专题 03　函数的概念与性质

（思维构建+知识盘点+重点突破+方法技巧）

思维构建·理清脉络

知识盘点·查漏补缺

知识点 1　函数的有关概念

1、函数的概念：一般地，设 A, B 是非空的数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x，按照某种确定的对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的 y 和它对应，那么就称 $f: A \to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x), x \in A$．

2、函数的三要素：

（1）在函数 $y=f(x), x \in A$ 中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；

（2）与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫做函数的值域。显然，值域是集合 B 的子集．

（3）函数的对应关系：$y=f(x), x \in A$．

3、相等函数与分段函数

（1）相等函数：如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，则这两个函数相等，这是判断两函数相等的依据．

（2）分段函数：在函数定义域内，对于自变量x取值的不同区间，有着不同的对应关系，这样的函数称为分段函数。分段函数的定义域是各段定义域的并集，值域是各段值域的并集。分段函数虽然是由几个部分构成，但它表示的是一个函数，各部分函数定义域不可以相交。

知识点 2　函数的单调性

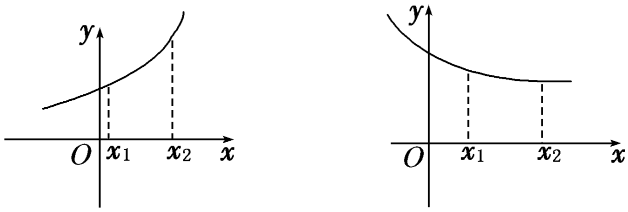
1、单调函数的定义

设函数 $f(x)$的定义域为 I.如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值x_1,x_2，

当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$在区间 D 上是单调递增函数。

当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$在区间 D 上是单调递减函数。

单调性的图形趋势（从左往右）



上升趋势　　下降趋势

2、函数的单调区间

若函数 $y=f(x)$在区间 D 上是增函数或减函数，则称函数 $y=f(x)$在这一区间上具有(严格的)单调性，区间 D 叫做 $y=f(x)$的单调区间.

【注意】

（1）函数单调性关注的是整个区间上的性质，单独一点不存在单调性问题，

故单调区间的端点若属于定义域，则区间可开可闭，若区间端点不属于定义域则只能开.

（2）单调区间 $D\subseteq$定义域 I.

（3）遵循最简原则，单调区间应尽可能大；

（4）单调区间之间可用“，”分开，不能用“∪”，可以用“和”来表示；

3、函数单调性的性质

若函数$f(x)$与$g(x)$在区间D上具有单调性，则在区间D上具有以下性质：

（1）$f(x)$与$f(x)+C$（C为常数）具有相同的单调性.

（2）$f(x)$与$-f(x)$的单调性相反.

（3）当$a>0$时，$af(x)$与$f(x)$单调性相同；当$a<0$时，$af(x)$与$f(x)$单调性相反.

（4）若$f(x)\geq 0$，则$f(x)$与$\sqrt{f(x)}$具有相同的单调性.

（5）若$f(x)$恒为正值或恒为负值，则当$a>0$时，$f(x)$与$\dfrac{a}{f(x)}$具有相反的单调性；

当$a<0$时，$f(x)$与$\dfrac{a}{f(x)}$具有相同的单调性.

（6） $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和与差的单调性（相同区间上）：

简记为：**↗＋↗＝↗；（2）↘＋↘＝↘；（3）↗－↘＝↗；（4）↘－↗＝↘.**

（7）复合函数的单调性：对于复合函数 $y=f[g(x)]$，

若 $t=g(x)$ 在区间 $(a，b)$ 上是单调函数，且 $y=f(t)$ 在区间 $(g(a)，g(b))$ 或 $(g(b)，g(a))$ 上是单调函数

若 $t=g(x)$ 与 $y=f(t)$ 的单调性相同，则 $y=f[g(x)]$ 为增函数

若 $t=g(x)$ 与 $y=f(t)$ 的单调性相反，则 $y=f[g(x)]$ 为减函数．简称"同增异减"．

知识点 3　函数的奇偶性

1、函数的奇偶性

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 是偶函数	关于 y 轴对称
奇函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 是奇函数	关于原点对称

2、函数奇偶性的几个重要结论

（1） $f(x)$ 为奇函数⇔ $f(x)$ 的图象关于原点对称； $f(x)$ 为偶函数⇔ $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称．

（2）如果函数 $f(x)$ 是偶函数，那么 $f(x)=f(|x|)$ ．

（3）既是奇函数又是偶函数的函数只有一种类型，即 $f(x)=0$ ，$x\in D$，其中定义域 D 是关于原点对称的非空数集．

（4）奇函数在两个对称的区间上具有相同的单调性，偶函数在两个对称的区间上具有相反的单调性．

（5）偶函数在关于原点对称的区间上有相同的最大(小)值，取最值时的自变量互为相反数；奇函数在关于原点对称的区间上的最值互为相反数，取最值时的自变量也互为相反数．

知识点 4　函数的周期性

1、周期函数的定义

对于函数 $y=f(x)$ ，如果存在一个非零常数 T，使得当 x 取定义域内的任何值时，都有 $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$，那么就称函数 $f(x)$ 为周期函数，称 T 为这个函数的周期．

2、最小正周期：如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期．

知识点 5　函数的对称性

1、关于线对称

若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$ ，则函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称，特别地，当 $a=b=0$ 时，函数 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称，此时函数 $y=f(x)$ 是偶函数．

2、关于点对称

若函数 $y=f(x)$ 满足 $f\left(2a-x\right)=2b-f\left(x\right)$，则函数 $y=f(x)$ 关于点(a，b)对称，特别地，当 a=0，b=0 时，$f(x)=-f(-x)$，则函数 $y=f(x)$ 关于原点对称，此时函数 $f(x)$ 是奇函数.

重点突破·高分必抢

重难点 01 求函数值域的七种方法

法一、单调性法：如果一个函数为单调函数，则由定义域结合单调性可快速求出函数的最值(值域).

（1）若函数 $y=f(x)$在区间[a，b]上单调递增，则 $y_{max}=f(b)$，$y_{min}=f(a)$.

（2）若函数 $y=f(x)$在区间[a，b]上单调递减，则 $y_{max}=f(a)$，$y_{min}=f(b)$.

（3）若函数 $y=f(x)$有多个单调区间，那就先求出各区间上的最值，再从各区间的最值中决定出最大(小)值．函数的最大(小)值是整个值域范围内的最大(小)值.

【典例 1】（23-24 高三·全国·专题）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x^2-1}$（$x\in\left[2,6\right]$）的最大值为（　）

A．2　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{2}{5}$　　D．$\dfrac{2}{35}$

【答案】B

【解析】因为函数 $y=x^2-1$ 在 $\left[2,6\right]$ 上单调递增，

所以根据单调性的性质知：函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x^2-1}$ 在 $\left[2,6\right]$ 上单调递减，

所以当 $x=2$ 时，函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x^2-1}$ 取到最大值为 $f\left(2\right)=\dfrac{2}{2^2-1}=\dfrac{2}{3}$.故选：B

【典例 2】（23-24 高三·全国·专题）函数 $f\left(x\right)=\lg x+x$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{10},10\right]$，则值域为（　）

A．$\left[-\dfrac{9}{10},11\right]$　　B．$\left[\dfrac{9}{10},11\right]$　　C．$\left[-9,\dfrac{9}{10}\right]$　　D．$\left[-9,11\right]$

【答案】A

【解析】因为函数 $f\left(x\right)=\lg x+x$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{10},10\right]$，

且 $y=\lg x, y=x$ 在 $\left[\dfrac{1}{10},10\right]$ 内单调递增，可知 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{1}{10},10\right]$ 内单调递增，

可知 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{1}{10},10\right]$ 内的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{10}\right)=-\dfrac{9}{10}$，最大值为 $f\left(10\right)=11$，

所以值域为 $\left[-\dfrac{9}{10},11\right]$.故选：A.

法二、图象法：作出函数的图象，通过观察曲线所覆盖函数值的区域确定值域，以下函数常会考虑进行数形结合.

（1）分段函数：尽管分段函数可以通过求出每段解析式的范围再取并集的方式解得值域，但对于一些便于作图的分段函数，数形结合也可很方便的计算值域.

（2）$f\left(x\right)$的函数值为多个函数中函数值的最大值或最小值，此时需将多个函数作于同一坐标系中，然后确定靠下(或靠上)的部分为该$f\left(x\right)$函数的图象，从而利用图象求得函数的值域.

【典例 1】（23-24 高三上·河南新乡·月考）对$\forall x\in\mathrm{R}$，用$M\left(x\right)$表示$f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$中的较大者，记为$M\left(x\right)=\max\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}$，若函数$M\left(x\right)=\max\left\{-x+3,\left(x-1\right)^2\right\}$，则$M\left(x\right)$的最小值为__________.

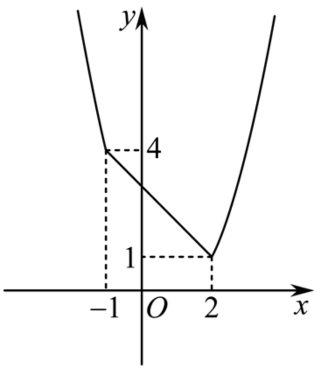
【答案】1

【解析】当$-x+3\geq\left(x-1\right)^2$，即$x^2-x-2\leq0$，即$-1\leq x\leq2$时，$M\left(x\right)=-x+3$，

当$-x+3<\left(x-1\right)^2$，$x^2-x-2>0$，即$x>2$或$x<-1$时，$M\left(x\right)=\left(x-1\right)^2$，

所以$M\left(x\right)=\begin{cases}-x+3,x\in\left[-1,2\right]\\\left(x-1\right)^2,x\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(2,+\infty\right)\end{cases}$，

函数图象如图所示：



由图可得，函数$M\left(x\right)$在$\left(-\infty,-1\right)$，$\left(1,2\right)$上递减，在$\left(2,+\infty\right)$上递增，

所以$M\left(x\right)_{\min}=M\left(2\right)=-2+3=1$.

【典例 2】（23-24 高三上·重庆北碚·月考）高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，用其名字命名的“高斯函数”为：对于实数x，符号$[x]$表示不超过x的最大整数，例如$[-\mathrm{e}]=-3$，$[2.1]=2$，定义函数$f(x)=x-[x]$，则函数$f(x)$的值域为______.

【答案】$[0,1)$

【解析】由高斯函数的定义可得：

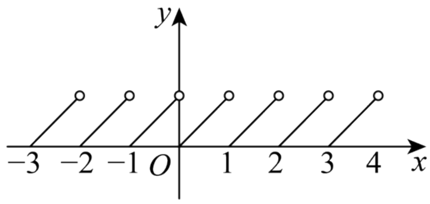
当$0\leq x<1$时，$[x]=0$，则$x-[x]=x$，

当$1\le x<2$时，$[x]=1$，则$x-[x]=x-1$，

当$2\le x<3$时，$[x]=2$，则$x-[x]=x-2$，

当$3\le x<4$时，$[x]=3$，则$x-[x]=x-3$，

易见该函数具有周期性，绘制函数图象如图所示，



由图象知$f(x)$的值域为$[0,1)$.

法三、配方法：主要用于二次函数或可化为二次函数的函数，要特别注意自变量的取值范围.

【典例1】（23-24高三上·全国·专题）函数$f\left(x\right)=\sqrt{-x^2-2x+3}$的值域是（　）

A．$\left[0,2\right]$　　B．$\left[0,+\infty\right)$　　C．$\left[2,+\infty\right)$　　D．$\left(0,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

【答案】A

【解析】令$-x^2-2x+3\ge0$得，$-3\le x\le1$，故定义域为$\left[-3,1\right]$，

$f\left(x\right)=\sqrt{-x^2-2x+3}=\sqrt{-\left(x+1\right)^2+4}\in\left[0,2\right]$.故选：A

【典例2】（2023高三·江西萍乡·开学考）函数$y=\dfrac{1}{-x^2+x+2}$的值域为________.

【答案】$(-\infty,0)\cup[\frac{4}{9},+\infty)$

【解析】由题得$-x^2+x+2\ne0,\therefore x\ne-1$且$x\ne2$.

因为$-x^2+x+2=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}\le\frac{9}{4}$，且$-x^2+x+2\ne0$.

所以原函数的值域为$(-\infty,0)\cup[\frac{4}{9},+\infty)$.

法四、换元法：换元法是将函数解析式中关于x的部分表达式视为一个整体，并用新元t代替，将解析式化归为熟悉的函数，进而解出最值(值域).

（1）在换元的过程中，因为最后是要用新元解决值域，所以一旦换元，后面紧跟新元的取值范围.

（2）换元的作用有两个：

①通过换元可将函数解析式简化，例如当解析式中含有根式时，通过将根式视为一个整体，换元后即

可“消灭”根式，达到简化解析式的目的.

②可将不熟悉的函数转化为会求值域的函数进行处理

【典例 1】（2023 高三上·广东河源·开学考试）函数 $f(x)=2x+\sqrt{1-x}$ 的最大值为______.

【答案】$\frac{17}{8}$

【解析】令 $\sqrt{1-x}=t(t\geq 0)$，则 $x=1-t^2$，所以 $y=-2t^2+t+2=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}(t\geq 0)$，

由二次函数的性质知，对称轴为 $t=\frac{1}{4}$，开口向下，

所以函数 $y=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$ 在 $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ 单调递增，在 $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$ 上单调递减.

所以当 $t=\frac{1}{4}=\sqrt{1-x}$，即 $x=\frac{15}{16}$ 时，

$f(x)$ 取得最大值为 $f(x)_{\max}=f(\frac{15}{16})=\frac{15}{8}+\sqrt{1-\frac{15}{16}}=\frac{17}{8}$.

【典例 2】（23-24 高三·全国·专题）函数 $y=1-x+\sqrt{1-2x}$ 的值域为（　）

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　B. $[0,+\infty)$　　C. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

【答案】C

【解析】令 $\sqrt{1-2x}=t$，$(t\geq 0)$，则 $x=\frac{1-t^2}{2}$，

所以函数 $y=1+\frac{t^2-1}{2}+t=\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}=\frac{(t+1)^2}{2}$，函数在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$t=0$ 时，y 有最小值 $\frac{1}{2}$，

所以函数 $y=1-x+\sqrt{1-2x}$ 的值域为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.故选：C

法五、分离常数法：主要用于含有一次的分式函数，

形如 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 或 $y=\frac{ax^2+bx+e}{cx+d}$（a，c 至少有一个不为零）的函数，求其值域可用此法

以 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 为例，解题步骤如下：

第一步，用分子配凑出分母的形式，将函数变形成 $y=\frac{a}{c}+\frac{e}{cx+d}$ 的形式，

第二步，求出函数 $y=\frac{e}{cx+d}$ 在定义域范围内的值域，进而求出 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的值域。

【典例 1】（2024 高三·全国·专题练习）函数 $y=\frac{1-x}{2x+5}$ 的值域为________.

【答案】$\{y\mid y\in \mathrm{R}$ 且 $y\neq -\frac{1}{2}\}$

【解析】函数的定义域为 $\{y\mid y\neq -\frac{5}{2}\}$，

$$y=\frac{1-x}{2x+5}=\frac{-\frac{1}{2}(2x+5)+\frac{5}{2}}{2x+5}=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{2x+5}\neq -\frac{1}{2},$$

故函数的值域为 $\{y\mid y\in \mathbf{R}$ 且 $y\neq -\frac{1}{2}\}$.

【典例 2】（2024 高三下·北京怀柔·模拟预测）已知函数 $f(x)=\frac{4x^2}{2x^2+1}$，则对任意实数 x，函数 $f(x)$ 的值域是（　）

A．$(0,2)$　　B．$(0,2]$　　C．$[0,2)$　　D．$[0,2]$

【答案】C

【解析】依题意，$f(x)=\frac{2(2x^2+1)-2}{2x^2+1}=2-\frac{2}{2x^2+1}$，

显然 $2x^2+1\geq 1$，则 $0<\frac{2}{2x^2+1}\leq 2$，于是 $0\leq 2-\frac{2}{2x^2+1}<2$，

所以函数 $f(x)$ 的值域是 $[0,2)$.故选：C

法六、判别式法：主要用于含有二次的分式函数，形如：$y=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$

将函数式化成关于 x 的方程，且方程有解，用根的判别式求出参数 y 的取值范围，即得函数的值域。应用判别式法时必须考虑原函数的定义域，并且注意变形过程中的等价性。

另外，此种形式还可使用分离常数法解法。

【典例 1】（23-24 高三·全国·专题练习）求函数 $y=\frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$ 的值域.

【答案】$[1,5]$

【解析】显然$x^2+x+1>0$恒成立，即原函数定义域为R，

由$y=\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$，得$(y-2)x^2+(y+1)x+y-2=0$，

当$y=2$时，$x=0$，符合题意；

当$y\neq 2$时，由$x\in\mathbf{R}$，得$(y-2)x^2+(y+1)x+y-2=0$恒有实数根，

因此$\Delta=(y+1)^2-4(y-2)^2\geq 0$，解得$1\leq y\leq 5$且$y\neq 2$，

所以函数$y=\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$的值域为$[1,5]$.

【典例 2】（23-24 高三上·全国·专题练习）函数$y=\dfrac{x-1}{x^2-6x+7}$，$x>0$的值域为______________.

【答案】$\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}\right]\cup\left(-\dfrac{1}{7},+\infty\right)$

【解析】因为$y=\dfrac{x-1}{x^2-6x+7}$，整理得$yx^2-(6y+1)x+7y+1=0$，

可知关于x的方程$yx^2-(6y+1)x+7y+1=0$有正根，

若$y=0$，则$-x+1=0$，解得$x=1$，符合题意；

若$y\neq 0$，则$x^2-\left(6+\dfrac{1}{y}\right)x+7+\dfrac{1}{y}=0$，

可得$\begin{cases}\dfrac{6+\frac{1}{y}}{2}\leq 0\\ 7+\dfrac{1}{y}<0\end{cases}$或$\begin{cases}\dfrac{6+\frac{1}{y}}{2}>0\\ \Delta=\left(6+\dfrac{1}{y}\right)^2-4\left(7+\dfrac{1}{y}\right)\geq 0\end{cases}$，解得$\dfrac{1}{y}<-7$或$\dfrac{1}{y}\geq 2\sqrt{2}-4$且$\dfrac{1}{y}\neq 0$，

则$-\dfrac{1}{7}<y<0$或$y>0$或$y\leq -\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$；

综上所述：$y>-\dfrac{1}{7}$或$y<-\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$，

即函数$y=\dfrac{x-1}{x^2-6x+7}$，$x>0$的值域为$\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}\right]\cup\left(-\dfrac{1}{7},+\infty\right)$.

法七、导数法：对可导函数$f(x)$求导，令$f'(x)=0$，求出极值点，判断函数的单调性：

如果定义域时闭区间，额函数的最值一定取在极值点处或区间端点处；

如果定义域是开区间且函数存在最值，则函数最值一定取在极值点处。