第五章 一阶逻辑等值演算与推理

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

定义5.1（等值式） 设A，B是一阶逻辑中任意两个公式，若A↔B是永真式，则称A和B是**等值的**，记作A⇔B，称A⇔B是**等值式**。

下面给出一阶逻辑中的某些基本而主要的等值式：

因为命题逻辑的重言式的代换实例都是一阶逻辑的永真式，所以命题逻辑中24个等值式模式（p.24）给出的代换实例都是一阶逻辑的等值式模式。

例如：$\forall xF(x) \Leftrightarrow \neg\neg\forall xF(x)$

$\forall x\exists y(F(x, y)\rightarrow G(x, y))$

$\Leftrightarrow \neg\neg\forall x\exists y(F(x, y)\rightarrow G(x, y))$

等都是$A\Leftrightarrow\neg\neg A$的代换实例。

下面简介某些一阶逻辑固有的等值式，这些等值式都与量词有关。

1、消去量词等值式

设个体域为有限集D={a_1，a_2，…，a_n}，则有

(1) $\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$

(2) $\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$

2、量词否定等值式

对于任意的公式A(x)：

(1) $\neg \forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

(2) $\neg \exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

3、量词辖域收缩与扩张等值式

设A（x）是任意的含自由出现个体变项x的公式，B是不含x的公式，则

（1）$\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$

$\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$

$\forall x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$

$\forall x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

（2）$\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$

$\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$

$\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$

$\exists x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

4、量词分配等值式

对于任意的公式A（x）和B（x）：

（1）$\forall x(A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \land \forall x B(x)$

（2）$\exists x(A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$

阐明：量词分配等值式中，只有∀对∧的分配和∃对∨的分配的等值式。而∀对∨和∃对∧无分配律。

5、同种量词顺序置换等值式

对于任意的公式A（x，y）

(1) $\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$

(2) $\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$

一阶逻辑的等值演算

一阶逻辑的等值演算中三条主要的规则：

1、置换规则

设φ(A)是含公式A的公式，φ(B)是用公式B置换了φ(A)中全部的A后得到的公式，若A⇔B，则φ(A)⇔φ(B)。

例 设个体域为D={a，b，c}，将下面公式的量词消去。

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $\forall x(F(x)\vee\exists yG(y))$

(3) $\exists x\forall yF(x,y)$

解： (1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow (F(a)\rightarrow G(a))\wedge$

$(F(b)\rightarrow G(b))\wedge$

$(F(c)\rightarrow G(c))$

(2) $\forall x(F(x)\vee\exists yG(y))$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\vee\exists yG(y)$

$\Leftrightarrow (F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\vee$

$(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$

(3) $\exists x \forall y F(x, y)$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x, a) \wedge F(x, b) \wedge F(x, c))$

$\Leftrightarrow (F(a, a) \wedge F(a, b) \wedge F(a, c)) \vee$

$(F(b, a) \wedge F(b, b) \wedge F(b, c)) \vee$

$(F(c, a) \wedge F(c, b) \wedge F(c, c))$

例 给定解释I如下：

（a）个体域D={2，3}；　　（b）D中特定元素a=2

（c）D上特定函数f（x）为：f（2）=3，f（3）=2

（d）D上特定谓词

G（x，y）为：G（2，2）= G（2，3）= G（3，2）=1，

G（3，3）=0。

L（x，y）为：L（2，2）= L（3，3）=1，

L（2，3）= L（3，2）=0。

F（x）为：F（2）=0，F（3）=1。

在I下求下列各式的真值。

（1）$\forall x(F(x) \wedge G(x, a))$

（2）$\exists x(F(f(x)) \wedge G(x, f(x)))$

（3）$\forall x \exists y L(x, y)$

（4）$\exists y \forall x L(x, y)$

解:

(1) $\forall x(F(x)\land G(x,a))$

$\Leftrightarrow (F(2)\land G(2,a))\land(F(3)\land G(3,a))$

$\Leftrightarrow (F(2)\land G(2,2))\land(F(3)\land G(3,2))$

$\Leftrightarrow (0\land 1)\land(1\land 1)$

$\Leftrightarrow 0$

(2) $\exists x(F(f(x))\land G(x,f(x)))$

$\Leftrightarrow (F(f(2))\land G(2,f(2)))\lor$

$(F(f(3))\land G(3,f(3)))$

$\Leftrightarrow (F(3)\land G(2,3))\lor(F(2)\land G(3,2))$

$\Leftrightarrow (1\land 1)\lor(0\land 1)$

$\Leftrightarrow 1$

(3) $\forall x\ \exists y\ L(x, y)$

$\Leftrightarrow \forall x\ (L(x, 2) \vee L(x, 3))$

$\Leftrightarrow (L(2, 2) \vee L(2, 3)) \wedge$

$(L(3, 2) \vee L(3, 3))$

$\Leftrightarrow (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1)$

$\Leftrightarrow 1$

(4) $\exists y\ \forall x\ L(x, y)$

$\Leftrightarrow \exists y\ (L(2, y) \wedge L(3, y))$

$\Leftrightarrow (L(2, 2) \wedge L(3, 2)) \vee$

$(L(2, 3) \wedge L(3, 3))$

$\Leftrightarrow (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1)$

$\Leftrightarrow 0$

注意：$\forall x \exists y L(x, y)$ <≠> $\exists y \forall x\ L(x, y)$，阐明量词的顺序不能随意颠倒。

例 证明下列各等值式。

(1) $\neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$

(2) $\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$

(3) $\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x, y))$

(4) $\neg \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow \neg L(x, y))$

证明：

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))\Leftrightarrow\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

$\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

$\Leftrightarrow\forall x\neg(M(x)\wedge F(x))$

$\Leftrightarrow\forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$

$\Leftrightarrow\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

(2) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x))$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

(3) $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

证明:

$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y\neg(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y\neg(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee H(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

(4) $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$

证明与(3)类似，略