

与球相关的外接与内切问题

一. 方法综述

如果一个多面体的各个顶点都在同一个球面上，那么称这个多面体是球的内接多面体，这个球称为多面体的外接球. 有关多面体外接球的问题，是立体几何的一个重点，也是高考考查的一个热点. 考查学生的空间想象能力以及化归能力。

研究球与多面体的接、切问题主要考虑以下几个方面的问题：

- (1) 多面体外接球半径的求法，当三棱锥有三条棱垂直或棱长相等时，可构造长方体或正方体.
- (2) 与球的外切问题，解答时首先要找准切点，可通过作截面来解决.
- (3) 球自身的对称性与多面体的对称性；

二. 解题策略

类型一 柱体与球

【例 1】(2020 河南高三(理)) 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面积为 208， $AB+BC+AA_1=18$ ，则该长方体的外接球的表面积为 ()

A. 116 B. 106 C. 56 D. 53

【答案】A

【解析】

【分析】由题意得出 $\frac{AB+BC+AA_1}{AB+BC+BC+AA_1+AB+AA_1} = \frac{18}{104}$ ，由这两个等式计算出 $AB^2+BC^2+AA_1^2$ ，可求出长方体外接球的半径，再利用球体表面积公式可计算出结果.

【详解】依题意， $AB+BC+AA_1=18$ ， $\frac{AB+BC}{AB+BC+BC+AA_1+AB+AA_1} = \frac{18}{104}$ ，
所以， $AB^2+BC^2+AA_1^2 = \frac{AB+BC}{AB+BC+BC+AA_1+AB+AA_1} \cdot \frac{AB+BC}{AB+BC+BC+AA_1+AB+AA_1} \cdot 104 = 116$ ，
故外接球半径 $r = \frac{\sqrt{AB^2+BC^2+AA_1^2}}{2} = \sqrt{29}$ ，

因此，所求长方体的外接球表面积 $S = 4\pi r^2 = 116\pi$. 故选：A.

【点睛】本题考查长方体外接球表面积的计算，解题的关键就是利用长方体的棱长来表示外接球的半径.

【举一反三】

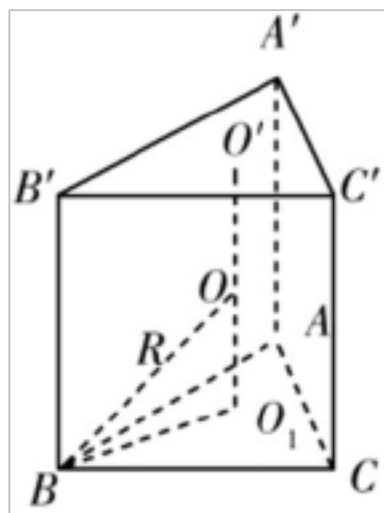
1. (2020 河南高三模拟) 已知三棱柱的底面是边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，侧棱垂直于底面且侧棱长为 2，若

该棱柱的顶点都在一个球面上，则该球的表面积为（ ）

- A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{11}{3}$ C. 5 D. 8

【答案】D

【解析】根据条件可知该三棱柱是正三棱柱，上下底面中心连线的中点就是球心，如图，



$$\text{则其外接球的半径 } R = OB = \sqrt{O_1O^2 + BO_1^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}\right)^2} = \sqrt{2},$$

外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 8\pi$. 故选：D

【指点迷津】直棱柱的外接球的球心在上、下底面的外接圆的圆心的连线上，确定球心，用球心、一底面的外接圆的圆心，一顶点构成一个直角三角形，用勾股定理得关于外接球半径的关系式，可球的半径.

2. (2020 安徽高三(理)) 已知一个正方体的各顶点都在同一球面上，现用一个平面去截这个球和正方体，得到的截面图形恰好是一个圆及内接正三角形，若此正三角形的边长为 a ，则这个球的表面积为（ ）.

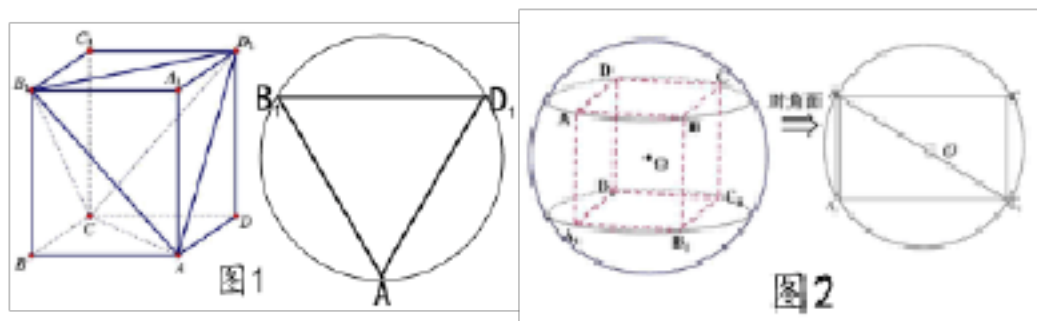
- A. $\frac{3}{4}a^2$ B. $3a^2$ C. $6a^2$ D. $\frac{3}{2}a^2$

【答案】D

【解析】由已知作出截面图形如图1，可知正三角形的边长等于正方体的面对角线长，正方体与其外接球的位置关系如图2所示，可知外接球的直径等于正方体的体对角线长，设正方体的棱长为 m ，外接球的半径为

$$R, \text{ 则 } a = \sqrt{2}m, 2R = \sqrt{3}m, \text{ 所以 } R = \frac{\sqrt{6}}{4}a, \text{ 所以外接球的表面积为 } S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{\sqrt{6}a}{4}\right)^2 = \frac{3}{2}\pi a^2,$$

故选：D.



【点睛】本题考查正方体的外接球、正方体的截面和空间想象能力，分析出外接球的半径与正三角形的边长的关系是本题的关键，

3. (2020 河南高三(理)) 有一圆柱状有盖铁皮桶(铁皮厚度忽略不计), 底面直径为 20 cm , 高度为 100 cm , 现往里面装直径为 10 cm 的球, 在能盖住盖子的情况下, 最多能装 ()

(附: $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236$)

A. 22 个 B. 24 个 C. 26 个 D. 28 个

【答案】C

【解析】由题意, 若要装更多的球, 需要让球和铁皮桶侧面相切, 且相邻四个球两两相切, 这样, 相邻的四个球的球心连线构成棱长为 10 cm 的正四面体,

易求正四面体相对棱的距离为 $5\sqrt{2}\text{ cm}$, 每装两个球称为“一层”, 这样装 n 层球,

则最上层球面上的点距离桶底最远为 $10 + 5\sqrt{2}n - 1\text{ cm}$,

若想要盖上盖子, 则需要满足 $10 + 5\sqrt{2}n - 1 \leq 100$, 解得 $n \leq \frac{9\sqrt{2}}{5} \approx 13.726$,

所以最多可以装 13 层球, 即最多可以装 26 个球. 故选: C

类型二 锥体与球

【例 2】5. 已知球 O 的半径为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$, 以球心 O 为中心的正四面体 的各条棱均在球 O 的外部, 若球 O 的球面被 的四个面截得的曲线的长度之和为 8π , 则正四面体 的体积为_____.

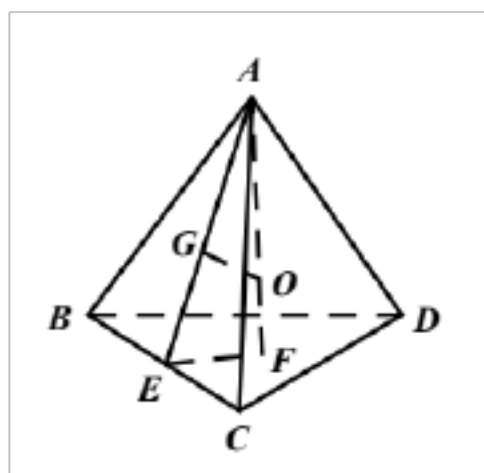
【来源】重庆市 2021 届高三下学期二模数学试题

【答案】 $18\sqrt{2}$

【解析】由题知, 正四面体截球面所得曲线为四个半径相同的圆, 每个圆的周长为 2π , 半径为 1, 故球心

O 到正四面体各面的距离为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 设正四面体棱长为 a , 如图所示, 则斜高

$AE = 3EF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 体高 $AF = \frac{\sqrt{6}}{3}a$, 在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 和 $\text{Rt}\triangle AGO$ 中, $\frac{OG}{AO} = \frac{EF}{AE} = \frac{1}{3}$,



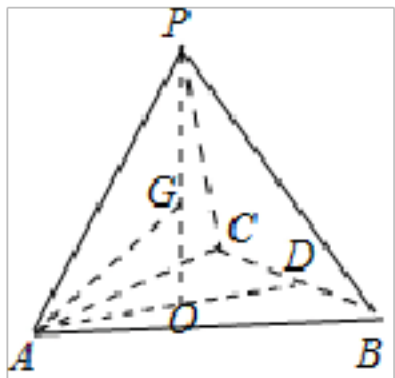
$$\text{即 } \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}a} = \frac{1}{3}, \therefore a = 6, \therefore V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{\sqrt{2}}{12} 6^3 = 18\sqrt{2}.$$

【举一反三】

1. (2020 四川省德阳一诊) 正四面体 ABCD 的体积为 $\frac{a^3}{3}$, 则正四面体 ABCD 的外接球的体积为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$

【解析】如图,



设正四面体 ABCD 的棱长为 x , 过 A 作 $AD \perp BC$,

设等边三角形 ABC 的中心为 O, 则 $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{3}x$,

$$\therefore PO = \sqrt{x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}x,$$

$$\therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}x = \frac{a^3}{3}, \text{ 即 } x = \sqrt{2}a.$$

再设正四面体 ABCD 的外接球球心为 G, 连接 GA,

$$\text{则 } R^2 = AO^2 + GO^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a - R\right)^2, \text{ 即 } R = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$\therefore$ 正四面体 ABCD 的外接球的体积为 $V = \frac{4\pi}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. 故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$.

2. (2020 宁夏育才中学)《九章算术》是我国古代的数学名著,其中有很多对几何体体积的研究,已知某囤积粮食的容器的下面是一个底面积为 32π 高为 h 的圆柱,上面是一个底面积为 32π 高为 h 的圆锥,若该容器有外接球,则外接球的体积为 _____

【答案】 288

【解析】如图所示, 根据圆柱与圆锥和球的对称性知,

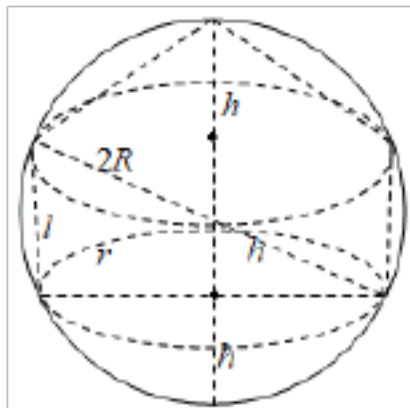
其外接球的直径是 $2R = 3h$, 设圆柱的底面圆半径为 r , 母线长为 $l = h$,

则 $r^2 = 32$, 解得 $r = 4\sqrt{2}$, 又 $l^2 = (2r)^2 - (3h)^2$,

$$h^2 = (8\sqrt{2})^2 - 9h^2, \text{ 解得 } h = 4,$$

外接球的半径为 $R = \frac{3}{2} \sqrt{4^2 + 6^2}$,

外接球的体积为 $V = \frac{4}{3} R^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{6^3}{3} = 288$.



3. (2020 贵阳高三 (理)) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, $\triangle PAD$ 是一个正三角形, 若平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 则该四棱锥的外接球的表面积为 ()

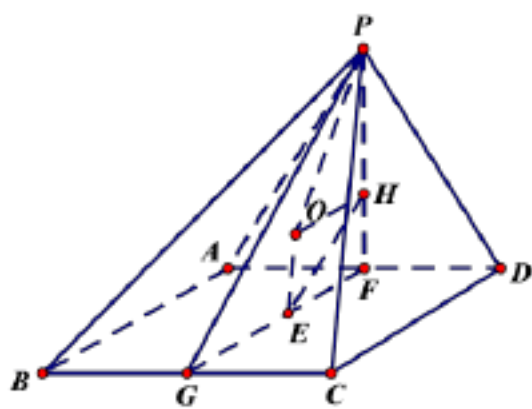
- A. $\frac{14}{3}$ B. $\frac{28}{3}$ C. $\frac{56}{3}$ D. $\frac{112}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】过 P 作 $PF \perp AD$, 交 AD 于 F , 取 BC 的中点 G , 连接 PG, FG , 取 PF 的三等分点 H ($PH = 2HF$), 取 GF 的中点 E , 在平面 PFG 过 E, F 分别作 GF, PF 的垂线, 交于点 O , 可证 O 为外接球的球心, 利用解直角三角形可计算 PO .

【详解】如图, 过 P 作 $PF \perp AD$, 交 AD 于 F , 取 BC 的中点 G , 连接 PG, FG , 在 PF 的三等分点 H ($PH = 2HF$), 取 GF 的中点 E , 在平面 PFG 过 E, F 分别作 GF, PF 的垂线, 交于点 O .



因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形, $AF = FD$, 所以 $PF \perp AD$.

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PF \perp$ 平面 PAD , 所以 $PF \perp$ 平面 $ABCD$, 因 $GF \subset$ 平面 $ABCD$, 故 $PF \perp GF$.

又因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 而 G, F 为 BC, AD 的中点, 故 $FG \parallel CD$, 故 $GF \perp AD$,

因 $AD \cap PF = F$, 故 $PF \perp$ 平面 PAD .

在 $Rt\triangle PGF$ 中，因 $OE \perp GF$ ， $PF \perp GF$ ，故 $OE \parallel PF$ ，故 $OE \perp$ 平面 $ABCD$ ，
同理 $OH \perp$ 平面 PAD 。

因 E 为正方形 $ABCD$ 的中心，故球心在直线 OE 上，

因 H 为 $\triangle PAD$ 的中心，故球心在直线 OH 上，故 O 为球心， OP 为球的半径。

在 $Rt\triangle PGF$ 中， $PH = \frac{2}{3}PF = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$ ， $OH = EF = 2$ ，

故 $OP = \sqrt{4 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ ，所以球的表面积为 $4\pi \times \frac{28}{3} = \frac{112\pi}{3}$ 。

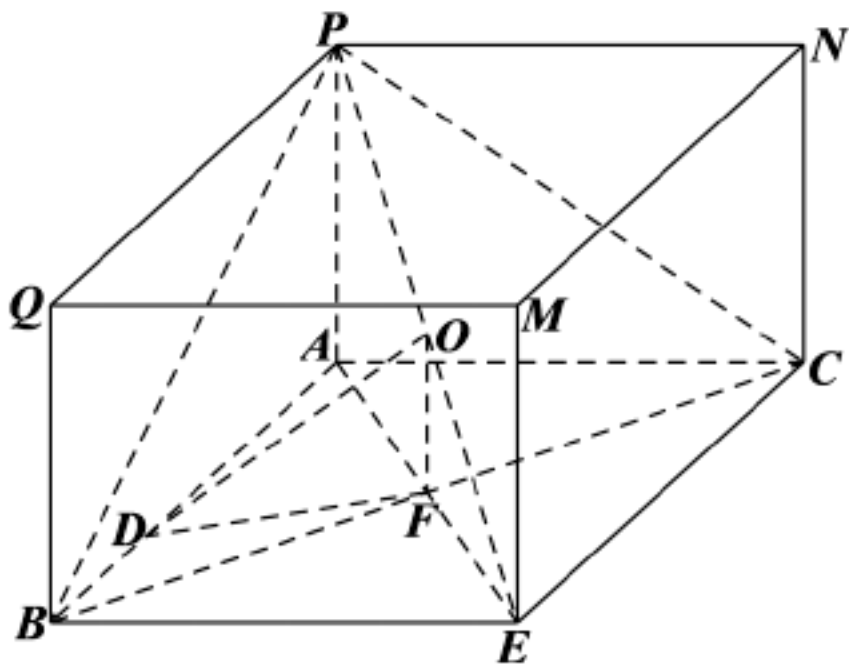
类型三 构造法（补形法）

【例 3】已知三棱锥 $P-ABC$ 的各个顶点都在球 O 的表面上， $PA \perp$ 底面 ABC ， $AB \perp AC$ ， $AB = 6$ ， $AC = 8$ ， D 是线段 AB 上一点，且 $AD = 2DB$ 。过点 D 作球 O 的截面，若所得截面圆面积的最大值与最小值之差为 25π ，则球 O 的表面积为（ ）

A. 128π B. 132π C. 144π D. 156π

【答案】B

【解析】∵ $PA \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp AC$ ，将三棱锥 $P-ABC$ 补成长方体 $PQMN-ABEC$ ，如下图所示：



设 $AE \cap BC = F$ ，连接 OF 、 DF 、 OD ，可知点 O 为 PE 的中点，

因为四边形 $ABEC$ 为矩形， $AE \cap BC = F$ ，则 F 为 AE 的中点，所以， $OF \parallel PA$ 且 $OF = \frac{1}{2}PA$ ，

设 $PA = 2x$ ，且 $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 10$ ， $PE = \sqrt{PA^2 + AE^2} = 2\sqrt{x^2 + 25}$ ，

所以，球 O 的半径为 $R = \frac{1}{2}PE = \sqrt{x^2 + 25}$ ，

在 $Rt\triangle ABE$ 中， $\angle ABE = \frac{\pi}{2}$ ， $AB = 6$ ， $AE = 10$ ， $\cos \angle BAE = \frac{AB}{AE} = \frac{3}{5}$ ，

在 $\triangle ADF$ 中, $AD = \frac{2}{3}AB = 4$, $AF = 5$,

由余弦定理可得 DF $\sqrt{AD^2 + AF^2 - 2AD \cdot AF \cos \angle BAE} = \sqrt{17}$,

$\therefore$ PA 平面 ABCD , OF 平面 ABCD ,

$\therefore DF \perp$ 平面 $ABCD$, 则 $OF \perp DF$,

$$\therefore \text{OF} = \frac{1}{2} \text{PA} = x, \quad \text{OD} = \sqrt{\text{OF}^2 + \text{DF}^2} = \sqrt{x^2 + 17},$$

设过点 D 的球 O 的截面圆的半径为 r，设球心 O 到截面圆的距离为 d，设 OD 与截面圆所在平面所成的角

为 , 则 $d = OD \sin \sqrt{R^2 - r^2}$.

当 $x=0$ 时, 即截面圆过球心 O 时, d 取最小值, 此时 r 取最大值, 即 $r_{\max} = R + \sqrt{x^2 + 25}$;

当 $\frac{\pi}{2}$ 时, 即 OD 与截面圆所在平面垂直时, d 取最大值, 即 $d_{\max} = OD = \sqrt{x^2 + 17}$,

此时, r 取最小值, 即 $r_{\min} = \sqrt{R_2^2 + d^2} - 2\sqrt{2}$.

由题意可得 $\frac{r_{\max}^2}{r_{\min}^2} = \frac{x^2 + 17}{25}$, $\because x > 0$, 解得 $x = 2\sqrt{2}$.

所以, $R = \sqrt{33}$, 因此, 球 O 的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 132\pi$.

故选：B.

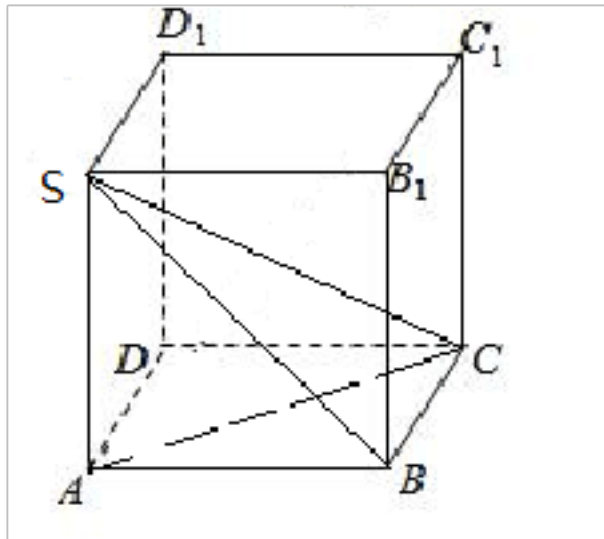
【举一反三】

1. (2020 宁夏石嘴山模拟) 三棱锥 $S-ABC$ 中, 侧棱 SA 与底面 ABC 垂直, $SA=1, AB=2, AC=3$ 且 $AB \perp BC$,

则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积等于_____.

【答案】 10π

【解析】把三棱锥 $S-ABC$, 放到长方体 $ABCD-SB_1C_1D_1$ 里, 如下图:



$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{10}$, 因此长方体 $ABCD - SB_1C_1D_1$ 的外接球的直径为 $\sqrt{10}$,

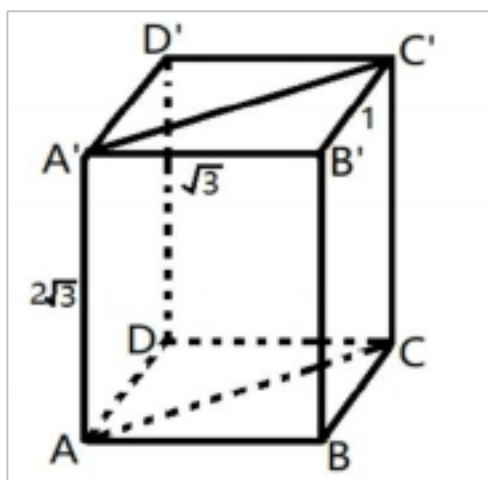
所以半径 $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 则三棱锥 $S - ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 10\pi$.

2. (2020 菏泽高三模拟) 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形, 且两直角边长分别为 1 和 $\sqrt{3}$, 此三棱柱的高为 $2\sqrt{3}$, 则该三棱柱的外接球的体积为

- A. $\frac{8\pi}{3}$ B. $\frac{16\pi}{3}$ C. $\frac{32\pi}{3}$ D. $\frac{64\pi}{3}$

【答案】C

【解析】



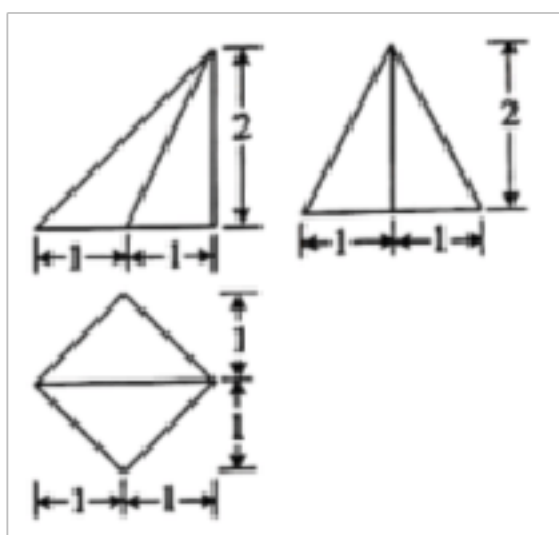
如图所示, 将直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 补充为长方体,

则该长方体的体对角线为 $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2} = 4$,

设长方体的外接球的半径为 R , 则 $2R = 4$, $R = 2$,

所以该长方体的外接球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3}$, 故选 C.

3. (2020 贵州高三月考 (理)) 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()

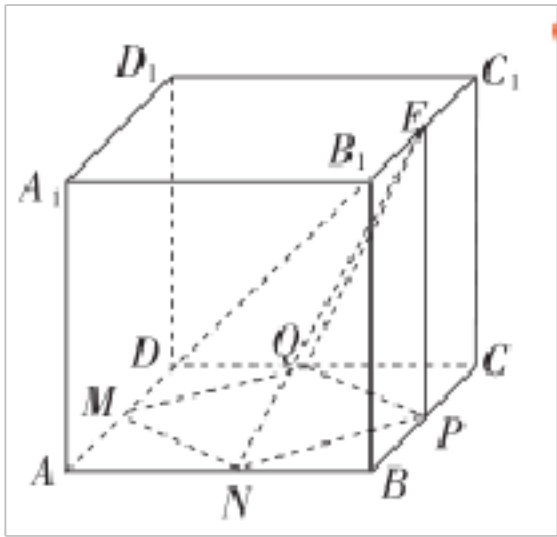


- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{16}{3}$

【答案】A

【解析】【分析】如图所示画出几何体, 再计算体积得到答案.

【详解】由三视图知该几何体是一个四棱锥, 可将该几何体放在一个正方体内, 如图所示:



在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

取棱 B_1C_1, DA, AB, BC, CD 的中点分别为 E, M, N, P, Q ，

则该几何体为四棱锥 $E-MNPQ$ ，其体积为 $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}^2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$ 。故选：A

类型四 与球体相关的最值问题

【例 4】（2020 福建高三期末（理））在外接球半径为 4 的正三棱锥中，体积最大的正三棱锥的高 h （ ）

- A. $\frac{14}{3}$ B. $\frac{13}{4}$ C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{16}{3}$

【答案】D

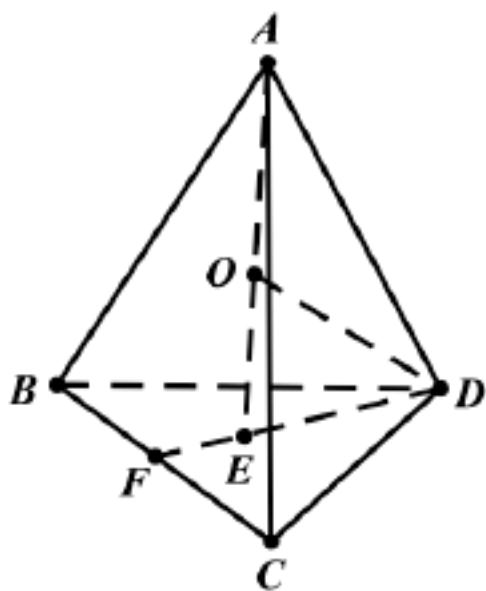
【解析】

【分析】设正三棱锥底面的边长为 a ，高为 h ，由勾股定理可得 $4^2 = (h-4)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$ ，则 $8h = h^2 + \frac{1}{3}a^2$ ，

三棱锥的体积 $V = \frac{\sqrt{3}}{4} 8h^2 = h^3$ ，对其求导，分析其单调性与最值即可得解。

【详解】

解：设正三棱锥底面的边长为 a ，高为 h ，根据图形可知



$$4^2 - (h-4)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2,$$

$$\text{则 } 8h - h^2 - \frac{1}{3}a^2 = 0, \quad 0 < h < 8.$$

又∵正三棱锥的体积

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h = \frac{\sqrt{3}}{4}(8h - h^2)h = \frac{\sqrt{3}}{4}(8h^2 - h^3), \text{ 则 } V = \frac{\sqrt{3}}{4}(16h - 3h^2),$$

$$\text{令 } V = 0, \text{ 则 } h = \frac{16}{3} \text{ 或 } h = 0 \text{ (舍去),}$$

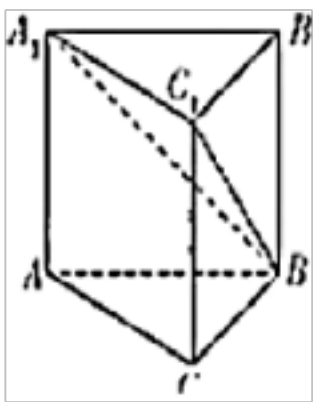
$$\text{函数 } V = \frac{\sqrt{3}}{4}(16h - 3h^2) \text{ 在 } (0, \frac{16}{3}) \text{ 上单调递增, 在 } (\frac{16}{3}, 8) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{当 } h = \frac{16}{3} \text{ 时, } V \text{ 取得最大值, 故选: D.}$$

【点睛】本题考查球与多面体的最值问题，常常由几何体的体积公式、借助几何性质，不等式、导数等进行解决，对考生的综合应用，空间想象能力及运算求解能力要求较高.

【举一反三】

1. (2020 广东高三(理)) 我国古代数学名著《九章算术》中有这样一些数学用语，“堑堵”意指底面为直角三角形，且侧棱垂直于底面的三棱柱，而“阳马”指底面为矩形，且有一侧棱垂直于底面的四棱锥.现有一如图示的堑堵， $AC \perp BC$ ，若 $AA_1 = AB = 2$ ，当阳马 $B-A_1ACC_1$ 体积最大时，则堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球体积为 ()



$$\text{A. } 2\sqrt{2} \quad \text{B. } \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad \text{C. } \frac{14\sqrt{2}}{3} \quad \text{D. } 4\sqrt{2}\pi$$

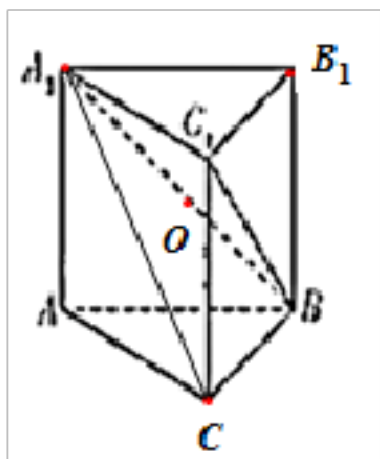
【答案】B

【解析】依题意可知 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 . 设 $AC = a, BC = b$ ，则

$$a^2 + b^2 = AB^2 = 4. V_{B-A_1ACC_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot AA_1 \cdot BC = \frac{1}{3} AC \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC^2 + BC^2}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{2} = \frac{2}{3}, \text{ 当}$$

且仅当 $AC = BC = \sqrt{2}$ 时取得最大值.依题意可知 $\triangle A_1BC$, $\triangle A_1BA$, $\triangle A_1BB_1$ 是以 A_1B 为斜边的直角三角形, 所以堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的直径为 A_1B , 故半径 $OB = \frac{1}{2}A_1B = \frac{1}{2}\sqrt{AA_1^2 + AB^2} = \sqrt{2}$. 所以外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi \sqrt{2}^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.

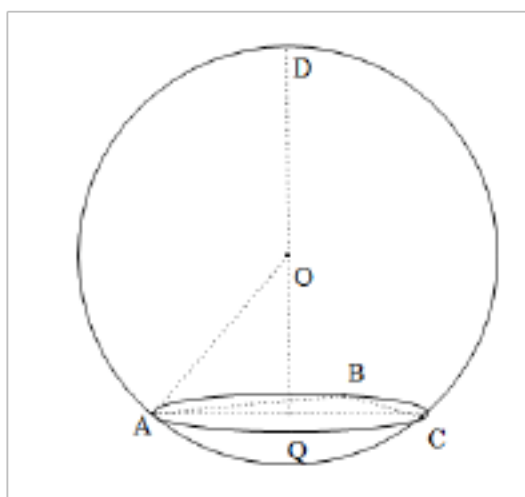
特别说明: 由于 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $\triangle A_1BC$, $\triangle A_1BA$, $\triangle A_1BB_1$ 是以 A_1B 为斜边的直角三角形, 所以堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的直径为 A_1B 为定值, 即无论阳马 $B-A_1ACC_1$ 体积是否取得最大值, 堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球保持不变, 所以可以直接由直径 A_1B 的长, 计算出外接球的半径, 进而求得外接球的体积. 故选: B



2. (2020 遵义市南白中学高三期末) 已知 A, B, C, D 四点在同一个球的球面上, $AB = BC = \sqrt{6}$, $\angle ABC = 90^\circ$, 若四面体 $ABCD$ 体积的最大值为 3, 则这个球的表面积为 ()
- A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

【答案】C

【解析】



根据 $AB = BC = \sqrt{6}$, 可得直角三角形 ABC 的面积为 3, 其所在球的小圆的圆心在斜边 AC 的中点上, 设小圆的圆心为 Q , 由于底面积 $S_{\triangle ABC}$ 不变, 高最大时体积最大,

所以 DQ 与面 ABC 垂直时体积最大, 最大值为 $\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot DQ = 3$, 即 $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot DQ = 3$, $DQ = 3$, 如图,

设球心为 O , 半径为 R , 则在直角 AQO 中, 即 $R^2 = (\sqrt{3})^2 + (3 - R)^2$, $R = 2$,

则这个球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 16\pi$, 故选 C.

3. (2020 河南高三(理)) 菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle ABC = 60^\circ$, 沿对角线 AC 将三角形 ACD 折起, 当三棱锥 $D-ABC$ 体积最大时, 其外接球表面积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{20}{9}$ D. $\frac{20}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】当平面 ACD 与平面 ABC 垂直时体积最大, 如图所示, 利用勾股定理得到

$R^2 = (\sqrt{3} - OG)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2$ 和 $R^2 = OG^2 + (\frac{2\sqrt{3}}{3})^2$, 计算得到答案.

【详解】易知: 当平面 ACD 与平面 ABC 垂直时体积最大.

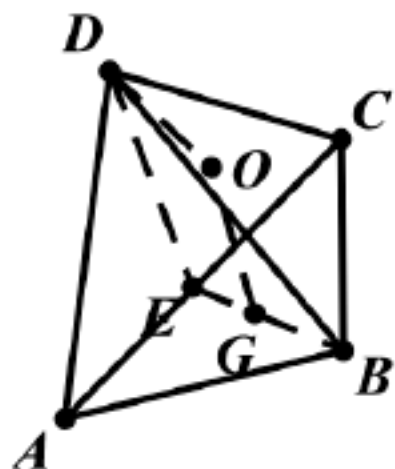
如图所示:

E 为 AC 中点, 连接 DE , BE , 外接球球心 O 的投影为 G 是 $\triangle ABC$ 中心, 在 BE 上

$BE = \sqrt{3}$, $DE = \sqrt{3}$, $EG = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $BG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

设半径为 R , 则 $R^2 = (\sqrt{3} - OG)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2$, $R^2 = OG^2 + (\frac{2\sqrt{3}}{3})^2$

解得: $R = \frac{\sqrt{15}}{3}$, 表面积 $S = 4\pi R^2 = \frac{20\pi}{3}$ 故选: D



三. 强化训练

一、选择题

1. (2020 广西高三期末) 棱长为 a 的正四面体 $ABCD$ 与正三棱锥 $E-BCD$ 的底面重合, 若由它们构成的多面体 $ABCDE$ 的顶点均在一球的球面上, 则正三棱锥 $E-BCD$ 的表面积为 ()

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{6}a^2$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{6}a^2$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

【答案】A

【解析】由题意, 多面体 $ABCDE$ 的外接球即正四面体 $ABCD$ 的外接球,

由题意可知 $AE \perp$ 面 BCD 交于 F , 连接 CF , 则 $CF = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

且其外接球的直径为 AE , 易求正四面体 $ABCD$ 的高为 $\sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

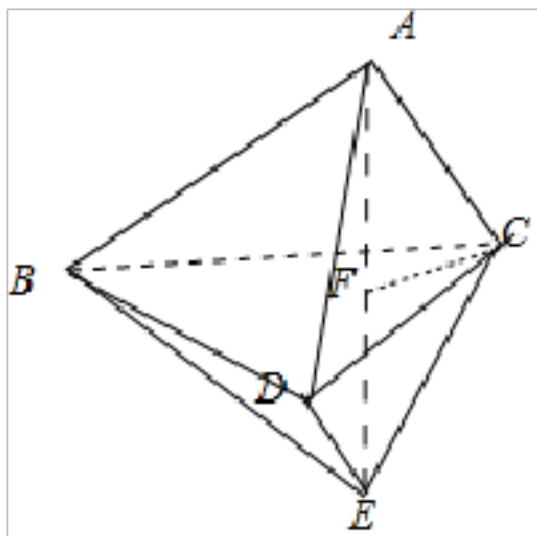
设外接球的半径为 R , 由 $R^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2 + R^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$ 得 $R = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

设正三棱锥 $E-BCD$ 的高为 h , 因为 $AE = \frac{\sqrt{6}}{2}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a + h$, 所以 $h = \frac{\sqrt{6}}{6}a$.

因为底面 BCD 的边长为 a , 所以 $EB = EC = ED = \sqrt{CF^2 + h^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

则正三棱锥 $E-BCD$ 的三条侧棱两两垂直.

即正三棱锥 $E-BCD$ 的表面积 $S = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, 故选: A.



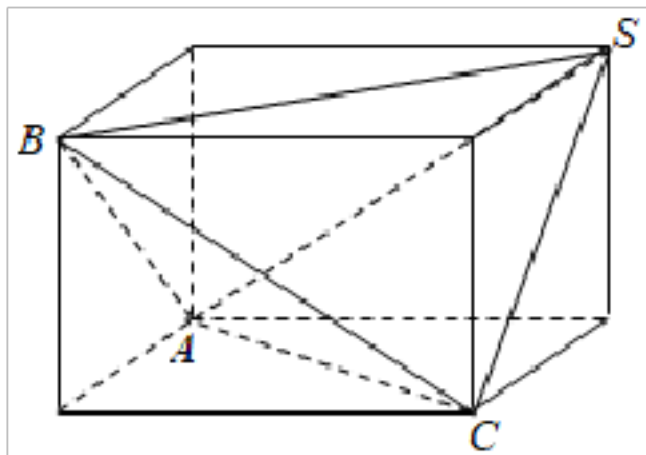
2. (2020 辽宁省师范大学附属中学高三) 在三棱锥 $S-ABC$ 中,

$SA = BC = \sqrt{41}$, $SB = AC = 5$, $SC = AB = \sqrt{34}$, 则三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积为 ()

- A. 25π B. $25\sqrt{2}\pi$ C. 50π D. $50\sqrt{2}\pi$

【答案】C

【解析】如图，



把三棱锥 $S-ABC$ 补形为长方体，设长方体的长、宽、高分别为 a 、 b 、 c ，

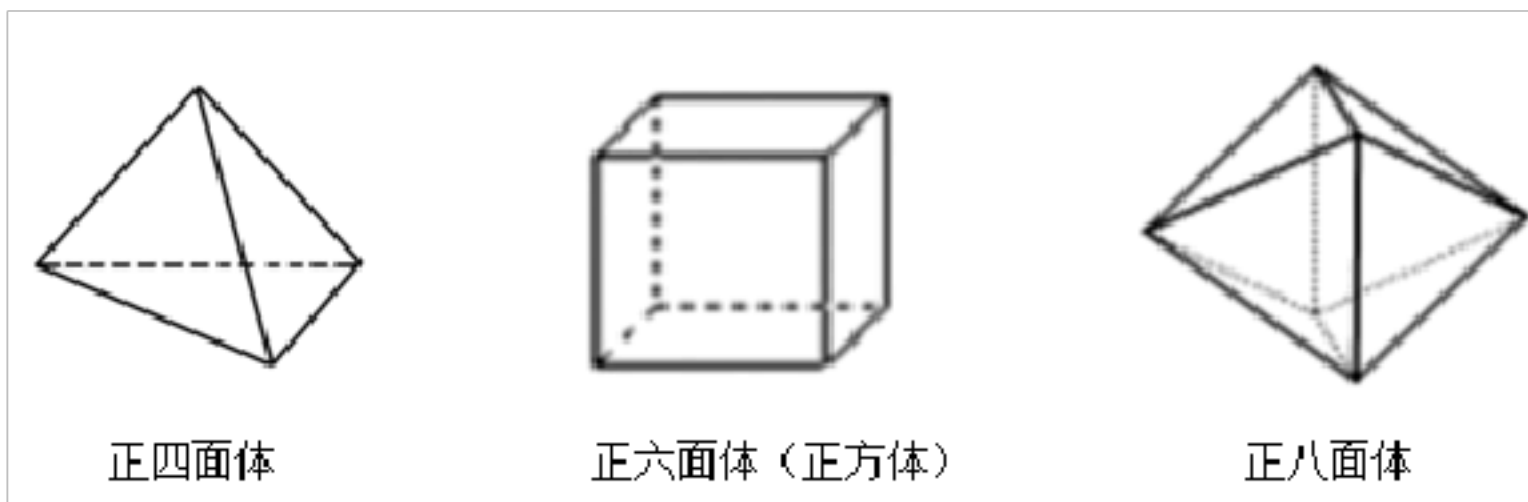
$$\text{则 } a^2 + b^2 = 41, \quad b^2 + c^2 = 25, \quad a^2 + c^2 = 34,$$

$$\therefore \text{三棱锥外接球的半径 } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \text{三棱锥 } S-ABC \text{ 外接球的表面积为 } S = 4\pi R^2 = 50\pi.$$

故选：C.

3.（2020 安徽高三期末）如果一个凸多面体的每个面都是全等的正多边形，而且每个顶点都引出相同数目的棱，那么这个凸多面体叫做正多面体.古希腊数学家欧几里得在其著作《几何原本》的卷 13 中系统地研究了正多面体的作图，并证明了每个正多面体都有外接球.若正四面体、正方体、正八面体的外接球半径相同，则它们的棱长之比为（ ）



- A. $\sqrt{2}:1:\sqrt{3}$ B. $2:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ C. $2:\sqrt{2}:1$ D. $2:\sqrt{2}:3$

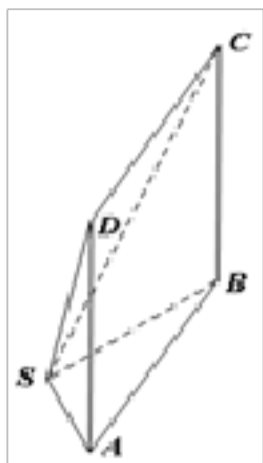
【答案】B

【解析】设正四面体、正方体、正八面体的棱长以及外接球半径分别为 a, b, c, R

$$\text{则 } 2R = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a, 2R = \sqrt{3}b, R = \frac{\sqrt{2}}{2}c,$$

$$\text{即 } a = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}, b = \frac{2R}{\sqrt{3}}, c = \sqrt{2}R \quad a:b:c = 2:\sqrt{2}:\sqrt{3} \text{ 故选: B}$$

4. (2020 北京人大附中高三) 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为矩形, $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 2$, $\angle ASB = 120^\circ$, $SA = AD$, 则四棱锥外接球的表面积为 ()



- A. 16 B. 20 C. 80 D. 100

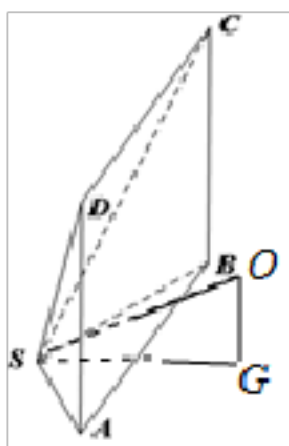
【答案】B

【解析】由四边形 $ABCD$ 为矩形, 得 $AB \perp AD$, 又 $SA = AD$, 且 $SA \perp AB$ 于 A , $\therefore AD \perp$ 平面 SAB ,

则平面 $SAB \perp$ 平面 $ABCD$, 设三角形 SAB 的外心为 G , 则 $GA = \frac{AB}{2\sin \angle ASB} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$.

过 G 作 $GO \perp$ 底面 SAB , 且 $GO = 1$, 则 $OS = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. 即四棱锥外接球的半径为 $\sqrt{5}$.

$\therefore$ 四棱锥外接球的表面积为 $S = 4 \cdot (\sqrt{5})^2 = 20$. 故选 B.



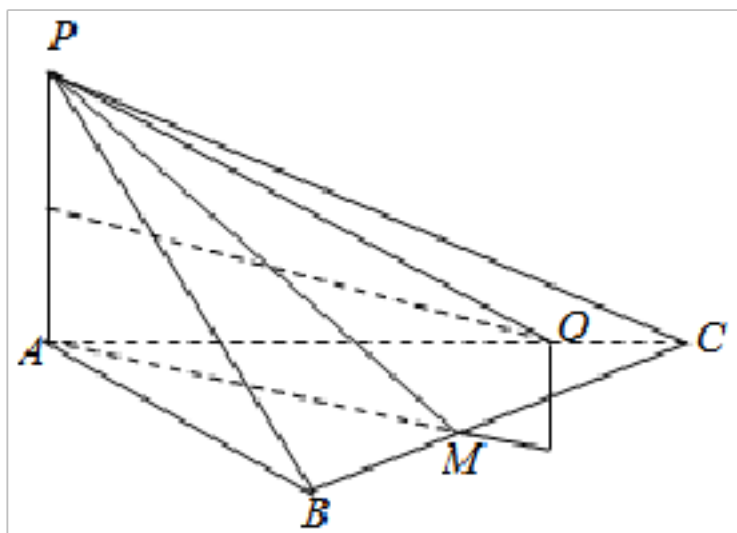
5. (2020 河南省郑州市一中高三) 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $\angle BAC = 120^\circ$, $AP = \sqrt{2}$, $AB = 2$,

M 是线段 BC 上一动点, 线段 PM 长度最小值为 $\sqrt{3}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积是 ()

- A. $\frac{9\pi}{2}$ B. $9\sqrt{2}\pi$ C. 18π D. 40π

【答案】C

【解析】解：如图所示：



三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AP = \sqrt{2}$ ， $AB = 2$ ，

M 是线段 BC 上一动点，线段 PM 长度最小值为 $\sqrt{3}$ ，

则：当 $AM \perp BC$ 时，线段 PM 达到最小值，

由于： $PA \perp$ 平面 ABC ，所以： $PA^2 + AM^2 = PM^2$ ，

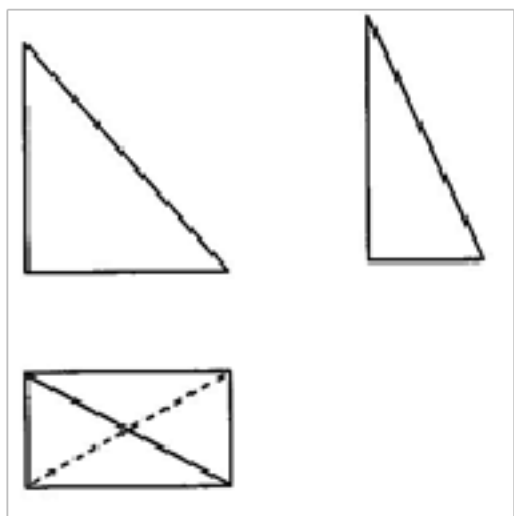
解得： $AM = 1$ ，所以： $BM = \sqrt{3}$ ，则： $\angle BAM = 60^\circ$ ，

由于： $\angle BAC = 120^\circ$ ，所以： $\angle MAC = 60^\circ$ 则： $\triangle ABC$ 为等腰三角形．所以 $BC = 2\sqrt{3}$ ，

在 $\triangle ABC$ 中，设外接圆的直径为 $2r = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 4$ ，则： $r = 2$ ，所以外接球的半径 $R = \sqrt{2^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{9}{2}}$ ，

则： $S = 4 \cdot \pi \cdot \frac{9}{2} = 18\pi$ ，故选：C.

6、（2020 河南省天一大联考）某多面体的三视图如图所示，其中正视图是一个直角边为 2 的等腰直角三角形，侧视图是两直角边分别为 2 和 1 的直角三角形，俯视图为一矩形，则该多面体的外接球的表面积为（ ）



A. 7π

B. 8π

C. 9π

D. 10π

【答案】C

【解析】由三视图可得，该几何体为一个三棱锥，放在长、宽、高分别为 2，1，2 的长方体中，此三棱锥和长方体的外接球是同一个，长方体的外接球的球心在体对角线的中点处，易得其外接球的直径为

$\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ ，从而外接球的表面积为 9π . 故答案为：C.

7. (2020 江西高三期末(理)) 如图，三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 24，又 $\angle PBC = \angle ABC = 90^\circ$ ， $BC = 3$ ， $AB = 4$ ， $PB = 4\sqrt{10}$ ，且二面角 $P-BC-A$ 为锐角，则该三棱锥的外接球的表面积为 ()



- A. 169 B. 144 C. 185 D. 80

【答案】A

【解析】因 $\angle PBC = \angle ABC = 90^\circ$ ，所以 $BC \perp$ 平面 PAB ，且 $\angle PBA$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角，又 $BC = 3$ ， $AB = 4$ ， $PB = 4\sqrt{10}$ ，由勾股定理可得 $PC = 13$ ， $AC = 5$ ，

因为 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} PB \cdot AB \sin \angle PBA = 8\sqrt{10} \sin \angle PBA$ ，所以三棱锥的体积

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle PAB} \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{10} \sin \angle PBA \cdot 3 = 24, \text{ 解得 } \sin \angle PBA = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

又 $\angle PBA$ 为锐角，所以 $\cos \angle PBA = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，

在 $\triangle PAB$ 中，由余弦定理得 $PA^2 = PB^2 + AB^2 - 2 \cdot PB \cdot AB \cdot \cos \angle PBA = 160 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = 144$ ，

即 $PA = 12$ ，则 $PB^2 = PA^2 + AB^2$ ，故 $PA \perp AB$ ，

由 $BC \perp$ 平面 PAB 得 $BC \perp PA$ ，

故 $PA \perp$ 平面 ABC ，即 $PA \perp AC$ ，取 PC 中点 O ，

在直角 $\triangle PAC$ 和直角 $\triangle PBC$ 中，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/126123203103011000>