

专题 4.8 全等三角形中的经典模型-重难点题型

【北师大版】

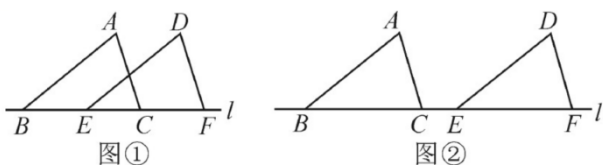
题型先知



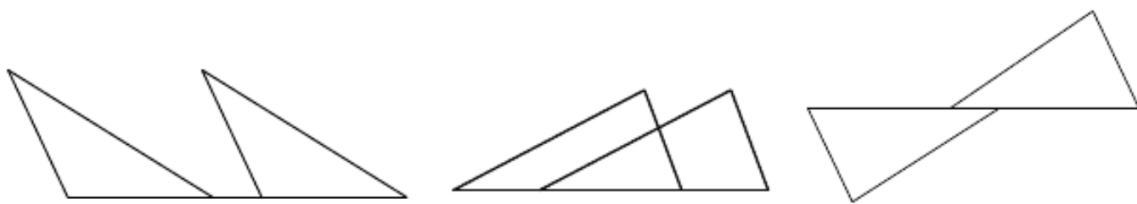
举一反三

【题型 1 平移模型】

【模型解读】把 $\triangle ABC$ 沿着某一条直线 l 平行移动, 得到 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 称为平移型全等三角形, 图①, 图②是常见的平移型全等三角形.

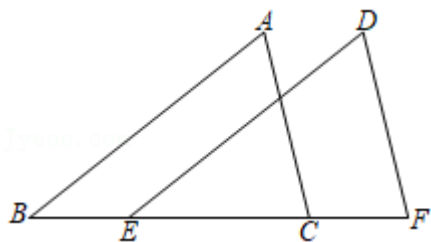


【常见模型】



【例 1】(2020 秋·襄城区期末) 如图, 点 B 、 E 、 C 、 F 四点在一条直线上, $\angle A = \angle D$, $AB \parallel DE$, 老师说: 再添加一个条件就可以使 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. 下面是课堂上三个同学的发言, 甲说: 添加 $AB = DE$; 乙说: 添加 $AC \parallel DF$; 丙说: 添加 $BE = CF$.

- (1) 甲、乙、丙三个同学说法正确的是_____;
- (2) 请你从正确的说法中选择一种, 给出你的证明.



【解题思路】（1）根据平行线的性质，由 $AB \parallel DE$ 可得 $\angle B = \angle DEC$ ，再加上条件 $\angle A = \angle D$ ，只需要添加一个能得出边相等的条件即可证明两个三角形全等，添加 $AC \parallel DF$ 不能证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ；

（2）添加 $AB = DE$ ，然后再利用 ASA 判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 即可．

【解答过程】解：（1）说法正确的是：甲、丙，

故答案为：甲、丙；

（2）证明： $\because AB \parallel DE$ ，

$\therefore \angle B = \angle DEC$ ，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

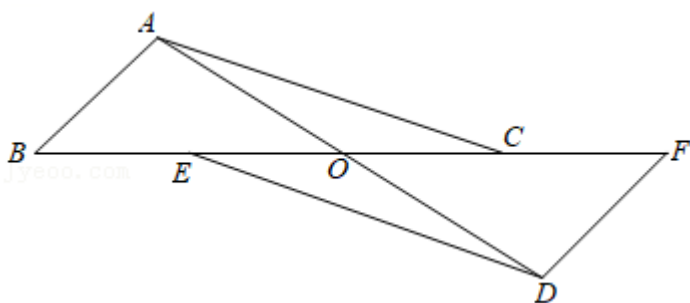
$$\begin{cases} \angle A = \angle D \\ AB = DE \\ \angle B = \angle DEF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASA) .

【变式 1-1】（2020 秋•苏州期末）如图， AD ， BF 相交于点 O ， $AB \parallel DF$ ， $AB = DF$ ，点 E 与点 C 在 BF 上，且 $BE = CF$ ．

（1）求证： $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ ；

（2）求证：点 O 为 BF 的中点．



【解题思路】（1）由“ SAS ”可证 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ ；

（2）由“ AAS ”可证 $\triangle ACO \cong \triangle DEO$ ，可得 $EO = CO$ ，可得结论．

【解答过程】证明：（1） $\because AB \parallel DF$ ，

$\therefore \angle B = \angle F$ ，

$\because BE = CF$ ，

$$\therefore BC=EF,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 中，

$$\begin{cases} AB=DF \\ \angle B=\angle F, \\ BC=EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DFE \text{ (SAS)};$$

$$(2) \because \triangle ABC \cong \triangle DFE,$$

$$\therefore AC=DE, \angle ACB=\angle DEF,$$

在 $\triangle ACO$ 和 $\triangle DEO$ 中，

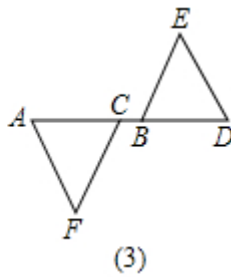
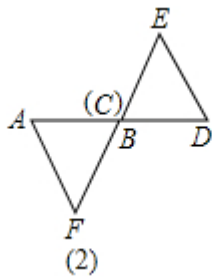
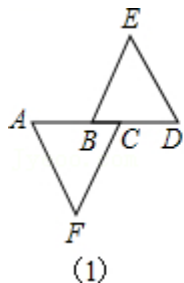
$$\begin{cases} \angle ACB=\angle DEF \\ \angle AOC=\angle DOE, \\ AC=DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACO \cong \triangle DEO \text{ (AAS)},$$

$$\therefore EO=CO,$$

$$\therefore \text{点 } O \text{ 为 } BF \text{ 的中点.}$$

【变式 1-2】（2020 秋·富顺县校级月考）如图 1， A, B, C, D 在同一直线上， $AB=CD$ ， $DE \parallel AF$ ，且 $DE=AF$ ，求证： $\triangle AFC \cong \triangle DEB$ ．如果将 BD 沿着 AD 边的方向平行移动，如图 2，3 时，其余条件不变，结论是否成立？如果成立，请予以证明；如果不成立，请说明理由．



【解题思路】可以根据已知利用 SAS 判定 $\triangle AFC \cong \triangle DEB$ ．如果将 BD 沿着 AD 边的方向平行移动，如图（2）、（3）时，其余条件不变，结论仍然成立．可以利用全等三角形的常用的判定方法进行验证．

【解答过程】解： $\because AB=CD$ ，

$$\therefore AB+BC=CD+BC,$$

即 $AC=BD$ ．

$$\because DE \parallel AF,$$

$$\therefore \angle A=\angle D.$$

在 $\triangle AFC$ 和 $\triangle DEB$ 中, $\begin{cases} AF=DE \\ \angle A=\angle D, \\ AC=DB \end{cases}$

$\therefore \triangle AFC \cong \triangle DEB$ (SAS) .

在(2), (3)中结论依然成立.

如在(3)中, $\because AB=CD$,

$\therefore AB-BC=CD-BC$,

即 $AC=BD$,

$\therefore AF \parallel DE$,

$\therefore \angle A=\angle D$.

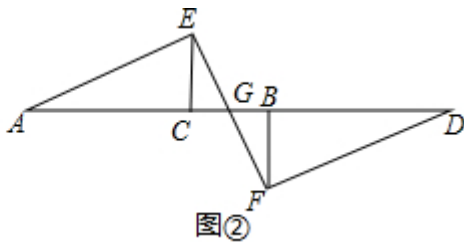
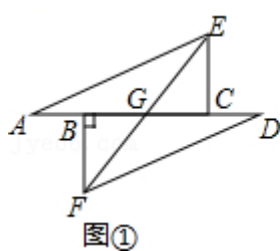
在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle DEB$ 中, $\begin{cases} AF=DE \\ \angle A=\angle D, \\ AC=DB \end{cases}$

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle DEB$ (SAS) .

【变式 1-3】 (2021 春·雁塔区校级期中) 如图①点 A 、 B 、 C 、 D 在同一直线上, $AB=CD$, 作 $CE \perp AD$, $BF \perp AD$, 且 $AE=DF$.

(1) 证明: EF 平分线段 BC ;

(2) 若 $\triangle BFD$ 沿 AD 方向平移得到图②时, 其他条件不变, (1)中的结论是否仍成立? 请说明理由.



【解题思路】 (1) 由 $AB=CD$, 利用等式的性质得到 $AC=BD$, 再由 $AE=DF$, 利用 HL 得到直角三角形 ACE 与直角三角形 DBF 全等, 利用全等三角形对应边相等得到 $EC=BF$, 再利用 AAS 得到三角形 ECG 与三角形 FBG 全等, 利用全等三角形对应边相等得到 $BG=CG$, 即可得证;

(2) (1) 中的结论成立, 理由为: 由 $AC=DB$, 利用等式的性质得到 $AC=BD$, 再由 $AE=DF$, 利用 HL 得到直角三角形 ACE 与直角三角形 DBF 全等, 利用全等三角形对应边相等得到 $EC=BF$, 再利用 AAS 得到三角形 ECG 与三角形 FBG 全等, 利用全等三角形对应边相等得到 $BG=CG$, 即可得证.

【解答过程】 (1) 证明: $\because CE \perp AD, BF \perp AD$,

$\therefore \angle ACE=\angle DBF=90^\circ$,

$$\because AB=CD,$$

$$\therefore AB+BC=BC+CD, \text{ 即 } AC=DB,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 和 $\text{Rt}\triangle DBF$ 中,

$$\begin{cases} AE=DF \\ AC=DB \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACE \cong \text{Rt}\triangle DBF \text{ (HL)},$$

$$\therefore CE=FB,$$

在 $\triangle CEG$ 和 $\triangle BFG$ 中,

$$\begin{cases} \angle ECG = \angle FBG = 90^\circ \\ \angle EGC = \angle BGF \\ EC = FB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CEG \cong \triangle BFG \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CG=BG, \text{ 即 } EF \text{ 平分线段 } BC;$$

(2) (1) 中结论成立, 理由为:

证明: $\because CE \perp AD, BF \perp AD,$

$$\therefore \angle ACE = \angle DBF = 90^\circ,$$

$$\because AB=CD,$$

$$\therefore AB - BC = CD - BC, \text{ 即 } AC = DB,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 和 $\text{Rt}\triangle DBF$ 中,

$$\begin{cases} AE=DF \\ AC=DB \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACE \cong \text{Rt}\triangle DBF \text{ (HL)},$$

$$\therefore CE=FB,$$

在 $\triangle CEG$ 和 $\triangle BFG$ 中,

$$\begin{cases} \angle ECG = \angle FBG = 90^\circ \\ \angle EGC = \angle BGF \\ EC = FB \end{cases},$$

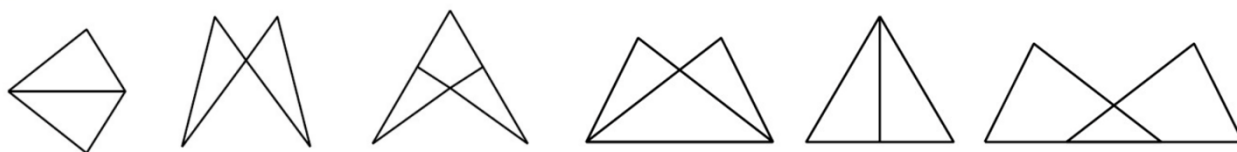
$$\therefore \triangle CEG \cong \triangle BFG \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CG=BG, \text{ 即 } EF \text{ 平分线段 } BC.$$

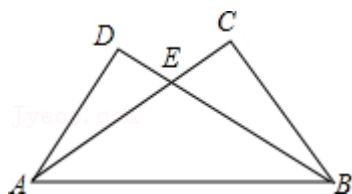
【题型 2 轴对称模型】

【模型解读】 将原图形沿着某一条直线折叠后, 直线两边的部分能够完全重合, 这两个三角形称之为轴对称型全等三角形, 此类图形中要注意期隐含条件, 即公共边或公共角相等.

【常见模型】



【例 2】（2020 秋•杭州校级月考）如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 中， AC 与 BD 相交于点 E ，已知 $AD=BC$ ，另外只能从下面给出的三个条件① $\angle DAB=\angle CBA$ ，② $\angle D=\angle C$ ③ $\angle DBA=\angle CAB$ 选择其中的一个用来证明在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 全等，这个条件是_____。（填写编号），并证明 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ 。



【解题思路】选择条件①，根据全等三角形的判定定理 SAS 进行证明即可。

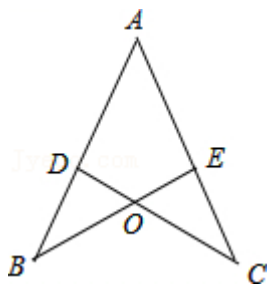
【解答过程】解：这个条件是：①，证明如下：

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BAC$ 中，

$$\begin{cases} BC = AD \\ \angle CBA = \angle DAB, \\ BA = AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BAD$ (SAS) .

【变式 2-1】如图， $AB=AC$ ， $BE \perp AC$ 于 E ， $CD \perp AB$ 于 D ， BE 、 CD 交于点 O ，求证： $OB=OC$ 。



【解题思路】证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，推出 $\angle B = \angle C$ ， $AD=AE$ ，求出 $BD=CE$ ，证 $\triangle BDO \cong \triangle CEO$ ，根据全等三角形的性质推出即可。

【解答过程】证明： $\because BE \perp AC$ ， $CD \perp AB$ ，

$$\therefore \angle ADC = \angle AEB = 90^\circ ,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中

$$\begin{cases} \angle A = \angle A \\ \angle AEB = \angle ADC \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD \quad (AAS),$$

$$\therefore \angle B = \angle C, \quad AD = AE,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore BD = CE,$$

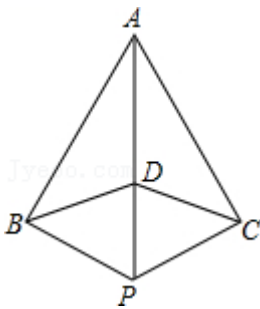
在 $\triangle BDO$ 和 $\triangle CEO$ 中

$$\begin{cases} \angle DOB = \angle EOC \\ \angle B = \angle C \\ BD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDO \cong \triangle CEO \quad (AAS),$$

$$\therefore OB = OC.$$

【变式 2-2】（2020 秋•海珠区校级期中）如图， $PB \perp AB$ ， $PC \perp AC$ ， $PB = PC$ ， D 是 AP 上一点．求证： $\angle BDP = \angle CDP$ ．



【解题思路】求出 $\angle ABP = \angle ACP = 90^\circ$ ，根据 HL 推出 $\text{Rt}\triangle ABP \cong \text{Rt}\triangle ACP$ ，根据全等三角形的性质得出 $\angle BPD = \angle CPD$ ，根据 SAS 推出 $\triangle BPD \cong \triangle CPD$ ，即可得出答案．

【解答过程】证明： $\because PB \perp AB$ ， $PC \perp AC$ ，

$$\therefore \angle ABP = \angle ACP = 90^\circ,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 和 $\text{Rt}\triangle ACP$ 中

$$\begin{cases} AP = AP \\ PB = PC \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABP \cong \text{Rt}\triangle ACP \quad (HL),$$

$$\therefore \angle BPD = \angle CPD,$$

在 $\triangle BPD$ 和 $\triangle CPD$ 中

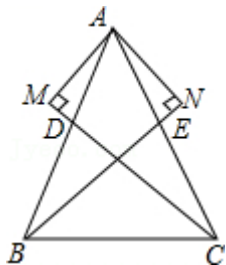
$$\begin{cases} PB = PC \\ \angle BPD = \angle CPD \\ PD = PD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BPD \cong \triangle CPD,$$

$$\therefore \angle BDP = \angle CDP.$$

【变式 2-3】如图， $AB=AC$ ， D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点， $AM \perp CD$ 于 M ， $AN \perp BE$ 于 N 。

求证： $AM=AN$ 。



【解题思路】利用已知条件先证明 $\triangle DBC \cong \triangle ECB$ ，再证明 $\triangle AMD \cong \triangle ANE$ ，即可解答。

【解答过程】解： $\because AB=AC$ ， D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点，

$$\therefore AD=BD=AE=EC, \angle B = \angle C,$$

在 $\triangle DBC$ 和 $\triangle ECB$ 中

$$\begin{cases} BD = EC \\ \angle B = \angle C \\ BC = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DBC \cong \triangle ECB,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle CEB,$$

$$\because \angle BDC = \angle ADM, \angle CEB = \angle AEN,$$

$$\therefore \angle ADM = \angle AEN,$$

在 $\triangle AMD$ 和 $\triangle ANE$ 中

$$\because \begin{cases} \angle AMD = \angle ANE = 90^\circ \\ \angle ADM = \angle AEN \\ AD = AE \end{cases}$$

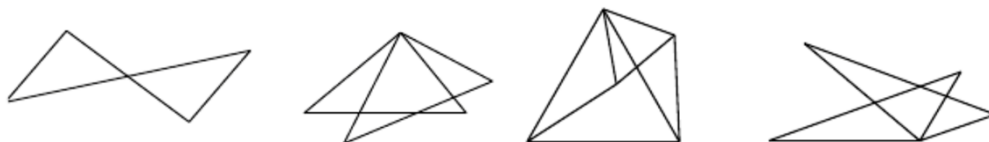
$$\therefore \triangle AMD \cong \triangle ANE$$

$$\therefore AM=AN.$$

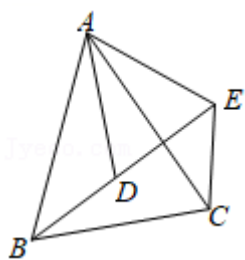
【题型 3 旋转模型】

【模型解读】将三角形绕着公共顶点旋转一定角度后，两个三角形能够完全重合，则称这两个三角形为旋转型三角形，识别旋转型三角形时，涉及对顶角相等、等角加（减）公共角的条件。

【常见模型】



【例 3】（2020 秋•渝水区校级期中）如图， $AB=AC$ ， $AD=AE$ ， $\angle BAC=\angle DAE$ ．求证： $\angle ABD=\angle ACE$ ．



【解题思路】根据等式的性质得出 $\angle BAD=\angle CAE$ ，利用 SAS 证明 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 全等，进而解答即可．

【解答过程】证明： $\because \angle BAC=\angle DAE$ ，

$$\therefore \angle BAC - \angle CAD = \angle DAE - \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

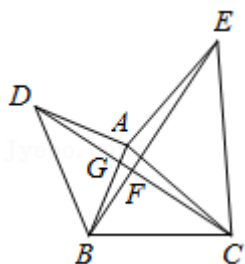
在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS) },$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE.$$

【变式 3-1】（2020 秋•怀宁县期末）如图，已知： $AD=AB$ ， $AE=AC$ ， $AD \perp AB$ ， $AE \perp AC$ ．猜想线段 CD 与 BE 之间的数量关系与位置关系，并证明你的猜想．



【解题思路】证明 $\triangle ACD \cong \triangle AEB$ ，根据全等三角形的性质得到 $CD=BE$ ， $\angle ADC=\angle ABE$ ，根据三角形内角和定理得出 $\angle BFD=\angle BAD=90^\circ$ ，证明结论．

【解答过程】解：猜想： $CD=BE$ ， $CD \perp BE$ ，

理由如下： $\because AD \perp AB$ ， $AE \perp AC$ ，

$$\therefore \angle DAB = \angle EAC = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle DAB + \angle BAC = \angle EAC + \angle BAC, \text{ 即 } \angle CAD = \angle EAB,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle AEB$ 中，

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle CAD = \angle EAB, \\ AC = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AEB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CD = BE, \angle ADC = \angle ABE,$$

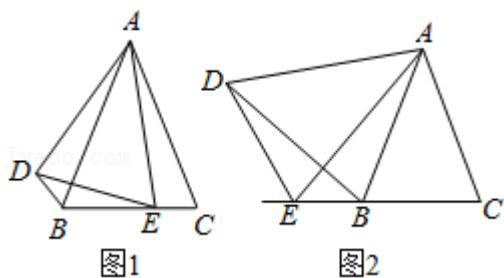
$$\therefore \angle AGD = \angle FGB,$$

$$\therefore \angle BFD = \angle BAD = 90^\circ, \text{ 即 } CD \perp BE.$$

【变式 3-2】（2020 秋•合江县月考）已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等腰三角形，且 $\angle BAC = \angle DAE$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ 。

（1）如图 1，点 E 在 BC 上，求证： $BC = BD + BE$ ；

（2）如图 2，点 E 在 CB 的延长线上，求证： $BC = BD - BE$ 。



【解题思路】（1）先证 $\angle DAB = \angle EAC$ ，再证 $\triangle DAB \cong \triangle EAC$ （SAS），得出 $BD = CE$ ，则可得出结论；

（2）证明 $\triangle DAB \cong \triangle EAC$ （SAS），得出 $BD = CE$ ，进而得出结论。

【解答过程】（1）证明： $\because \angle BAC = \angle DAE$ ，

$$\therefore \angle BAC - \angle BAE = \angle DAE - \angle BAE,$$

$$\text{即 } \angle DAB = \angle EAC,$$

$$\text{又 } \because AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \triangle DAB \cong \triangle EAC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BD = CE,$$

$$\therefore BC = BE + CE = BD + BE;$$

（2）证明： $\because \angle BAC = \angle DAE$ ，

$$\therefore \angle BAC + \angle EAB = \angle DAE + \angle EAB,$$

$$\text{即 } \angle DAB = \angle EAC,$$

$$\text{又 } \because AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \triangle DAB \cong \triangle EAC \text{ (SAS)},$$

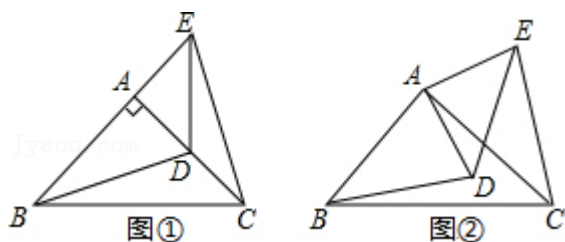
$$\therefore BD = CE,$$

$$\therefore BC = CE - BE = BD - BE.$$

【变式 3-3】（2021 春·浦东新区期末）如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ 。

（1）当点 D 在 AC 上时，如图①，线段 BD ， CE 有怎样的数量关系和位置关系？请证明你的猜想；

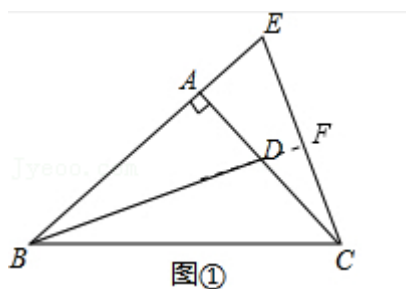
（2）将图①中的 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，如图②，线段 BD ， CE 有怎样的数量关系和位置关系？请说明理由。



【解题思路】（1）延长 BD 交 CE 于 F ，易证 $\triangle EAC \cong \triangle DAB$ ，可得 $BD = CE$ ， $\angle ABD = \angle ACE$ ，根据 $\angle AEC + \angle ACE = 90^\circ$ ，可得 $\angle ABD + \angle AEC = 90^\circ$ ，即可解题；

（2）延长 BD 交 CE 于 F ，易证 $\angle BAD = \angle EAC$ ，即可证明 $\triangle EAC \cong \triangle DAB$ ，可得 $BD = CE$ ， $\angle ABD = \angle ACE$ ，根据 $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$ ，可以求得 $\angle CBF + \angle BCF = 90^\circ$ ，即可解题。

【解答过程】证明：（1）延长 BD 交 CE 于 F ，



在 $\triangle EAC$ 和 $\triangle DAB$ 中，

$$\begin{cases} AE = AD \\ \angle EAC = \angle DAB, \\ AC = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAC \cong \triangle DAB \text{ (SAS)},$$

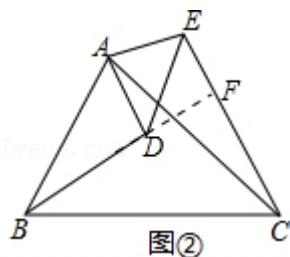
$$\therefore BD = CE, \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\because \angle AEC + \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle AEC = 90^\circ,$$

$\therefore \angle BFE = 90^\circ$ ，即 $EC \perp BD$ ；

(2) 延长 BD 交 CE 于 F ，



$\therefore \angle BAD + \angle CAD = 90^\circ$ ， $\angle CAD + \angle EAC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle EAC$ ，

$\therefore$ 在 $\triangle EAC$ 和 $\triangle DAB$ 中，

$$\begin{cases} AD = AE \\ \angle BAD = \angle EAC, \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle EAC \cong \triangle DAB$ (SAS)，

$\therefore BD = CE$ ， $\angle ABD = \angle ACE$ ，

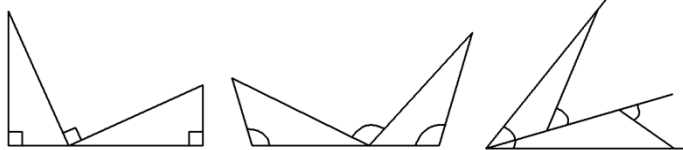
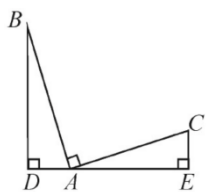
$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CBF + \angle BCF = \angle ABC - \angle ABD + \angle ACB + \angle ACE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BFC = 90^\circ$ ，即 $EC \perp BD$ 。

【题型 4 一线三等角模型】

【模型解读】基本图形如下：此类图形通常告诉 $BD \perp DE$ ， $AB \perp AC$ ， $CE \perp DE$ ，那么一定有 $\angle B = \angle CAE$ 。

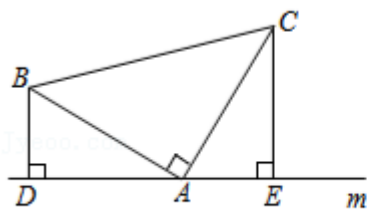


【常见模型】

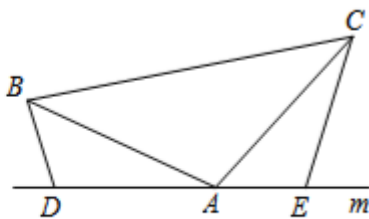
【例 4】(2020 秋·覃塘区期中) 已知：D, A, E 三点都在直线 m 上，在直线 m 的同一侧作 $\triangle ABC$ ，使 $AB = AC$ ，连接 BD ， CE 。

(1) 如图①，若 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $BD \perp m$ ， $CE \perp m$ ，求证： $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ；

(2) 如图②，若 $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC$ ，请判断 BD ， CE ， DE 三条线段之间的数量关系，并说明理由。



图①



图②

【解题思路】（1）根据 $BD \perp$ 直线 m ， $CE \perp$ 直线 m 得 $\angle BDA = \angle CEA = 90^\circ$ ，而 $\angle BAC = 90^\circ$ ，根据等角的余角相等得 $\angle CAE = \angle ABD$ ，然后根据“AAS”可判断 $\triangle ADB \cong \triangle CEA$ ；

（2）由 $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC$ ，就可以求出 $\angle BAD = \angle ACE$ ，进而由 ASA 就可以得出 $\triangle BAD \cong \triangle ACE$ ，就可以得出 $BD = AE$ ， $DA = CE$ ，即可得出结论。

【解答过程】解：（1）证明：如图①， $\because D, A, E$ 三点都在直线 m 上， $\angle BAC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\because BD \perp m, CE \perp m,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CAE,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} \angle ADB = \angle AEC \\ \angle ABD = \angle CAE, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (AAS)};$$

$$(2) DE = BD + CE.$$

理由是：如图②， $\because \angle BDA = \angle AEC = \angle BAC$ ，

$\therefore$ 由三角形内角和及平角性质，得：

$$\angle BAD + \angle ABD = \angle BAD + \angle CAE = \angle CAE + \angle ACE,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CAE, \angle BAD = \angle ACE,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ AB = AC \\ \angle BAD = \angle ACE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BD = AE, AD = CE,$$

$$\therefore DE = AD + AE = BD + CE.$$

【变式 4-1】（2020 春•香坊区期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是边 BC 上一点， $CD = AB$ ，点 E 在边 AC 上，且 $AD = DE$ ， $\angle BAD = \angle CDE$ 。

（1）如图 1，求证： $BD = CE$ ；

（2）如图 2，若 DE 平分 $\angle ADC$ ，在不添加辅助线的情况下，请直接写出图中所有与 $\angle ADE$ 相等的角（ $\angle ADE$ 除外）。

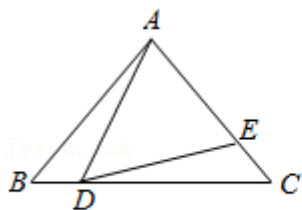


图 1

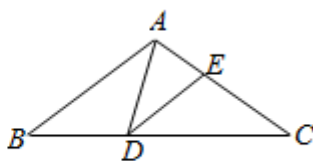


图 2

【解题思路】（1）由“SAS”可证 $\triangle ABD \cong \triangle DCE$ ，可得 $BD = CE$ ；

（2）由全等三角形的性质可得 $\angle B = \angle C$ ，由三角形的外角性质和角平分线的性质可求解。

【解答过程】解：（1）在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCE$ 中，

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle BAD = \angle CDE, \\ AD = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle DCE \text{ (SAS) },$$

$$\therefore BD = CE;$$

$$(2) \because \triangle ABD \cong \triangle DCE,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because DE \text{ 平分 } \angle ADC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CDE = \angle BAD,$$

$$\because \angle ADC = \angle B + \angle BAD = \angle ADE + \angle CDE,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADE = \angle BAD = \angle EDC = \angle C,$$

$$\therefore \text{与 } \angle ADE \text{ 相等的角有 } \angle EDC, \angle BAD, \angle B, \angle C.$$

【变式 4-2】（2020 春•历下区期中） CD 是经过 $\angle BCA$ 定点 C 的一条直线， $CA = CB$ ， E 、 F 分别是直线 CD 上两点，且 $\angle BEC = \angle CFA = \angle \beta$ 。

（1）若直线 CD 经过 $\angle BCA$ 内部，且 E 、 F 在射线 CD 上，

①若 $\angle BCA = 90^\circ$ ， $\angle \beta = 90^\circ$ ，例如图 1，则 BE CF ， EF $|BE - AF|$ 。（填“ $>$ ”，“ $<$ ”，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/126005122110010240>