专题 05 解析几何（解答题 10 种考法）

1.（2023·福建厦门·厦门一中校考模拟预测）已知A，B 分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点和上顶点，$|AB|=\sqrt{5}$，直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆的方程；

(2)直线 $l//AB$，与 x，y 轴分别交于点 M，N，与椭圆相交于点 C，D.

（i）求VOCM 的面积与△ODN 的面积之比；

（ii）证明：$|CM|^2+|MD|^2$ 为定值.

【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2)（i）1（ii）证明见解析

【解析】（1）∵A、B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，的两个顶点，且 $|AB|=\sqrt{5}$，

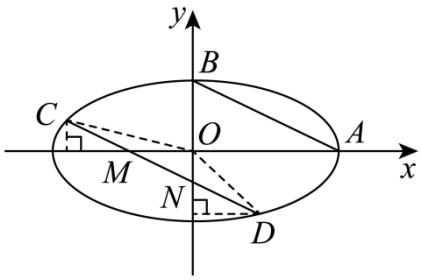
直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，由 $A(a,0)$，$B(0,b)$，得 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$，

又 $k=\frac{b-0}{0-a}=-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}$，

解得 $a=2$，$b=1$，

∴椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）



设直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+m$，则 $M(2m,0)$，$N(0,m)$，

联立方程 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 消去 y，

整理得 $x^2-2mx+2m^2-2=0$，$\triangle=4m^2-8(m^2-4)=32-4m^2>0$，得 $m^2<8$

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，$\therefore x_1+x_2=2m$，$x_1x_2=2m^2-2$.

（ⅰ）$S_{\triangle OCM}=\frac{1}{2}|2m||y_1|$，$S_{\triangle ODN}=\frac{1}{2}|m||x_2|$，

$\therefore \frac{S_{\triangle OCM}}{S_{\triangle ODN}}=\frac{|2y_1|}{|x_2|}=\frac{|2m-x_1|}{|x_2|}=\frac{|x_2|}{|x_2|}=1$，

$\therefore$VOCM 的面积与$\triangle ODN$ 的面积之比为 1；

（ⅱ）证明：$|CM|^2+|MD|^2=(x_1-2m)^2+y_1^2+(x_2-2m)^2+y_2^2$

$=x_1^2-4mx_1+4m^2+\left(-\frac{1}{2}x_1+m\right)^2+x_2^2-4mx_2+4m^2+\left(-\frac{1}{2}x_2+m\right)^2$

$=\frac{5}{4}(x_1+x_2)^2-\frac{5}{2}x_1x_2-5m(x_1+x_2)+10m^2$

$=5m^2-\frac{5}{2}(2m^2-2)-10m^2+10m^2=5$

综上，$|CM|^2+|MD|^2=5$.

2.（2023·全国·河南省实验中学校考模拟预测）已知椭圆$C:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2,C$是椭圆的中心，点$M$为其上的一点满足$|MF_1|\cdot|MF_2|=5,|MC|=2$.

(1)求椭圆C的方程；

(2)设定点$T(t,0)$，过点T的直线l交椭圆C于P,Q两点，若在C上存在一点A，使得直线AP的斜率与直线AQ的斜率之和为定值，求t的范围.

【答案】(1)$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

(2)$t>\sqrt{6}$或$t<-\sqrt{6}$

【解析】（1）设$|MF_1|=r_1,|MF_2|=r_2$，在$\triangle MF_1F_2$中，设$\angle F_1MF_2=\theta$，

$|F_1F_2|^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=4c^2$，

$\therefore 2r_1r_2\cos\theta=r_1^2+r_2^2-4c^2$,又$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{MC}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MF_1}^2+\overrightarrow{MF_2}^2+2\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}\right)=\frac{1}{4}\left(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\theta\right)=\frac{r_1^2}{2}+\frac{r_2^2}{2}-c^2$，

$\therefore MC^2=\frac{r_1^2}{2}+\frac{r_2^2}{2}-c^2=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2}{2}-c^2=2a^2-c^2-5=4$

$\therefore 2a^2-c^2=9,\because a^2=6,\therefore c^2=3,\therefore b^2=3$，

所以椭圆C的方程为：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/118111043040006037