

2022 学年南模中学高一数学第二学期期中考试

数学学科

一、填空题（本大题共有 12 小题，满分 54 分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，1-6 题每个空格填对得 4 分，7-12 题每个空格填对得 5 分，否则一律得 0 分。

1. 终边落在 x 轴负半轴的角 α 的集合为_____.

【答案】 $\{x | x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

【解析】

【分析】 根据终边相同角的表示方法，即可求解.

【详解】 根据终边相同角的表示方法，可得终边 x 轴负半轴的角 α 的集合为 $\{x | x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

故答案为： $\{x | x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. 已知 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{\cos 2\alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} =$ _____

【答案】 -3

【解析】

【分析】 先根据二倍角余弦公式化简，再利用弦化切，代入切的值计算得结果.

【详解】 $\frac{\cos 2\alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$

故答案为： -3

【点睛】 本题考查二倍角余弦公式以及切化弦方法，考查基本分析求解能力，属基础题.

3. 已知 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\tan(\beta - \frac{\pi}{6}) = 3$, 则 $\tan(\alpha + \beta) =$ _____

【答案】 -7

【解析】

【分析】 $\alpha + \beta = (\alpha + \frac{\pi}{6}) + (\beta - \frac{\pi}{6})$, 然后由两角和的正切公式可得.

【详解】 根据两角和的正切公式可得:

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan[(\alpha + \frac{\pi}{6}) + (\beta - \frac{\pi}{6})] = \frac{\tan(\alpha + \frac{\pi}{6}) + \tan(\beta - \frac{\pi}{6})}{1 - \tan(\alpha + \frac{\pi}{6})\tan(\beta - \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 3}{1 - \frac{1}{2} \times 3} = -7.$$

故答案为: -7.

【点睛】 本题考查了两角和的正切公式,属于基础题.解题关键是将 $\alpha + \beta$ 拆成两个已知角 $\alpha + \frac{\pi}{6} + \beta - \frac{\pi}{6}$ 之和.

4. 若 $\cos x = \frac{2m}{m+1}$, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

【解析】

【分析】 通过讨论 $\cos x$ 的取值范围, 即可得出 $\frac{m}{m+1}$, 进而求出 m 的取值范围.

【详解】 由题意, $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \frac{2m}{m+1}, \text{ 而 } -1 \leq \cos x \leq 1,$$

$$\text{则 } -1 \leq \frac{2m}{m+1} \leq 1,$$

$$\text{当 } \frac{2m}{m+1} \geq -1 \text{ 时, 解得 } m < -1 \text{ 或 } m \geq -\frac{1}{3};$$

$$\text{当 } \frac{2m}{m+1} \leq 1 \text{ 时, 解得 } -1 < m \leq 1,$$

$$\text{综上: } m \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$$

$$\text{故答案为: } \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$$

5. 一个扇形的面积为 1, 周长为 4, 则该扇形圆心角的弧度数为_____.

【答案】 2rad

【解析】

【分析】 设扇形的半径为 R , 弧长为 l , 圆心角为 α , 根据题意, 由 $2R + l = 4$, $\frac{1}{2}lR = 1$ 求解.

【详解】 设扇形的半径为 R , 弧长为 l , 圆心角为 α ,

$$\text{则 } 2R + l = 4. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{由扇形的面积公式 } S = \frac{1}{2}lR, \text{ 得 } \frac{1}{2}lR = 1. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 得 } R = 1, l = 2,$$

$$\therefore \alpha = \frac{l}{R} = 2\text{rad}.$$

\therefore 扇形的圆心角为2rad.

故答案为: 2rad

6. 方程 $\lg(\sqrt{3}\sin x) = \lg(-\cos x)$ 的解集为_____.

【答案】 $\left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

【解析】

【分析】根据题意,由对数函数的单调性化简,再结合三角函数的运算,即可得到结果.

【详解】Q $y = \lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, \therefore 由 $\lg(\sqrt{3}\sin x) = \lg(-\cos x)$,

得 $\sqrt{3}\sin x = -\cos x$, 即 $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以 $x = k\pi + \frac{5\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$,

又 $\sin x > 0$, $-\cos x > 0$, $\therefore \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

即 x 是第二象限角, 即解集为 $\left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

故答案为: $\left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

7. 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x \leq \cos x$ 成立的 x 的取值范围为_____.

【答案】 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$

【解析】

【分析】把不等式变形为 $\sin x - \cos x \leq 0$, 不等式的左边用辅助角公式变形为正弦型函数的形式, 运用正弦型函数的正负性, 可以求出 x 的取值范围.

【详解】 $\sin x \leq \cos x \Rightarrow \sin x - \cos x \leq 0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \Rightarrow 2k\pi + \pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + 2\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即

$2k\pi + \frac{5\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{9\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$, 又因为 $x \in (0, 2\pi)$, 所以 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$.

故答案为 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$

【点睛】本题考查了三角不等式的解法, 应用辅助角公式是解题的关键.

本题还可以在同一直角坐标系内画出函数 $y = \sin x$ 、 $y = \cos x$, $x \in (0, 2\pi)$ 的图象,运用数形结合思想可以解出, 还可以画出单位圆,利用正弦线和余弦线的知识也可以解答出来.

8. 若 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, 则函数 $y = \tan 2x \tan^3 x$ 的最大值为_____.

【答案】-8

【解析】

【详解】试题分析: $\because \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \therefore \tan x \in (1, \sqrt{2})$, 设 $t = \tan^2 x$

$$\therefore y = \frac{2t^2}{1-t} = -\frac{2(t-1)^2 + 4(t-1) + 2}{t-1} = -2(t-1) - \frac{2}{t-1} - 4 \leq -2 \times 2 - 4 = -8 \text{ 当且仅当 } t = 2 \text{ 时成立}$$

考点: 函数单调性与最值

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知任意角 θ 以坐标原点为顶点, x 轴的非负半轴为始边, 若终点经过点 $P(x_0, y_0)$, 且 $|OP| = r$ ($r > 0$), 定义: $\text{sos}\theta = \frac{y_0 + x_0}{r}$, 称“ $\text{sos}\theta$ ”为“正余弦函数”, 对于“正余弦函数 $y = \text{sos}\theta$ ”, 有同学得到以下性质, 其中正确的是_____. (填上所有正确的序号)

- ①该函数的值域为 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; ②该函数的图象关于原点对称; ③该函数的图象关于直线 $x = \frac{3}{4}\pi$ 对称;
④该函数为周期函数, 且最小正周期为 2π .

【答案】①④

【解析】

【分析】利用三角函数的定义得到 $x_0 = r\cos x$, $y_0 = r\sin x$,

$$y = \text{sos}x = \frac{y_0 + x_0}{r} = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \text{再逐项判断.}$$

【详解】对于①: 由三角函数的定义可知 $x_0 = r\cos x$, $y_0 = r\sin x$,

$$\therefore y = \text{sos}x = \frac{y_0 + x_0}{r} = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \text{故①正确;}$$

对于②: 由于 $y = \text{sos}x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\therefore f(0) = \sqrt{2}\sin\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \neq 0$,

\therefore 函数关于原点对称是错误的, 故②错误;

对于③：当 $x = \frac{3}{4}\pi$ 时， $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\pi = 0 \neq \pm\sqrt{2}$ ，

\therefore 图象关于 $x = \frac{3}{4}\pi$ 对称是错误的，故③错误：

对于④：由于 $y = \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ， \therefore 函数为周期函数，且最小正周期为 2π ，故④正确，

综上，故正确的是①④。

故答案为：①④

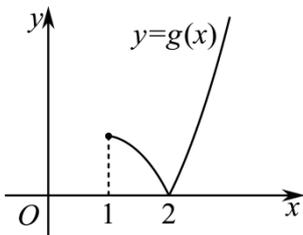
10. 函数 $f(x) = |x^2 - 2x| + 4 - \sin\frac{\pi x}{4}$ ($1 \leq x \leq 6$) 的值域为_____。

【答案】 [3, 29]

【解析】

【分析】 分析函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, 6]$ 的单调性，利用单调性得出函数 $y = f(x)$ 的最大值和最小值，由此可得出函数 $y = f(x)$ ($1 \leq x \leq 6$) 的值域。

【详解】 设 $g(x) = |x^2 - 2x|$ ， $h(x) = 4 - \sin\frac{\pi x}{4}$ ，作出函数 $y = g(x)$ 在区间 $[1, 6]$ 上的图象如下图所示：



可知函数 $y = g(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减，在区间 $[2, 6]$ 上单调递增，

当 $1 \leq x \leq 6$ 时， $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi x}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$ ，由 $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi x}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ ，得 $1 \leq x \leq 2$ ，由 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi x}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$ ，得 $2 \leq x \leq 6$ ，所

以，函数 $y = h(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减，在区间 $[2, 6]$ 上单调递增，

则函数 $f(x) = g(x) + h(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减，在区间 $[2, 6]$ 上单调递增，

所以， $f(x)_{\min} = f(2) = |2^2 - 2 \times 2| + 4 - \sin\frac{2\pi}{4} = 3$ ，

又 $f(1) = |1^2 - 2 \times 1| + 4 - \sin\frac{\pi}{4} = 5 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $f(6) = |6^2 - 2 \times 6| + 4 - \sin\frac{6\pi}{4} = 29$ ，

$f(1) < f(6)$ ， $\therefore f(x)_{\max} = f(6) = 29$ ，

因此，函数 $f(x) = |x^2 - 2x| + 4 - \sin \frac{\pi x}{4} (1 \leq x \leq 6)$ 的值域为 $[3, 29]$.

故答案为 $[3, 29]$.

【点睛】 本题考查函数值域的求解，将函数分拆成两个简单函数来分析单调性，进而分析原函数的单调性是解题的关键，考查分析问题和解决问题的能力，属于中等题.

11. 已知 $3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 5\sin\alpha$ ，则 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta$ 的取值范围是_____.

【答案】 $\left[0, \frac{13}{9}\right] \cup \{2\}$

【解析】

【分析】 根据题意得到 $0 \leq \sin^2\beta = \frac{5}{2}\sin\alpha - \frac{3}{2}\sin^2\alpha \leq 1$ ，求得 $0 \leq \sin\alpha \leq \frac{2}{3}$ 或 $\sin\alpha = 1$ ，结合 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \frac{5}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin^2\alpha$ ，即可求解.

【详解】 因为 $3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 5\sin\alpha$ ，可得 $0 \leq \sin^2\beta = \frac{5}{2}\sin\alpha - \frac{3}{2}\sin^2\alpha \leq 1$ ，
解得 $0 \leq \sin\alpha \leq \frac{2}{3}$ 或 $\sin\alpha = 1$ ，

又由 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \frac{5}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin^2\alpha$

因为 $0 \leq \sin\alpha \leq \frac{2}{3}$ ，或 $\sin\alpha = 1$ ，所以 $\frac{5}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin^2\alpha \in \left[0, \frac{13}{9}\right] \cup \{2\}$.

故答案为: $\left[0, \frac{13}{9}\right] \cup \{2\}$.

12. 已知函数 $f(x) = 2\sin \frac{\omega}{2} x \cos \frac{\omega}{2} x - \cos \omega x$ ，($\omega > 0$)， $x \in \mathbb{R}$ 若函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围为_____.

【答案】 $\left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right]$

【解析】

【分析】 先由二倍角公式和辅助角公式得到 $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$ ，再令 $f(x) = 0$ ，得到

$x = \frac{k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，根据函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，得到 $x = \frac{k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega} \notin (\pi, 2\pi)$ ，然后由 $\frac{k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega} \in (\pi, 2\pi)$ ，得到 k 的范围，然后将函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，转化为在

$\left(\omega - \frac{1}{4}, 2\omega - \frac{1}{4}\right)$ 内没有整数求解.

【详解】解: $f(x) = \sin \omega x - \cos \omega x = \sqrt{2} \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$,

由 $f(x) = 0$, 得 $\omega x - \frac{\pi}{4} = k\pi$, 即 $x = \frac{k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Q 函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点,

$\therefore x = \frac{k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega} \notin (\pi, 2\pi)$, 若 $\frac{k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega} \in (\pi, 2\pi)$.

则 $\omega - \frac{1}{4} < k < 2\omega - \frac{1}{4}$,

若函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 等价于在 $\left(\omega - \frac{1}{4}, 2\omega - \frac{1}{4}\right)$ 内没有整数,

则 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \geq 2\pi - \pi = \pi$, 即 $0 < \omega \leq 1$,

若 $\left(\omega - \frac{1}{4}, 2\omega - \frac{1}{4}\right)$ 内有整数,

则当 $k=0$ 时, 由 $\omega - \frac{1}{4} < 0 < 2\omega - \frac{1}{4}$, 得 $\begin{cases} \omega < \frac{1}{4} \\ \omega > \frac{1}{8} \end{cases}$, 即 $\frac{1}{8} < \omega < \frac{1}{4}$

若当 $k=1$ 时, 由 $\omega - \frac{1}{4} < 1 < 2\omega - \frac{1}{4}$, 得 $\begin{cases} \omega < \frac{5}{4} \\ \omega > \frac{5}{8} \end{cases}$, 即 $\frac{5}{8} < \omega < \frac{5}{4}$, 此时 $\frac{5}{8} < \omega \leq 1$.

当 $k=2$ 时, 由 $\omega - \frac{1}{4} < 2 < 2\omega - \frac{1}{4}$, 得 $\begin{cases} \omega < \frac{9}{4} \\ \omega > \frac{9}{8} \end{cases}$, 即 $\frac{9}{8} < \omega < \frac{9}{4}$ 此时 ω 超出范围.

即若 $\left(\omega - \frac{1}{4}, 2\omega - \frac{1}{4}\right)$ 内有整数, 则 $\frac{1}{8} < \omega < \frac{1}{4}$ 或 $\frac{5}{8} < \omega \leq 1$.

则若 $\left(\omega - \frac{1}{4}, 2\omega - \frac{1}{4}\right)$ 内没有整数, 则 $0 < \omega \leq \frac{1}{8}$ 或 $\frac{1}{4} \leq \omega \leq \frac{5}{8}$,

故答案为: $\left(0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right]$.

- B. 满足条件的辅助角 φ 一定是方程 $\tan x = \frac{b}{a}$ 的解
- C. 满足方程 $\tan x = \frac{b}{a}$ 的角 x 一定都是符合条件的辅助角 φ
- D. 在平面直角坐标系中, 满足条件的辅助角 φ 的终边都重合

【答案】C

【解析】

【分析】首先利用辅助角公式对式子化简, 得到辅助角的正弦值、余弦值.

选项 A、B 可直接代入来说明是正确的; 选项 C 通过所求解的不确定性来说明是错误的; 选项 D 根据三角函数的定义来说明是正确的.

【详解】因为 $a \sin \theta + b \cos \theta$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \right)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \varphi),$$

其中, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $ab \neq 0$.

选项 A: 由上述解答知, 选项 A 正确.

选项 B: 因为 $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{b}{a}$, 所以满足条件的辅助角 φ 一定是方程 $\tan x = \frac{b}{a}$ 的解, 故选项 B 正确.

选项 C: 因为由 $\tan x = \frac{b}{a}$ 可以得到 $\begin{cases} \sin x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$, 但也可以得到 $\begin{cases} \sin x = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos x = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$,

所以满足方程 $\tan x = \frac{b}{a}$ 的角 x 不一定是符合条件的辅助角 φ , 故选项 C 不正确.

选项 D: 因为当一个角的正弦值、余弦值都确定时, 它与单位圆的交点就确定了, 所以当两个角的正弦值、余弦值都相等时, 它们与单位圆的交点必在同一点, 所以它们的终边相同, 故选项 D 正确.

故选: C

16. 有一个解三角形的题因纸张破损有一个条件不清, 具体如下: “在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a = \sqrt{3}$, $B = 45^\circ$, _____, 求角 A.” 经推断破损处的条件为三角形一边的长度, 且答案提示 $A = 60^\circ$. 在同学的相互讨论中, 甲同学认为应该填写的条件为: “ $b = \sqrt{2}$ ”

；乙同学认为应该填写条件为“ $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ ”，则下列判断正确的是（ ）

- A. 甲正确，乙不正确
B. 甲不正确，乙正确
C. 甲、乙都正确
D. 甲、乙都不正确

【答案】B

【解析】

【分析】根据 $A = 60^\circ$ ， $B = 45^\circ$ ，得到 $C = 75^\circ$ ，再利用正弦定理求得边 b ， c ，验证即可.

【详解】可得 $A = 60^\circ$ ， $B = 45^\circ$ ，

$\therefore C = 75^\circ$ ，

又 $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ，

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，

则 $\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 75^\circ}$ ，

解得 $b = \sqrt{2}$ ， $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ 。

若条件为 $b = \sqrt{2}$ ，

则由正弦定理得： $\frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ，解得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore A = 60^\circ$ 或 $A = 120^\circ$ ，答案不唯一，不符合题意，

若条件为 $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ ，

则由正弦定理得： $\frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}}{\sin 75^\circ} = 2$ ，解得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore A = 60^\circ$ 或 $A = 120^\circ$ ，

$Q c > a$ ， $\therefore A = 60^\circ$ ，答案唯一，符合题意，

故答案为 $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ ，

故选：B.

三、解答题（本大题满分 78 分）本大题共有 5

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/125022342112011132>