

2023-2024 学年安徽省砀山县二中高考考前模拟数学试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设直线 l 过点 $A(0, -1)$, 且与圆 $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ 相切于点 B , 那么 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\quad)$

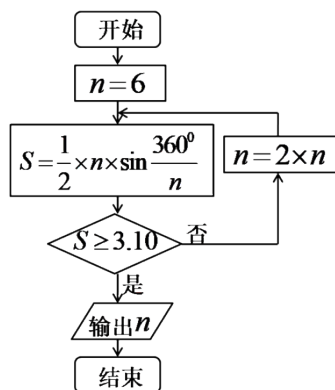
- A. ± 3 B. 3 C. $\sqrt{3}$ D. 1

2. 已知 $a \in \mathbb{R}$ 若 $(1-ai)(3+2i)$ 为纯虚数, 则 a 的值为 $(\quad)$

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 公元 263 年左右, 我国数学家刘徽发现当圆内接正多边形的边数无限增加时, 多边形面积可无限逼近圆的面积, 并创立了“割圆术”, 利用“割圆术”刘徽得到了圆周率精确到小数点后两位的近似值 3.14, 这就是著名的“徽率”。如图是利用刘徽的“割圆术”思想设计的一个程序框图, 则输出的 n 值为 $(\quad)$ (参考数据:

$$\sqrt{3} \approx 1.732, \sin 15^\circ \approx 0.2588, \sin 75^\circ \approx 0.9659)$$



- A. 48 B. 36 C. 24 D. 12

4. 费马素数是法国大数学家费马命名的, 形如 $2^{2^n} + 1 (n \in \mathbb{N})$ 的素数(如: $2^{2^0} + 1 = 3$)为费马素数, 在不超过 30 的正偶数中随机选取一数, 则它能表示为两个不同费马素数的和的概率是 $(\quad)$

- A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{1}{3}$

5. 已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $\frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 1$ 交于 A, B 两点, 焦点 $F(0, -c)$, 其中 c 为半焦距, 若 $\triangle ABF$ 是直角三角形, 则该椭圆的离心率为 $(\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

6. 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 作直线与抛物线在第一象限交于点 A , 与准线在第三象限交于点 B , 过点 A 作

准线的垂线, 垂足为 H . 若 $\tan \angle AFH = 2$, 则 $\frac{|AF|}{|BF|} =$ ()

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $2^{f(\frac{m}{n})} \cdot 2^{f(n)} = 4^{\frac{f(m)}{2}}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$. 若 $f(4) = 2$, 则函数 $f(x)$ 在 $[1, 16]$ 上的最大值为 ()

- A. 4 B. 6 C. 3 D. 8

8. 设曲线 $y = a(x-1) - \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $y = 3x - 3$, 则 $a =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 用 1, 2, 3, 4, 5 组成不含重复数字的五位数, 要求数字 4 不出现在首位和末位, 数字 1, 3, 5 中有且仅有两个数字相邻, 则满足条件的不同五位数的个数是 ()

- A. 48 B. 60 C. 72 D. 120

10. 设 $e \approx 2.71828...$ 为自然对数的底数, 函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 1$, 若 $f(a) = 1$, 则 $f(-a) =$ ()

- A. -1 B. 1 C. 3 D. -3

11. 已知集合 $M = \{x | x = 3^n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $N = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}^*\}$, 将集合 $M \cup N$ 的所有元素从小到大一次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$, 则 $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} =$ ()

- A. 1194 B. 1695 C. 311 D. 1095

12. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $2(a_3 + a_5 + a_7) + 3(a_8 + a_{12}) = 66$, 则 $S_{14} =$

- A. 56 B. 66
C. 77 D. 78

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $a = \log_{0.3} 0.2$, $b = \log_2 0.2$, 则 $a + b$ _____ . ab (填“>”或“=”或“<”).

14. 已知点 F 为双曲线 $E: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的右焦点, M, N 两点在双曲线上, 且 M, N 关于原点对称, 若

$MF \perp NF$, 设 $\angle MNF = \theta$, 且 $\theta \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$, 则该双曲线 E 的焦距的取值范围是_____.

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与准线的一个交点坐标为 $(1, \sqrt{3})$ ，则双曲线的焦距为_____.

16. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知点 P 在直线 AB_1 上运动，则下列四个命题中：①三棱锥 $D - C_1BP$ 的体积不变；② $DP \perp D_1C$ ；③当 P 为 AB_1 中点时，二面角 $P - A_1C_1 - C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ；④若正方体的棱长为 2，则

$|DP| + |BP|$ 的最小值为 $\sqrt{8 + 4\sqrt{2}}$ ；其中说法正确的是_____（写出所有说法正确的编号）

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $a > b \geq 0, a \geq c \geq d$ ，且 $ab \geq cd$ 。

(1) 请给出 a, b, c, d 的一组值，使得 $a + b \geq 2(c + d)$ 成立；

(2) 证明不等式 $a + b \geq c + d$ 恒成立。

18. (12 分) 试求曲线 $y = \sin x$ 在矩阵 MN 变换下的函数解析式，其中 $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

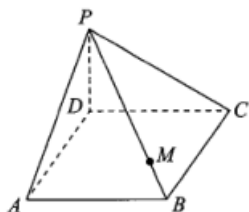
19. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $2b \cos B = a \cos C + c \cos A$ 。

(1) 求 B 的大小；

(2) 若 $b = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

20. (12 分) 如图，在正四棱锥 $P - ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $\angle APC = \frac{\pi}{3}$ ， M 为 PB 上的四等分点，即

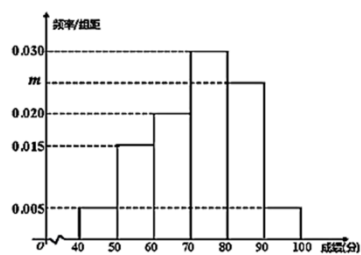
$$BM = \frac{1}{4}BP.$$



(1) 证明：平面 $AMC \perp$ 平面 PBC ；

(2) 求平面 PDC 与平面 AMC 所成锐二面角的余弦值。

21. (12 分) 2019 年入冬时节，长春市民为了迎接 2022 年北京冬奥会，增强身体素质，积极开展冰上体育锻炼。现从速滑项目中随机选出 100 名参与者，并由专业的评估机构对他们的锻炼成果进行评估打分（满分为 100 分）并且认为评分不低于 80 分的参与者擅长冰上运动，得到如图所示的频率分布直方图：



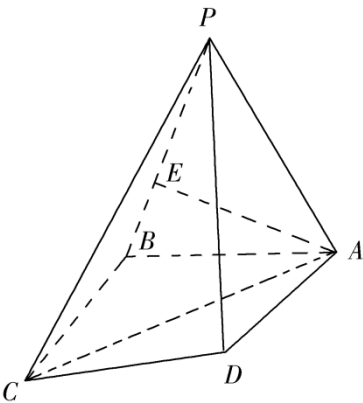
- (1) 求 m 的值;
- (2) 将选取的 100 名参与者的性别与是否擅长冰上运动进行统计, 请将下列 2×2 列联表补充完整, 并判断能否在犯错误的概率在不超过 0.01 的前提下认为擅长冰上运动与性别有关系?

	擅长		不擅长		合计		
男性			30				
女性					50		
合计					100		
$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$(K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d)$$

22. (10 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAB$ 是等边三角形, $BC \perp AB$, $BC = CD = 2\sqrt{3}$, $AB = AD = 2$.

- (1) 若 $PB = 3BE$, 求证: $AE \perp$ 平面 PCD ;
- (2) 若 $PC = 4$, 求二面角 $A-PC-B$ 的正弦值.



参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

过点 $A(0, -1)$ 的直线 l 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ 相切于点 B ，可得 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 。因此

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - r^2, \text{ 即可得出.}$$

【详解】

由圆 $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ 配方为 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$,

$C(0, 1)$ ，半径 $r = 1$ 。

$\therefore$ 过点 $A(0, -1)$ 的直线 l 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ 相切于点 B ,

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0;$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - r^2 = 3;$$

故选：B。

【点睛】

本小题主要考查向量数量积的计算，考查圆的方程，属于基础题。

2、A

【解析】

根据复数的乘法运算法则化简可得 $3 + 2a + (2 - 3a)i$ ，根据纯虚数的概念可得结果。

【详解】

由题可知原式为 $3 + 2a + (2 - 3a)i$ ，该复数为纯虚数，

$$\text{所以 } \begin{cases} 3 + 2a = 0 \\ 2 - 3a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查复数的运算和复数的分类，属基础题.

3、C

【解析】

由 $n=6$ 开始，按照框图，依次求出 s ，进行判断。

【详解】

$$n=6 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \times 6 \sin 60^\circ \approx 2.598, n=12 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \times 12 \sin 30^\circ = 3,$$

$$n=24 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \times 24 \sin 15^\circ \approx 3.1058, \text{ 故选 C.}$$

【点睛】

框图问题，依据框图结构，依次准确求出数值，进行判断，是解题关键。

4、B

【解析】

基本事件总数 $n=15$ ，能表示为两个不同费马素数的和只有 $8=3+5$ ， $20=3+17$ ， $22=5+17$ ，共有 3 个，根据古典概型求出概率。

【详解】

在不超过 30 的正偶数中随机选取一数，基本事件总数 $n=15$

能表示为两个不同费马素数的和的只有 $8=3+5$ ， $20=3+17$ ， $22=5+17$ ，共有 3 个

$$\text{则它能表示为两个不同费马素数的和的概率是 } P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查概率的求法，考查列举法解决古典概型问题，是基础题。

5、A

【解析】

联立直线与椭圆方程求出交点 A, B 两点，利用平面向量垂直的坐标表示得到关于 a, b, c 的关系式，解方程求解即可。

【详解】

$$\text{联立方程 } \begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \\ \frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 1 \end{cases}, \text{ 解方程可得 } \begin{cases} x=0 \\ y=a \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-b \\ y=0 \end{cases},$$

不妨设 $A(0, a)$ ， $B(-b, 0)$ ，由题意可知， $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$ ，

因为 $\overrightarrow{BA} = (b, a)$ ， $\overrightarrow{BF} = (b, -c)$ ，

由平面向量垂直的坐标表示可得, $b \cdot b - ac = 0$,

因为 $b^2 = a^2 - c^2$, 所以 $a^2 - c^2 = ac$,

两边同时除以 a^2 可得, $e^2 + e - 1 = 0$,

解得 $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $e = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去),

所以该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故选: A

【点睛】

本题考查椭圆方程及其性质、离心率的求解、平面向量垂直的坐标表示; 考查运算求解能力和知识迁移能力; 利用平面向量垂直的坐标表示得到关于 a, b, c 的关系式是求解本题的关键; 属于中档题、常考题型.

6、C

【解析】

需结合抛物线第一定义和图形, 得 $\triangle AFH$ 为等腰三角形, 设准线与 x 轴的交点为 M , 过点 F 作 $FC \perp AH$, 再由三角

函数定义和几何关系分别表示转化出 $|BF| = \frac{p}{\cos(\pi - 2\alpha)}$,

$|AF| = \frac{p \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)}$, 结合比值与正切二倍角公式化简即可

【详解】

如图, 设准线与 x 轴的交点为 M , 过点 F 作 $FC \perp AH$. 由抛物线定义知 $|AF| = |AH|$,

所以 $\angle AHF = \angle AFH = \alpha$, $\angle FAH = \pi - 2\alpha = \angle OFB$, $|BF| = \frac{|MF|}{\cos(\pi - 2\alpha)} = \frac{p}{\cos(\pi - 2\alpha)}$,

$|AF| = \frac{|CF|}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{|CH| \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{p \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)}$,

所以 $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\pi - 2\alpha)} = \frac{\tan \alpha}{-\tan 2\alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2} = \frac{3}{2}$.

故函数 $f(x)$ 在 $[1,16]$ 上的最大值为 4.

故选: A.

【点睛】

本题考查了指数幂的运算及化简, 利用定义证明抽象函数的单调性, 赋值法在抽象函数求值中的应用, 属于中档题.

8、D

【解析】

利用导数的几何意义得直线的斜率, 列出 a 的方程即可求解

【详解】

因为 $y' = a - \frac{1}{x}$, 且在点 $(1,0)$ 处的切线的斜率为 3, 所以 $a - 1 = 3$, 即 $a = 4$.

故选: D

【点睛】

本题考查导数的几何意义, 考查运算求解能力, 是基础题

9、A

【解析】

对数字 2 分类讨论, 结合数字 1,3,5 中有且仅有两个数字相邻, 利用分类计数原理, 即可得到结论

【详解】

数字 2 出现在第 2 位时, 数字 1,3,5 中相邻的数字出现在第 3,4 位或者 4,5 位,

共有 $C_3^2 A_2^2 A_2^2 = 12$ 个

数字 2 出现在第 4 位时, 同理也有 12 个

数字 2 出现在第 3 位时, 数字 1,3,5 中相邻的数字出现在第 1,2 位或者 4,5 位,

共有 $C_2^1 C_3^2 A_2^2 A_2^2 = 24$ 个

故满足条件的不同的五位数的个数是 48 个

故选 A

【点睛】

本题主要考查了排列, 组合及简单计数问题, 解题的关键是对数字 2 分类讨论, 属于基础题.

10、D

【解析】

利用 $f(a)$ 与 $f(-a)$ 的关系, 求得 $f(-a)$ 的值.

【详解】

依题意 $f(a) = e^a - e^{-a} - 1 = 1, e^a - e^{-a} = 2$,

所以 $f(-a) = e^{-a} - e^a - 1 = -(e^a - e^{-a}) - 1 = -2 - 1 = -3$

故选: D

【点睛】

本小题主要考查函数值的计算, 属于基础题.

11、D

【解析】

确定 $\{c_n\}$ 中前 35 项里两个数列中的项数, 数列 $\{2n\}$ 中第 35 项为 70, 这时可通过比较确定 $\{3^n\}$ 中有多少项可以插入这 35 项里面即可得, 然后可求和.

【详解】

$n = 35$ 时, $2 \times 35 = 70, 3^n < 70, n \leq 3$, 所以数列 $\{c_n\}$ 的前 35 项和中, $\{3^n\}$ 有三项 3, 9, 27, $\{2n\}$ 有 32 项, 所以 $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{35} = 3 + 9 + 27 + 32 \times 2 + \frac{32 \times 31}{2} \times 2 = 1095$.

故选: D.

【点睛】

本题考查数列分组求和, 掌握等差数列和等比数列前 n 项和公式是解题基础. 解题关键是确定数列 $\{c_n\}$ 的前 35 项中有多少项是 $\{2n\}$ 中的, 又有多少项是 $\{3^n\}$ 中的.

12、C

【解析】

根据等差数列的性质可得 $2(a_3 + a_5 + a_7) + 3(a_8 + a_{12}) = 6a_5 + 6a_{10} = 66$, 即 $a_5 + a_{10} = 11$,

所以 $S_{14} = \frac{14(a_1 + a_{14})}{2} = 7(a_5 + a_{10}) = 77$, 故选 C.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13、>

【解析】

注意到 $a > 1, b < 0$, 故只需比较 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 与 1 的大小即可.

【详解】

由已知, $a > 1, b < 0$, 故有 $ab < 0, a > b$. 又由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_{0.2} 0.3 + \log_{0.2} 2 = \log_{0.2} 0.6 < 1$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/126142000235010113>