

5.3.2. & 5.3.3 极大值与极小值 最大值与最小值

【考点梳理】

考点一：函数极值的定义

1. 极小值点与极小值

若函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其他点的函数值都小, $f'(a)=0$, 而且在点 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)<0$, 右侧 $f'(x)>0$, 就把 a 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值点, $f(a)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值.

2. 极大值点与极大值

若函数 $y=f(x)$ 在点 $x=b$ 的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近其他点的函数值都大, $f'(b)=0$, 而且在点 $x=b$ 附近的左侧 $f'(x)>0$, 右侧 $f'(x)<0$, 就把 b 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值点, $f(b)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值.

3. 极大值点、极小值点统称为极值点; 极大值、极小值统称为极值.

考点二：函数极值的求法与步骤

1. 求函数 $y=f(x)$ 的极值的方法

解方程 $f'(x)=0$, 当 $f'(x_0)=0$ 时,

(1)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$, 右侧 $f'(x)<0$, 那么 $f(x_0)$ 是极大值;

(2)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$, 右侧 $f'(x)>0$, 那么 $f(x_0)$ 是极小值.

2. 求可导函数 $f(x)$ 的极值的步骤

(1)确定函数的定义域, 求导数 $f'(x)$;

(2)求方程 $f'(x)=0$ 的根;

(3)列表;

(4)利用 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 随 x 的变化情况表, 根据极值点左右两侧单调性的变化情况求极值.

考点三：函数最值的定义

1. 一般地, 如果在区间 $[a, b]$ 上函数 $y=f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线, 那么它必有最大值和最小值.

2. 对于函数 $f(x)$, 给定区间 I , 若对任意 $x \in I$, 存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x) \geq f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最小值; 若对任意 $x \in I$, 存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x) \leq f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值.

考点四：求函数的最大值与最小值的步骤

函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在区间 (a, b) 内可导, 求 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下:

(1)求函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的极值;

(2)将函数 $f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a)$, $f(b)$ 比较, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值.

技巧训练总结：含参数的函数最值问题的两类情况

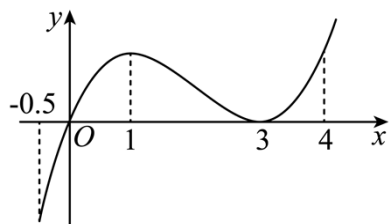
(1)能根据条件求出参数, 从而化为不含参数的函数的最值问题.

(2)对于不能求出参数值的问题, 则要对参数进行讨论, 其实质是讨论导函数大于 0、等于 0、小于 0 三种情况. 若导函数恒不等于 0, 则函数在已知区间上是单调函数, 最值在端点处取得; 若导函数可能等于 0, 则求出极值点后求极值, 再与端点值比较后确定最值.

【题型归纳】

题型一：求函数的极值

1. (2022 下·广东佛山·高二佛山市第四中学校考期末) 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $y=f'(x)$ 的部分图象如图所示, 则 ()



- A. 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递增 B. 函数 $f(x)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递增
- C. 函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极小值 D. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值

【答案】B

【分析】根据导函数的正负性与原函数单调性的关系, 结合极值的定义逐一判断即可.

【详解】由图象可知, 当 $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 上单调递减, A 错误;

当 $x \in (0, 4)$ 时, $f'(x) \geq 0$

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递增, B 正确, C 错误;

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, D 错误.

故选: B

2. (2022·全国·高二专题练习) 求下列函数的极值:

(1) $f(x) = x^2 - 2x - 1$;

(2) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 6$;

(3) $f(x) = |x|$.

【答案】(1) 极小值为 -2 , 无极大值

(2) 极小值为 -6 , 无极大值

(3) 极小值为 0 , 无极大值

【分析】(1)(2) 求导, 得到 $f'(x) = 0$, 再判断出在这一点两侧的单调性, 得到函数的极值情况

(3) 根据函数极值的定义, 只要函数在某点附近的区域上是连续的, 且在这点两侧的单调性相反, 这一点就是函数的极值点.

【详解】(1) $f'(x) = 2x - 2$. 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$.

因为当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以函数在 $x = 1$ 处有极小值, 且极小值为 -2 , 无极大值.

$$(2) f'(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2.$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	无极值	单调递增

所以当 $x = 0$ 时, 函数取得极小值, 且极小值为 -6 , 无极大值.

$$(3) f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}. \text{ 显然函数 } f(x) = |x| \text{ 在 } x = 0 \text{ 处不可导.}$$

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = x' = 1 > 0$, 函数 $f(x) = |x|$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增;

当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (-x)' = -1 < 0$, 函数 $f(x) = |x|$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递减.

故当 $x = 0$ 时, 函数取得极小值, 且极小值为 0 , 无极大值.

3. (2023 上·高二课时练习) 求下列函数的单调区间、极值点和极值:

$$(1) y = x^2 + 2x + 3; (2) y = x + \frac{1}{x}; (3) y = 3x - x^3; (4) y = x^2 e^x.$$

【答案】(1) 答案见解析

(2) 答案见解析

(3) 答案见解析

(4) 答案见解析

【分析】先利用导数与函数单调性的关系求得所求函数的单调区间, 从而可求得其极值点和极值, 由此得解.

【详解】(1) 因为 $y = x^2 + 2x + 3$, 所以 $y' = 2x + 2 = 2(x + 1)$,

令 $y' < 0$, 得 $x < -1$; 令 $y' > 0$, 得 $x > -1$;

所以 $y = x^2 + 2x + 3$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$, 单调递增区间为 $(-1, +\infty)$,

则 $y = x^2 + 2x + 3$ 的极小值点为 $x = -1$, 极小值为 $y = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 3 = 2$,

没有极大值点和极大值.

$$(2) \text{ 因为 } y = x + \frac{1}{x} (x \neq 0), \text{ 所以 } y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2},$$

令 $y' < 0$ ，得 $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$ ；令 $y' > 0$ ，得 $x < -1$ 或 $x > 1$ ；

所以 $y = x^2 + 2x + 3$ 的单调递减区间为 $(-1, 0), (0, 1)$ ，单调递增区间为 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ ，

则 $y = x^2 + 2x + 3$ 的极小值点为 $x = 1$ ，极小值为 $y = 1 + \frac{1}{1} = 2$ ，

极大值点为 $x = -1$ ，极大值为 $y = -1 + \frac{1}{-1} = -2$ 。

(3) 因为 $y = 3x - x^3$ ，所以 $y' = 3 - 3x^2 = -3(x+1)(x-1)$ ，

令 $y' < 0$ ，得 $x < -1$ 或 $x > 1$ ；令 $y' > 0$ ，得 $-1 < x < 1$ ；

所以 $y = x^2 + 2x + 3$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ ，单调递增区间为 $(-1, 1)$ ，

则 $y = x^2 + 2x + 3$ 的极小值点为 $x = -1$ ，极小值为 $y = 3 \times (-1) - (-1)^3 = -2$ ，

极大值点为 $x = 1$ ，极大值为 $y = 3 \times 1 - 1^3 = 2$ 。

(4) 因为 $y = x^2 e^x$ ，所以 $y' = (x^2 + 2x)e^x = 2x(x+2)e^x$ ，

令 $y' < 0$ ，得 $-2 < x < 0$ ；令 $y' > 0$ ，得 $x < -2$ 或 $x > 0$ ；

所以 $y = x^2 + 2x + 3$ 的单调递减区间为 $(-2, 0)$ ，单调递增区间为 $(-\infty, -2), (0, +\infty)$ ，

则 $y = x^2 + 2x + 3$ 的极小值点为 $x = 0$ ，极小值为 $y = 0$ ，

极大值点为 $x = -2$ ，极大值为 $y = (-2)^2 e^{-2} = 4e^{-2}$ 。

题型二：由极值求参数

4. (2023 下·江西上饶·高二统考期末) 若函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - bx + a^2$ 在 $x = 1$ 处有极值 10，则 $b + a =$ ()

A. -7

B. 0

C. 7

D. 0 或 7

【答案】C

【分析】利用导数结合已知，求出 a, b 并验证作答.

【详解】函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - bx + a^2$ ，求导得 $f'(x) = 3x^2 - 2ax - b$ ，

依题意， $\begin{cases} f'(1) = 3 - 2a - b = 0 \\ f(1) = a^2 - a - b + 1 = 10 \end{cases}$ ，解得 $a = 3, b = -3$ 或 $a = -4, b = 11$ ，

当 $a = 3, b = -3$ 时， $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$ ，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无极值，不符合题意，

当 $a = -4, b = 11$ 时， $f'(x) = 3x^2 + 8x - 11 = (3x+11)(x-1)$ ，当 $-\frac{11}{3} < x < 1$ 时， $f'(x) < 0$ ， $x > 1$ 时， $f'(x) > 0$ ，

于是 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，符合题意，所以 $b + a = 7$ 。

故选：C

5. (2023 下·山东烟台·高二山东省烟台第一中学校考开学考试) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{e^x} (a \neq 0)$

的两个极值点分别为 $-\frac{1}{2}$ 和2,若 $f(x)$ 的极大值为1,则 $a+2b+4c$ 的值为()

A. -2

B. 0

C. 2

D. 4

【答案】B

【分析】对函数进行求导,通过两个极值点可得到 $a=2b, c=-b$,然后分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况进行讨论即可

【详解】由 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{e^x}(a\neq 0)$ 可知 $f'(x)=\frac{(2ax+b)e^x-e^x(ax^2+bx+c)}{e^{2x}}=\frac{-ax^2+(2a-b)x+b-c}{e^x}$,

因为函数 $f(x)$ 的两个极值点分别为 $-\frac{1}{2}$ 和2,所以 $-\frac{1}{2}$ 和2是 $f'(x)$ 的零点,

故 $-\frac{1}{2}$ 和2是 $-ax^2+(2a-b)x+b-c=0$ 的实数根, $\therefore -\frac{1}{2}+2=-\frac{2a-b}{-a}$, $-\frac{1}{2}\times 2=\frac{b-c}{-a}$, $\therefore a=2b, c=-b$.

当 $a>0$,即 $b>0$ 时,

当 $x\in(-\infty, -\frac{1}{2})\cup(2, +\infty)$, $f'(x)<0$; 当 $x\in(-\frac{1}{2}, 2)$, $f'(x)>0$;

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\frac{1}{2}, 2)$ 上单调递增,

此时极大值为 $f(2)=\frac{9b}{e^2}=1$, $\therefore b=\frac{e^2}{9}>0$, $\therefore a+2b+4c=2b+2b-4b=0$;

当 $a<0$,即 $b<0$ 时,

当 $x\in(-\infty, -\frac{1}{2})\cup(2, +\infty)$, $f'(x)>0$; 当 $x\in(-\frac{1}{2}, 2)$, $f'(x)<0$;

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{2}, 2)$ 上单调递减,

此时极大值为 $f(-\frac{1}{2})=\frac{-b}{e^{\frac{1}{2}}}=1$, $\therefore b=-\frac{1}{\sqrt{e}}<0$, $\therefore a+2b+4c=2b+2b-4b=0$,

$\therefore$ 只要 $a\neq 0$,无论 a 取何值, $a+2b+4c=0$ 始终成立,

故选: B.

6. (2023 上·浙江宁波·高二镇海中学校考期中) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+b, a, b\in\mathbf{R}$, $f(x)$ 在 $x=2$ 处取到极小值 $\frac{2}{3}$.

(1)求 a, b 的值;

(2)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

【答案】(1) $a=-1, b=2$

(2) $3x+3y-7=0$

【分析】(1)根据极小值列出方程组即可得解;

(2)求出切点处导数可得切线斜率,据此写出切线方程即可.

【详解】(1)因为 $f'(x)=x^2+2ax$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/118104103121006077>