2025高考数学二轮复习抽象函数问题

抽象函数是指没有具体地给出解析式,只给出它的一些特征或性质的函数;抽象函数型综合问题,一般通过对函数性质的代数表述,综合考查学生对于数学符号语言的理解和接受能力,考查对于函数性质的代数推理和论证能力,考查学生对于一般和特殊关系的认识,是考查学生能力的较好途径.抽象函数问题既是高考的难点,又是近几年高考的热点.

赋值法的应用

例1(1)(多选题)(2023新高考Ⅰ,11)已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$,则(ABC)

A.$f(0)=0$

B.$f(1)=0$

C.$f(x)$是偶函数

D.$x=0$为$f(x)$的极小值点

解析 对于选项A,令$x=0,y=0,f(0)=0$,所以A正确;

对于选项B,令$x=1,y=1,f(1\times1)=1^2\times f(1)+1^2\times f(1)=2f(1)$,解得$f(1)=0$,所以B正确;

对于选项C,令$x=-1,y=-1,f[(-1)\times(-1)]=(-1)^2\times f(-1)+(-1)^2\times f(-1)=2f(-1)$,解得$f(-1)=0$;再令$x=-1,y=x,f[(-1)\times x]=x^2\times f(-1)+(-1)^2\times f(x),f(-x)=f(x)$,所以C正确;

对于选项D,用特值法,函数$f(x)=0$,为常数函数,且满足$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$,而常数函数没有极值点,所以D错误.故选ABC.

(2)(2024辽宁抚顺一模)已知定义域为$\{x|x\neq 0\}$的函数$f(x)$满足对任意$x\neq 0,y\neq 0$,有$f(x+y)[f(x)+f(y)]=f(x)f(y)$,$f(1)=2$,且当$x\in(0,+\infty)$时,$f(x)>0$恒成立,则下列结论正确的是(　C　)

A.$f(\frac{2}{3})=6$

B.$f(2x)=2f(x)$

C.$f(x)$为奇函数

D.$f(x)$在区间$(0,+\infty)$是单调递增函数

解析 令 $x=y=\frac{1}{3}$,则 $f\left(\frac{2}{3}\right)\left[f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right]=f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{1}{3}\right)$,

所以 $2f\left(\frac{2}{3}\right)f\left(\frac{1}{3}\right)=f^2\left(\frac{1}{3}\right)$,因为当 $x\in(0,+\infty)$时,$f(x)>0$,

所以 $2f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$,

令 $x=\frac{2}{3}$,$y=\frac{1}{3}$,所以 $f(1)\left[f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right]=f\left(\frac{2}{3}\right)f\left(\frac{1}{3}\right)$,

即 $2\left[f\left(\frac{2}{3}\right)+2f\left(\frac{2}{3}\right)\right]=2f^2\left(\frac{2}{3}\right)$,解得 $f\left(\frac{2}{3}\right)=3$,故 A 错误;

假设存在$x<0$,使$f(x)=0$.把y用$-2x$代换,则有$f(-x)[f(x)+f(-2x)]=f(x)f(-2x)$,

即$f(-x)f(-2x)=0$,又当$x>0$时,$f(x)>0$,所以产生矛盾,即$x<0$时,$f(x)\neq 0$,则$f(x)\neq 0$在函数$f(x)$的定义域内恒成立.

令$-x$代换x,y,则$f(-x-x)[f(-x)+f(-x)]=f(-x)f(-x)$,即$2f(-2x)\cdot f(-x)=f(-x)f(-x)$,

所以$2f(-2x)=f(-x)$,令$-x$代换x,所以$2f(2x)=f(x)$,故B错误;

令$y=-2x$,则$f(x-2x)[f(x)+f(-2x)]=f(x)f(-2x)$,即$f(-x)\cdot[f(x)+f(-2x)]=f(x)f(-2x)$.

将$f(-2x)=\frac{f(-x)}{2}$代入$f(-x)[f(x)+f(-2x)]=f(x)f(-2x)$,可得$f(-x)\cdot[f(x)+\frac{f(-x)}{2}]=f(x)\cdot\frac{f(-x)}{2}$,化简可得$f(-x)=-f(x)$,又函数$f(x)$的定义域关于原点对称,所以$f(x)$为奇函数,故C正确;

令$x=y=1$,则$f(2)[f(1)+f(1)]=f(1)f(1)$,解得$f(2)=1$,$f(1)=2>f(2)=1$,故D错误.故选C.

特殊函数模型的应用

抽象函数方程	初等函数模型
$f(x+y)=f(x)+f(y)$	正比例函数 $f(x)=kx$
$f(x+y)=f(x)f(y)$或 $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$	指数函数 $f(x)=a^x(0<a$ 且 $a\neq1)$
$f(xy)=f(x)f(y)$或 $f(\frac{x}{y})=\frac{f(x)}{f(y)}$	幂函数 $f(x)=x^a(a\in\mathbf{R})$
$f(xy)=f(x)+f(y)(x>0,y>0)$或 $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)(x>0,y>0)$	对数函数 $f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$
$f(x)+f(y)=2f(\frac{x+y}{2})\cdot f(\frac{x-y}{2})$	余弦函数 $f(x)=\cos x$
$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$或 $f(x-y)=\frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)}$	正切函数 $f(x)=\tan x$

例 **2**(1)(多选题)(2024 九省适应性测试,11)已知函数 $f(x)$的定义域为 **R**,且

$f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$,若 $f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$,则(ABD)

A.$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

B.$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

C.函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 是偶函数

D.函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是减函数

解析(方法一)由$f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$,且$f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$,所以令$f(x)=-2x-1$,$f\left(-\frac{1}{2}\right)$$=1-1=0$,A正确;$f\left(\frac{1}{2}\right)=-1-1=-2$,B正确;$f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)-1=-2x$,又$x\in\mathbf{R}$,是奇函数,C错误;$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)-1=-2x-2$,在$\mathbf{R}$上是减函数,D正确.故选ABD.

(方法二)令$x=\frac{1}{2}$,$y=0$,则$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)(1+f(0))=0$.又$f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$,故$1+f(0)=0$,即$f(0)=-1$.令$x=\frac{1}{2}$,$y=-\frac{1}{2}$,则$f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$,即$f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)\times f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$.因为$f(0)=-1$,所以$f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.又$f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$,故$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,故A正确;

令 $y=-\frac{1}{2}$,则 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(x)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)=4x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$,即 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$,故函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 是奇函数,故 C 错误;

因为 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$,则 $f\left(x+1-\frac{1}{2}\right)=-2(x+1)=-2x-2$,即 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2x-2$,

所以函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是减函数,故 D 正确;

令 $x=1$,则 $f\left(1-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times1=-2$,故 B 正确.故选 ABD.

(2)(2024吉林模拟)已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,且$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$,

$f(0)=1$,$f(3x+1)=-f(-3x+1)$,则$\sum\limits_{k=0}^{2\,024} f(k)=($ D $)$

A.-2　　B.-1　　C.0　　D.1

解析(方法一)令$x=0$,由$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$,$f(0)=1$,可得$f(-y)=f(y)$,所以$f(x)$是偶函数.因为$f(3x+1)=-f(-3x+1)$,所以函数$f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称,

设 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$,所以函数 $f(x)$的周期为 4,则 $\sum\limits_{k=0}^{2\,024} f(k)=1$,故选 D.

(方法二)由题意知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,且$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$,$f(0)=1$,

令$x=0$,则$f(y)+f(-y)=2f(y)$,即$f(-y)=f(y)$,故$f(x)$为偶函数;

又$f(3x+1)=-f(-3x+1)$,令$x=0$,则$f(1)=-f(1)$,所以$f(1)=0$,

又由$f(3x+1)=-f(-3x+1)$,得$f(x+1)+f(-x+1)=0$,

即$f(x)$的图象关于点$(1,0)$成中心对称,则$f(2)=-f(0)=-1$.

$f(x+1)+f(-x+1)=0$,即$f(x+2)=-f(-x)$,又结合$f(x)$为偶函数,

则$f(x+2)=-f(x)$,故$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,即4为$f(x)$的周期,

故$f(3)=f(-1)=f(1)=0$,$f(4)=f(0)=1$,

故 $\sum_{k=0}^{2\,024} f(k)=f(0)+[f(1)+f(2)+\dots+f(2\,024)]=1+506\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]$

$=1+506\times(0-1+0+1)=1$,故选D.

抽象函数性质的综合应用

例3(1)(多选题)(2024山东聊城一模)设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的可导函数,其导数为$g(x)$,若$f(3x+1)$是奇函数,且对于任意的$x\in\mathbf{R}$,$f(4-x)=f(x)$,则对于任意的$k\in\mathbf{Z}$,下列说法正确的是(BC)

A.$4k$都是$g(x)$的周期

B.曲线$y=g(x)$关于点$(2k,0)$对称

C.曲线$y=g(x)$关于直线$x=2k+1$对称

D.$g(x+4k)$是偶函数