log ( $\epsilon_I$ )	*MOONEY uses $\epsilon$	EX & NUXY (based on $\epsilon$ )
	Stress	Engineering ( $\sigma$ )	Engineering ( $\sigma$ )	True ( $\tau$ )	*MOONEY uses $\sigma$	EX & NUXY (based on $\sigma$ )
Solution	Strain	Engineering ( $\epsilon$ )	Engineering ( $\epsilon$ )	Log ( $\epsilon_I$ )	Log ( $\epsilon_I$ )	Green-Lagrange ( $\epsilon_G$ )
	Stress	Engineering ( $\sigma$ )	Engineering ( $\sigma$ )	True ( $\tau$ )	True ( $\tau$ )	2 <sup>nd</sup> Piola-Kirchoff (S)
Output	Strain	Engineering ( $\epsilon$ )	Engineering ( $\epsilon$ )	Log ( $\epsilon_I$ )	Log ( $\epsilon_I$ )	Log ( $\epsilon_I$ )
	Stress	Engineering ( $\sigma$ )	Engineering ( $\sigma$ )	True ( $\tau$ )	True ( $\tau$ )	True ( $\tau$ )

- 可能必须将数据从一种度量**转换**为另一种。
  - 输入数据要用正确的度量。
  - 用一致的度量将 **ANSYS** 结果与已知的响应数据比较。
- 对于**单轴**应力-应变数据，工程应力-工程应变可以通过以下公式转换为真实应力-对数应变：

$$\epsilon_l = \ln (1 + \epsilon)$$

$$\tau = \sigma (1 + \epsilon)$$

- 注意这种应力转换假设材料经历的大应变是不可压缩或几乎不可压缩的。该假设对大塑性应变或超弹材料有效。

- 用相反关系从真实转换为工程:

$$\varepsilon = e^{\varepsilon_l} - 1$$

$$\sigma = \frac{\tau}{1 + \varepsilon}$$

- 从工程应变转换为 Green-Lagrange:

$$\varepsilon_G = \varepsilon + 0.5\varepsilon^2$$

- 相反关系是:

$$\varepsilon = -1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon_G}$$

## A. 综述 ... 练习

---

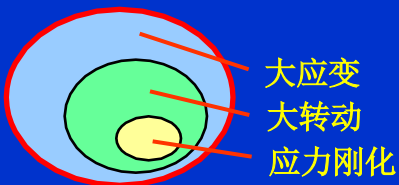
请参考附加练习：

- W9. 几何非线性基础 - 应变度量学习

## B. 三类几何非线性

### 大应变：

- 当材料中的应变变“大”时(比如多于百分之几)，由于变形引起的几何形状改变不能再忽略了。
  - “大”是与问题相关的。
- 大应变分析不再假设应变是无穷小，而是有限的或大的。
- 大应变理论考虑了形状改变 (如厚度, 面积等) 和任意大转动。也固有地考虑了应力刚化效应。



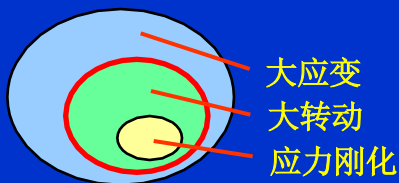
大应变行为包括所有与几何非线性有关的三种现象。



## ... 三类几何非线性

### 大挠度:

- 当一个单元的转动变“大”时 (比如大于1 到2 度), 单元的局部刚度转换为全局分量时将发生显著的改变.
  - “大” 是与问题相关的.
  - 在ANSYS中, 术语**大挠度**和**大转动**可以相互交换使用.
- 大挠度理论考虑了大转动, 但是它假设应变是小应变. 还固有地考虑了应力刚化效应.



大挠度理论是大应变理论的子集.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/118017012067006107>