陕西省榆林市2023-2024学年高一下学期期末数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合$A=\left\{x\middle|y=\ln\left(x+1\right)\right\}$，$B=\left\{x\middle|y=\sqrt{x}\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\left(-\infty,-1\right)$　　B．$\left(-\infty,0\right)$　　C．$\left(-1,+\infty\right)$　　D．$\left[0,+\infty\right)$

2．已知复数$z=1+2\mathrm{i}-\mathrm{i}^9$（i为虚数单位），则$\bar{z}$的虚部为（　）

A．-1　　B．1　　C．2　　D．3

3．已知边长为2的正方形$ABCD$中，点E，F分别为AB，BC的中点，则$\overline{AF}\cdot\overline{AE}=$（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．某种化学物质的衰变满足幂函数模型，每周该化学物质衰减20%，则经过n星期后，该化学物质的存量低于该化学物质的$\frac{1}{5}$，则n的最小值为（　）（参考数据：$\lg 2\approx 0.3010$）

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

5．已知平面向量$\vec{a}=\left(1,2\right)$，$\vec{b}=\left(2,3\right)$，则向量$\vec{b}-\vec{a}$在$\vec{a}$上的投影向量为（　）

A．$\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$　　B．$\left(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5}\right)$　　C．$\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$　　D．$\left(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5}\right)$

6．已知$a,b>0$，满足点$\left(\frac{1}{a+1},\frac{1}{b}\right)$在直线$x+y=1$上，则$2a+b$的最小值为（　）

A．$1+2\sqrt{2}$　　B．$1+\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

7．在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a，b，c，若$B=60°$，$b=3\sqrt{3}$，$\triangle ABC$只有一个解，则c的取值范围为（　　）

A．$\left(0,3\sqrt{3}\right)$　　B．$\left(0,3\sqrt{3}\right]$　　C．$\left(3\sqrt{3},6\right)$　　D．$\left(0,3\sqrt{3}\right]\cup\{6\}$

8．已知正三棱锥$O-ABC$，满足$OA\perp OB$，$OB\perp OC$，$OA\perp OC$，$OA=3$，点P在底面ABC上，且$|OP|=\sqrt{6}$，则点P的轨迹长度为（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$　　D．π

二、多选题

9．已知a，b为两条不同的直线，α，β为两个不同的平面，则下列说法正确的是（　　）

A．若$a//b$，$b\subset\alpha$，$a\not\subset\alpha$，则$a//\alpha$

B．若$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，则$a//b$

C．若$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=b$，$a\perp b$，则$a\perp\beta$

D．若a，b为两条异面直线，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a//\beta$，$b//\alpha$，则$\alpha//\beta$

10．已知随机事件A,B，满足$P\left(A\right)=0.3$，$P\left(B\right)=0.6$，则下面结论不正确的是（　　）

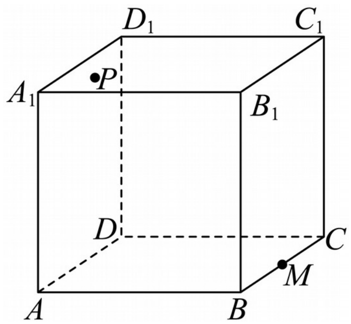
A．若A,B为互斥事件，则$P\left(A+B\right)=0.18$

B．若$P\left(A+B\right)=0.8$，则A,B可能为互斥事件

C．若A,B为独立事件，则$P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=0.28$

D．若 $P\left(A\bar{B}\right)=0.12$，则 A,B 可能不为独立事件

11．如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，点 M 为 BC 的中点，点 P 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内包含边界的动点，则（　）



A．直线 B_1M 到平面 A_1D_1DA 的距离为2

B．点 A 到 C_1M 到的距离为 $\frac{\sqrt{30}}{5}$

C．直线 MP 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上任意直线所成角中的最小角的正弦值为 $\frac{2}{3}$

D．满足 $MP\perp AM$ 的点 P 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

三、填空题

12．已知甲、乙、丙三名同学站在一排进行拍照，则甲在中间的概率___.

13．已知 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=$___.

14．已知甲、乙、丙三人进行乒乓球比赛，每人输两次即被淘汰，比赛顺序为甲、乙先比，丙轮空，之后胜者与丙比赛，败者轮空，以此类推直到比出获胜者，假如甲、乙、丙三人实力相当，则丙获胜的概率为___.

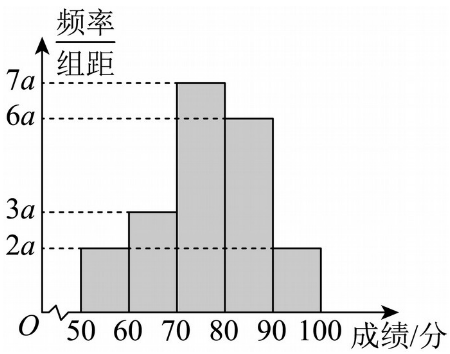
四、解答题

15．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=9$.

(1)求$|3\vec{a}-\vec{b}|$；

(2)若向量$2\vec{b}+k\vec{a}$与$\vec{b}-2\vec{a}$相互垂直，求实数k的值.

16．某学校高一年级进行某学科的考试，所有学生的成绩做成的频率分布直方图如图所示，第一组成绩在$[50,60)$，第二组成绩在$[60,70)$，第三组成绩在$[70,80)$，第四组成绩在$[80,90)$，第五组成绩在$[90,100]$.



(1)求图中a的值；

(2)年级准备表扬在本次考试中成绩在前$\frac{1}{4}$的同学，定为成绩优胜，估计此次考试成绩优胜的分数线；

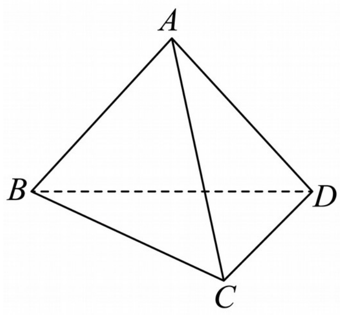
(3)现从以上各组中用分层随机抽样的方法选取20人，进行成绩情况调研.若抽取的同学中，第二组的成绩的平均数和方差分别为65和40，第四组的成绩的平均数和方差分别为83和70，据此估计第二组和第四组抽取的所有同学中成绩的方差.

17．已知$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a、b、c，点D为边BC上一点，满足$\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

(1)求证：AD [illegible] b；

(2)若AD为内角A的角平分线，满足$\left|\overline{BD}\right| = 2\left|\overline{CD}\right|$，求$\sin A$.

18．如图，已知三棱锥$A-BCD$，三角形ABD为等边三角形，$BD = AC$，$BC \perp CD$.



(1)若点O为BD的中点，证明：$AO \perp OC$；

(2)当$BC = CD$时，求异面直线AB与CD所成角的余弦值；

(3)当异面直线AB与CD所成角的余弦值为$\frac{1}{4}$时，求$\frac{BC}{CD}$的值.

19．在锐角三角形ABC中，内角A,B,C所对应的边分别为a，b，c，点M，N分别为边

BC,AB的中点，满足$\overline{AM} \cdot \overline{CN} = 0$.

(1)求边a，b，c之间的关系；

(2)求$\cos \angle B$的值域.

参考答案：

1．D

【分析】根据根式和对数函数求集合A,B，再根据交集运算求解.

【详解】对于$y=\ln(x+1)$可知$x+1>0$，解得$x>-1$，即$A=\{x\mid x>-1\}$；

对于$y=\sqrt{x}$可知$x\geq 0$，即$B=\{x\mid x\geq 0\}$；

所以$A\cap B=[0,+\infty)$.

故选：D.

2．A

【分析】根据虚数单位的性质可得$z=1+\mathrm{i}$，再根据共轭复数以及虚部的定义分析判断.

【详解】因为$z=1+2\mathrm{i}-\mathrm{i}^9=1+2\mathrm{i}-\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，则$\bar{z}=1-\mathrm{i}$，

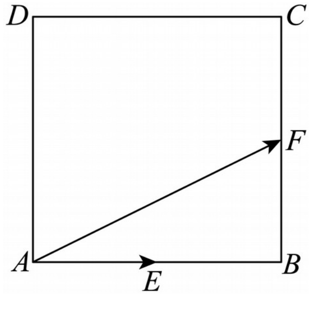
所以$\bar{z}$的虚部为-1.

故选：A.

3．B

【分析】根据题意结合数量积的几何意义运算求解.

【详解】因为点E，F分别为AB，BC的中点，



则$|\overrightarrow{AE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=1$，且$\overrightarrow{AF}$在$\overrightarrow{AE}$方向上的投影数量为2，

所以$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE}=1\times 2=2$.

故选：B.

4．C

【分析】根据题目列出函数关系式$y=0.8^n$，再根据题目进行求解即可.

【详解】设某种化学物质的原始量为1，经过n星期后，该化学物质的存量为y，则

$y=0.8^n$，

当经过n星期后，该化学物质的存量低于该化学物质的$\frac{1}{5}$时，有$y=0.8^n<\frac{1}{5}$，

故$n>\log_{0.8}\frac{1}{5}=\frac{\lg\frac{1}{5}}{\lg\frac{4}{5}}=\frac{\lg 1-\lg 5}{\lg 4-\lg 5}=\frac{0-\lg\frac{10}{2}}{2\lg 2-\lg\frac{10}{2}}=\frac{-1+\lg 2}{3\lg 2-1}\approx 7.2$，故$n=8$.

故选：C.

5．C

【分析】先算出$\vec{b}-\vec{a}=(1,1)$，再利用投影向量的计算公式和向量坐标的数量积，数乘运算即可求出答案.

【详解】因为$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,3)$，所以$\vec{b}-\vec{a}=(1,1)$，

则$\frac{(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\vec{a}}{\sqrt{5}}=\frac{3}{5}(1,2)=\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$.

故选：C.

6．A

【分析】利用点在直线上可以得到$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b}=1$，然后再利用基本不等式即可求解.

【详解】点$\left(\frac{1}{a+1},\frac{1}{b}\right)$在直线$x+y=1$上可得$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b}=1$，

$2a+b=\left[2\left(a+1\right)+b\right]\times\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b}\right)-2=1+\frac{2\left(a+1\right)}{b}+\frac{b}{a+1}\geq 1+2\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{2\left(a+1\right)}{b}=\frac{b}{a+1}$时不等式取等号，故最小值为$1+2\sqrt{2}$.

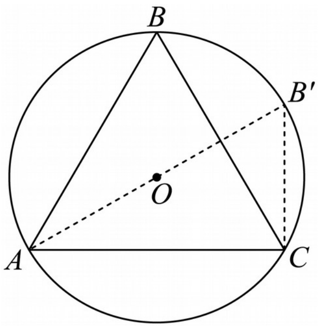
故选：A.

7．D

【分析】利用正弦定理求外接圆半径，结合圆的性质分析求解.

【详解】$\triangle ABC$的外接圆O的半径$R=\frac{b}{2\sin B}=\frac{3\sqrt{3}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=3$，

如图所示，$AC=3\sqrt{3}$，AB'是圆的直径.



可知点B在优弧$\overset{\frown}{AC}$上（不包括端点），

当B为B'时，此时c取到最大值$2R=6$；

当点B从点A到B'时，此时c越来越大，且$c\in\left(0,6\right)$；

当点B从点B'到C时，此时c越来越小，且$c\in\left(3\sqrt{3},6\right)$；

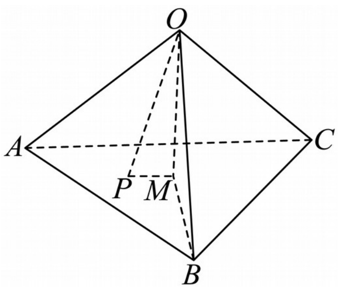
综上所述：若$\triangle ABC$只有一个解，则c的取值范围为$\left(0,3\sqrt{3}\right]\cup\left\{6\right\}$.

故选：D.

8．C

【分析】设M为等边三角形ABC的中心，求出PM，求出M点到AC的距离可得P点轨迹是以M点为圆心以$\sqrt{3}$为半径，且与$\triangle ABC$的三边各有2个交点的三段相等圆弧，求出圆弧所对的圆心角可得答案.

【详解】



，

$$AB = BC = AC = 3\sqrt{2}$$

设M为等边三角形ABC的中心，则$OM \perp$平面ABC，

连接BM，则$BM = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3\sqrt{2} = \sqrt{6}$，

所以$OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = \sqrt{3}$，

$PM = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{3}$，

而M点到AC的距离为$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} < \sqrt{3} = PM$，

M点到A的距离为$\sqrt{6} > \sqrt{3} = PM$，

所以P点轨迹是以M点为圆心，以$\sqrt{3}$为半径，

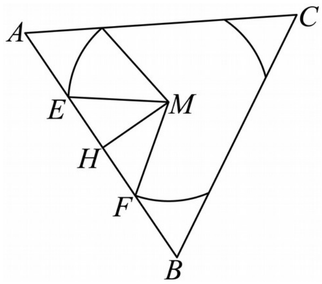
且与$\triangle ABC$的三边各有2个交点的三段相等圆弧，如图，

设圆弧与AB相交于E、F两点，作$MH \perp AB$，则$ME = MF = \sqrt{3}$，

$MH = \frac{\sqrt{6}}{2}$，所以$EH = \sqrt{ME^2 - MH^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$，可得$\angle EMH = \frac{\pi}{2}$，

可得 P 点的轨迹在 $\triangle ABC$ 内部的弧所对的圆心角为 $2\pi-\frac{3\pi\pi}{2}=\frac{\ }{2}$，

则弧长为 $\frac{\pi 3\pi}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{\ }}{2}$.



故选：C.

【点睛】关键点点睛：解题的关键点是确定 P 点的轨迹.

9．ABD

【分析】根据线面平行的判定定理判断 A，根据线面垂直的性质判断 B，当 $a\not\subset\alpha$ 时即可判断 C，根据异面直线的定义及线面平行的性质定理判断 D.

【详解】对于 A：若 $\boldsymbol{a//b}$，$b\subset\alpha,a\not\subset\alpha$，根据线面平行的判定定理可知 $a//\alpha$，故 A 正确；

对于 B：若 $a\perp\alpha,b\perp\alpha$，根据线面垂直的性质可知 $\boldsymbol{a//b}$，故 B 正确；

对于 C：当 $a\subset\alpha$ 时，$\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=b,a\perp b$，由面面垂直的性质定理可得 $a\perp\beta$，

当 $a\not\subset\alpha$ 时，$\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=b,a\perp b$，则 $a//\beta$ 或 $a\subset\beta$ 或 a 与 β 相交，故 C 错误；

对于 D：因为 $a\subset\alpha$，$b//\alpha$，所以存在 $b'\subset\alpha$ 使得 $b'//b$，又 $b\subset\beta$，$b'\not\subset\beta$，所以 $b'//\beta$，

又 $a//\beta$ 且 a,b 为异面直线，所以平面 α 内的两直线 b'、a 必相交，

所以 $\alpha//\beta$，故 D 正确.

故选：ABD.

10．ABD

【分析】利用事件互斥和独立的性质即可求解.

【详解】对于AB，A,B为互斥事件，则$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)=0.9$，故AB错；

对于C，因为$P\left(A\right)=0.3,P\left(B\right)=0.6$，所以$P\left(\overline{A}\right)=0.7,P\left(\overline{B}\right)=0.4$，

因为$P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)\times P\left(\overline{B}\right)=0.28$，故C对；

对于D，$P\left(A\overline{B}\right)=P\left(A\right)\times P\left(\overline{B}\right)=0.12$，则$A,\overline{B}$为独立事件，

所以随机事件A,B为独立事件，故D错.

故选：ABD.

11．ACD

【分析】对于A：根据题意结合面面垂直的性质分析判断；对于B：利用等面积法求点到线的距离；对于C：分析可知直线MP与平面$A_1B_1C_1D_1$上任意直线所成角中的最小角即为直线MP与平面$A_1B_1C_1D_1$所成角的最小值，结合线面夹角分析判断；对于D：根据垂直关系可得$AM\perp$平面$RNMS$，进而可得结果.

【详解】对于选项A：因为平面B_1C_1CB // 平面A_1D_1DA，且$B_1M\subset$平面B_1C_1CB，

所以直线B_1M到平面A_1D_1DA的距离，即为点B_1到平面A_1D_1DA的距离，

且$A_1B_1\perp$平面A_1D_1DA，所以直线B_1M到平面A_1D_1DA的距离为$A_1B_1=2$，故A正确；

对于选项B：连接AM,C_1M,AC_1，设点A到C_1M到的距离为d，