

5. 已知 l, m 是两条不同的直线, $m \perp$ 平面 α , 则“ $l // \alpha$ ”是“ $l \perp m$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 定义在 R 上函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$, 且对任意的不相等的实数 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立,

若关于 x 的不等式 $f(2mx - \ln x - 3) \geq 2f(3) - f(-2mx + \ln x + 3)$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{1}{2e}, 1 + \frac{\ln 6}{6}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2e}, 1 + \frac{\ln 3}{6}\right]$ C. $\left[\frac{1}{e}, 2 + \frac{\ln 3}{3}\right]$ D. $\left[\frac{1}{e}, 2 + \frac{\ln 6}{3}\right]$

7. 已知 M 是函数 $f(x) = \ln x$ 图象上的一点, 过 M 作圆 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的最小值为 ()

- A. $2\sqrt{2} - 3$ B. -1 C. 0 D. $\frac{5\sqrt{2}}{2} - 3$

8. 点 P 为棱长是 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 球面上的动点, 点 M 为 B_1C_1 的中点, 若满足 $DP \perp BM$, 则动点 P 的轨迹的长度为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}\pi}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{5}\pi}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{5}\pi}{5}$

9. 已知三棱锥 $P - ABC$ 中, O 为 AB 的中点, $PO \perp$ 平面 ABC , $\angle APB = 90^\circ$, $PA = PB = 2$, 则有下列四个结论: ①若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 则 $PC = 2$; ② $\triangle ABC$ 若为等边三角形, 则 $AP \perp BC$; ③当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, PC 与平面 PAB 所成的角的范围为 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$; ④当 $PC = 4$ 时, M 为平面 PBC 内一动点, 若 $OM \parallel$ 平面 PAC , 则 M 在 $\triangle PBC$ 内轨迹的长度为 1. 其中正确的个数是 ().

- A. 1 B. 1 C. 3 D. 4

10. 已知命题 $p: x < 2m + 1, q: x^2 - 5x + 6 < 0$, 且 p 是 q 的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $m > \frac{1}{2}$ B. $m \geq \frac{1}{2}$ C. $m > 1$ D. $m \geq 1$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-1)x + 4, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$ 是 R 上的减函数, 当 a 最小时, 若函数 $y = f(x) - kx - 4$

恰有两个零点, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-2, \frac{1}{2})$
C. $(-1, 1)$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

12. 已知 $A(-\sqrt{3}, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$, P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, $\vec{AP} = \vec{PQ}$, 过点 P 作与 AP 垂直的直线 l 交直线 QB 于点 M , 若点 M 的横坐标为 x , 则 $|x|$ 的取值范围是 ()

- A. $|x| \geq 1$ B. $|x| > 1$ C. $|x| \geq 2$ D. $|x| \geq \sqrt{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 记复数 $z = a + bi$ (i 为虚数单位) 的共轭复数为 $\bar{z} = a - bi$ ($a, b \in R$), 已知 $z = 2 + i$, 则 $\overline{z^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值和最大值分别是 .

15. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $AD = AC = BC = BD = 3$, $AB = CD = 2$, 则该三棱锥的外接球的表面积是 .

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(x_0, y_0)$ 在单位圆 O 上, 设 $\angle xOP = \alpha$, 且 $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$. 若 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\frac{12}{13}$, 则 x_0 的值为 .

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, P, Q 为抛物线 C 上的两个动点, O 为坐标原点.

(I) 若点 F 在线段 PQ 上, 求 $|PQ|$ 的最小值;

(II) 当 $OP \perp PQ$ 时, 求点 Q 纵坐标的取值范围.

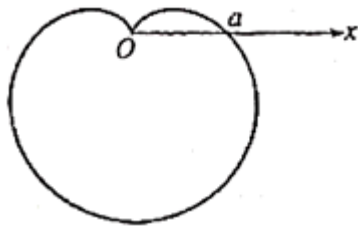
18. (12 分) 已知矩阵 $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $MN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 求矩阵 N ;

(2) 求矩阵 N 的特征值.

19. (12 分) 心形线是由一个圆上的一个定点, 当该圆在绕着与其相切且半径相同的另外一个圆周上滚动时, 这个定点的轨迹, 因其形状像心形而得名, 在极坐标系 Ox 中, 方程 $\rho = a(1 - \sin \theta)$ ($a > 0$) 表示的曲线 C_1 就是一条心形线, 如图, 以极轴 Ox 所在的直线为 x 轴, 极点 O 为坐标原点的直角坐标系 xOy 中. 已知曲线 C_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} + t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$



(1) 求曲线 C_2 的极坐标方程;

(2) 若曲线 C_1 与 C_2 相交于 A 、 O 、 B 三点, 求线段 AB 的长.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - 2x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 的切线方程为 $y = ax + 1$, 求实数 a 的值;

(2) 若函数 $\varphi(x) = mf(x) + 2mx - x^2 + 3$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点, 求实数 m 的取值范围.

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 已知曲线 C :

$$\rho \cos^2 \theta = 4 \rho \sin \theta \quad (\rho > 0), \text{ 直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}). \text{ 直线 } l \text{ 与曲线 } C \text{ 交于 } A, B \text{ 两点.}$$

(I) 写出曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程 (不要求具体过程);

(II) 设 $A(-2, -1)$, 若 $|OA|$, $|AB|$, $|OB|$ 成等比数列, 求 ρ 的值.

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = 3 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta + \rho \cos \theta = 6$.

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2) 若射线 m 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \geq 0$), 设 m 与 C 相交于点 M , m 与 l 相交于点 N , 求 $|MN|$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

由题意知 $\{0,2\} \subseteq A$ 且 $4 \notin A$ ，结合数轴即可求得 a 的取值范围.

【详解】

由题意知， $A \cap B = \{0,2\}$ ，则 $\{0,2\} \subseteq A$ ，故 $a > 2$ ，

又 $4 \notin A$ ，则 $a \leq 4$ ，所以 $2 < a \leq 4$ ，

所以本题答案为 B.

【点睛】

本题主要考查了集合的关系及运算，以及借助数轴解决有关问题，其中确定 $A \cap B$ 中的元素是解题的关键，属于基础题.

2、C

【解析】

由于在复平面内点 Z 的坐标为 $(-1,1)$ ，所以 $z = -1 + i$ ，然后将 $z = -1 + i$ 代入 $\frac{2i}{z}$ 化简后可找到其对应的点.

【详解】

由 $z = -1 + i$ ，所以 $\frac{2i}{z} = \frac{2i}{-1+i} = i(-1-i) = 1-i$ ，对应点 G .

故选：C

【点睛】

此题考查的是复数与复平面内点的对应关系，复数的运算，属于基础题.

3、A

【解析】

计算 $M = \{2, \sqrt{3}, 0\}$ ，再计算真子集个数得到答案.

【详解】

$M = \{y \mid y = \sqrt{4-x^2}, x \in \mathbb{Z}\} = \{2, \sqrt{3}, 0\}$ ，故真子集个数为： $2^3 - 1 = 7$.

故选：A .

【点睛】

本题考查了集合的真子集个数，意在考查学生的计算能力.

4、D

【解析】

根据 $f(x)$ 的图象可得 $f(x)$ 的单调性, 从而得到 $f'(x)$ 在相应范围上的符号和极值点, 据此可判断 $f'(x)$ 的图象.

【详解】

由 $f(x)$ 的图象可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数,

且在 $(0, +\infty)$ 上存在正数 m, n , 使得 $f(x)$ 在 $(0, m), (n, +\infty)$ 上为增函数,

在 (m, n) 为减函数,

故 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不同的零点, 且在这两个零点的附近, $f'(x)$ 有变化,

故排除 A, B.

由 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数可得 $f'(x) \geq 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 上恒成立, 故排除 C.

故选: D.

【点睛】

本题考查导函数图象的识别, 此类问题应根据原函数的单调性来考虑导函数的符号与零点情况, 本题属于基础题.

5、A

【解析】

根据充分条件和必要条件的定义, 结合线面垂直的性质进行判断即可.

【详解】

当 $m \perp$ 平面 α 时, 若 $l \parallel \alpha$ 则“ $l \perp m$ ”成立, 即充分性成立,

若 $l \perp m$, 则 $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$, 即必要性不成立,

则“ $l \parallel \alpha$ ”是“ $l \perp m$ ”充分不必要条件,

故选: A.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 结合线面垂直的性质和定义是解决本题的关键. 难度不大, 属于基础题

6、B

【解析】

结合题意可知 $f(x)$ 是偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 单调递减, 化简题目所给式子, 建立不等式, 结合导函数与原函数的单调性关系, 构造新函数 $h(x), g(x)$, 计算最值, 即可.

【详解】

结合题意可知 $f(x)$ 为偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 单调递减, 故

$f(2mx - \ln x - 3) \geq 2f(3) - f(-2mx + \ln x + 3)$ 可以转换为

$f(2mx - \ln x - 3) \geq f(3)$ 对应于 $x \in [1, 3]$ 恒成立, 即 $|2mx - \ln x - 3| \leq 3$

即 $0 \leq 2mx - \ln x \leq 6$ 对 $x \in [1, 3]$ 恒成立

即 $2m \geq \frac{\ln x}{x}$ 且 $2m \leq \frac{6 + \ln x}{x}$ 对 $x \in [1, 3]$ 恒成立

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 在 $[1, e]$ 上递增, 在 $(e, 3]$ 上递减,

所以 $g(x)_{\max} = \frac{1}{e}$

令 $h(x) = \frac{6 + \ln x}{x}$, $h'(x) = \frac{-5 - \ln x}{x^2} < 0$, 在 $[1, 3]$ 上递减

所以 $h(x)_{\min} = \frac{6 + \ln 3}{3}$. 故 $m \in \left[\frac{1}{2e}, 1 + \frac{\ln 3}{6} \right]$, 故选 B.

【点睛】

本道题考查了函数的基本性质和导函数与原函数单调性关系, 计算范围, 可以转化为函数, 结合导函数, 计算最值, 即可得出答案.

7、C

【解析】

先画出函数图像和圆, 可知 $|MA| = |MB|$, 若设 $\angle AMB = 2\theta$, 则 $|\vec{MA}| = |\vec{MB}| = \frac{1}{\tan \theta}$, 所以

$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = |\vec{MA}|^2 \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} - 3$, 而要求 $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ 的最小值, 只要 $\sin \theta$ 取得最大值, 若设圆

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的圆心为 C , 则 $\sin \theta = \frac{1}{|MC|}$, 所以只要 $|MC|$ 取得最小值, 若设 $M(x, \ln x)$, 则

$|MC|^2 = x^2 + (\ln x - 1)^2$, 然后构造函数 $g(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2$, 利用导数求其最小值即可.

【详解】

记圆 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的圆心为 C , 设 $\angle AMC = \theta$, 则 $|\vec{MA}| = |\vec{MB}| = \frac{1}{\tan \theta}$, $\sin \theta = \frac{1}{|MC|}$, 设

$M(x, \ln x)$, $|MC|^2 = x^2 + (\ln x - 1)^2$, 记 $g(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2$, 则

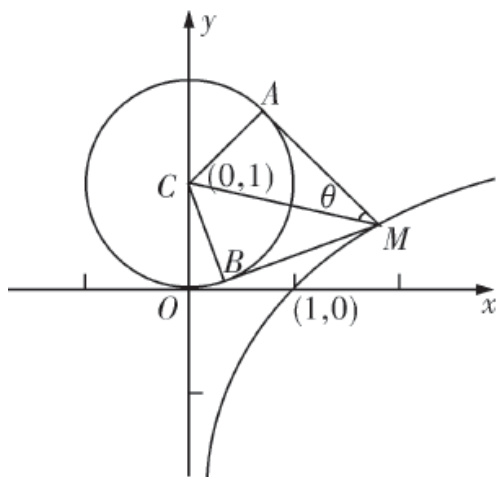
$g'(x) = 2x + 2(\ln x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(x^2 + \ln x - 1)$, 令 $h(x) = x^2 + \ln x - 1$,

因为 $h(x) = x^2 + \ln x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(1) = 0$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) < h(1) = 0$, $g'(x) < 0$; 当 $x > 1$

时, $h(x) > h(1) = 0$, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 2$, 即

$|MC| \geq \sqrt{2}$, $0 < \sin \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = |\vec{MA}|^2 \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} - 3 \geq 0$ (当 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立).

故选：C



【点睛】

此题考查的是两个向量的数量积的最小值，利用了导数求解，考查了转化思想和运算能力，属于难题.

8、C

【解析】

设 B_1B 的中点为 H ，利用正方形和正方体的性质，结合线面垂直的判定定理可以证明出 $BM \perp$ 平面 DCH ，这样可以确定动点 P 的轨迹，最后求出动点 P 的轨迹的长度.

【详解】

设 B_1B 的中点为 H ，连接 CH, DH ，因此有 $CH \perp BM$ ，而 $DC \perp MB$ ，而 $DC, CH \subset$ 平面 CDH ，

$DC \cap CH = C$ ，因此有 $BM \perp$ 平面 DCH ，所以动点 P 的轨迹平面 DCH 与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 的交线. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，所以内切球 O 的半径为 $R = 1$ ，建立如下图所示的以 D 为坐标原点的空间直角坐标系：

因此有 $O(1,1,1), C(0,2,0), H(2,2,1)$ ，设平面 DCH 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，所以有

$$\begin{cases} \vec{m} \perp \overrightarrow{DC} \\ \vec{m} \perp \overrightarrow{DH} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DH} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = (1, 0, -2), \text{ 因此 } O \text{ 到平面 } DCH \text{ 的距离为 } d = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{OD}|}{|\vec{m}|} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以截面圆的半径为： $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，因此动点 P 的轨迹的长度为 $2\pi r = \frac{4\sqrt{5}}{5}\pi$.

故选：C

可得 $OC = OA = OB = \sqrt{2}$, $PC = 2$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/118036070045006076>