大招 动态角旋转问题

模型介绍

★旋转动角问题三步解题技巧总结

☑一. 根据题意找到目标角度

☑二. 表示出目标角度

1. 角度一边动另一边不动，角度变大：目标角 = 起始角 + 速度×时间

2. 角度一边动另一边不动，角度变小：目标角=起始角 − 速度 ×时间

3. 角度一边动另一边不动，角度先变小后变大：
变小：目标角=起始角 − 速度 × 时间
变大：目标角=速度 × 时间−起始角

4. 角度两边都动，运动方向相同且变大
目标角=起始角+速度差×时间

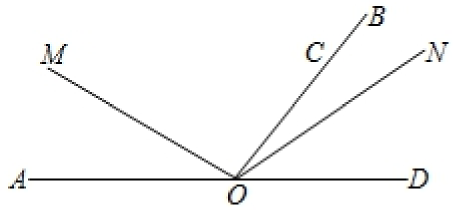
5. 角度两边都动，运动方向相同且变小
目标角=起始角 − 速度差× 时间

6. 角度两边都动，运动方向相反
目标角 = 起始角 + 速度和×时间

☑三. 根据题意列方程求解

例题精讲

【例 1】. 如图，已知$\angle AOB=126^\circ$，$\angle COD=54^\circ$，OM在$\angle AOC$内，ON在$\angle BOD$内，$\angle AOM=\frac{1}{3}\angle AOC$，$\angle BON=\frac{1}{3}\angle BOD$，当$OC$边与$OB$边重合时，$\angle COD$从图中的位置绕点$O$顺时针旋转$n^\circ$（$0<n<126$），则$n^\circ=$__51°或69°．__时，$\angle MON=2\angle BOC$.



解：①$0^\circ<n<54^\circ$时，

$\angle BOC=n^\circ$，$\angle MON=2n^\circ$，

$\angle MON=\frac{2}{3}(126^\circ+n^\circ)+54^\circ-\frac{2}{3}(54^\circ+n^\circ)=100^\circ$，

$\therefore n=51$.

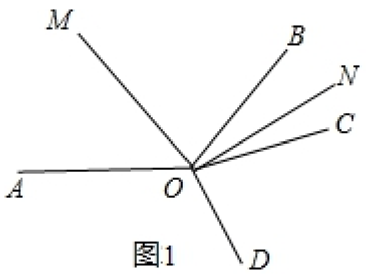


图1

②当$54^\circ<n<126^\circ$时，

$\angle AOC=360^\circ-(126^\circ+n^\circ)=234^\circ-n^\circ$，

$\angle BOD=54^\circ+n^\circ$，

$\therefore \angle MON=360^\circ-\angle AOM-\angle AOB-\angle BON$

$=360^\circ-\frac{1}{3}(234^\circ-n^\circ)-126^\circ-\frac{1}{3}(54^\circ+n^\circ)$

$=138^\circ$

$\therefore n=69$.

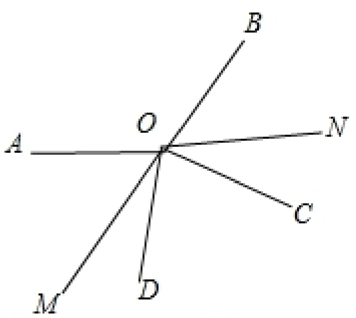


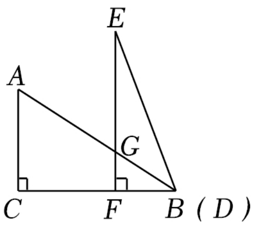
图 2

综上所述，n 的值为 51 或 69．

故答案为：51°或 69°．

➢**变式训练**

【变式 1-1】．已知两个完全相同的直角三角形纸片△ABC、△DEF，如图放置，点 B、D 重合，点 F 在 BC 上，AB 与 EF 交于点 G．∠C＝∠EFB＝90°，∠E＝∠ABC＝30°，现将图中的△ABC 绕点 F 按每秒 15°的速度沿逆时针方向旋转 180°，在旋转的过程中，△ABC 恰有一边与 DE 平行的时间为 <u>　2 或 8 或 10　</u>秒．



解：∵∠E＝∠ABC＝30°，∠C＝∠EFB＝90°，∠E＝∠ABC＝30°，

∴∠D＝∠A＝60°．

①当 DE∥AC 时，如图 1 中，

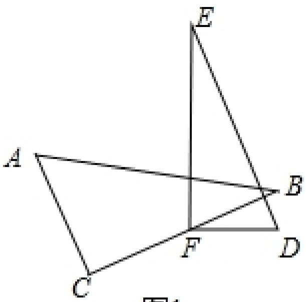


图1

∵∠C＝90，

∴AC⊥BC，

∴DE⊥BC，

∴∠D+∠BFD＝90°，

∴∠BFD＝90°﹣60°＝30°，

∴旋转时间 $t=\frac{30}{15}=2s$．

②如图 2 中，当 DE∥BC 时，

∠BFE＝∠E＝30°，

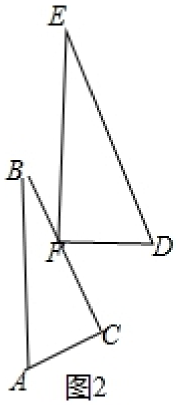


图2

∴$\angle DFB=90°+30°=120°$，

∴旋转时间 $t=\frac{120}{15}=8s$.

③当 $DE /\!/ AB$ 时，如图 3 中，

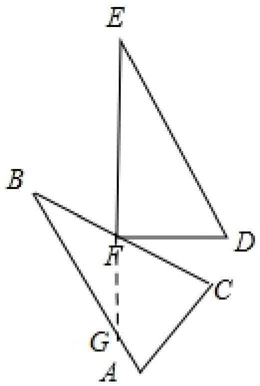


图3

∴$\angle BGF=\angle E=30°$，

∴$\angle BFE=30°+30°=60°$，

∴$\angle DFB=60°+90°=150°$，

∴旋转时间 $t=\frac{150}{15}=10s$.

综上所述，旋转时间为 $2s$ 或 $8s$ 或 $10s$ 时，$\triangle ABC$ 恰有一边与 DE 平行.

故答案为：2 或 8 或 10.

【变式 1-2】. 如图 1，射线 OC 在 $\angle AOB$ 的内部，图中共有 3 个角：$\angle AOB$，$\angle AOC$ 和 $\angle BOC$，若其中有一个角的度数是另一个角度数的两倍，则称射线 OC 是 $\angle AOB$ 的“巧分线”. 如图 2，若 $\angle MPN=75°$，且射线 PQ 绕点 P 从 PN 位置开始，以每秒 $15°$ 的速度逆时针旋转，射线 PM 同时绕点 P 以每秒 $5°$ 的速度逆时针旋转，当 PQ 与 PN 成 $180°$ 时，PQ 与 PM 同时停止旋转，设旋转的时间为 t 秒. 当射线 PQ

是∠MPN 的“巧分线”时，t 的值为 3 或$\frac{15}{8}$或$\frac{30}{7}$.

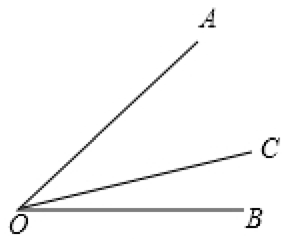


图1

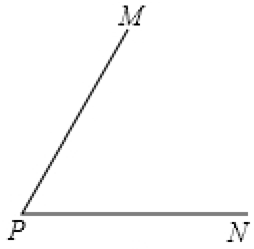


图2

解：当$\angle NPQ=\frac{1}{2}\angle MPN$时，

$15t=\frac{1}{2}(75+5t)$，

解得 $t=3$；

当$\angle NPQ=\frac{1}{3}\angle MPN$时，

$15t=\frac{1}{3}(75+5t)$，

解得 $t=\frac{15}{8}$.

当$\angle NPQ=\frac{2}{3}\angle MPN$时，

$15t=\frac{2}{3}(75+5t)$，

解得 $t=\frac{30}{7}$.

故 t 的值为 3 或$\frac{15}{8}$或$\frac{30}{7}$.

故答案为：3 或$\frac{15}{8}$或$\frac{30}{7}$.

【例 2】. 一副三角板按图 1 方式拼接在一起，其中边 OA，OC 与直线 EF 重合，$\angle AOB=45^\circ$，$\angle COD=60^\circ$，保持三角板 COD 不动，将三角板 AOB 绕着点 O 顺时针旋转一个角度α，（如图 2），在转动过程中两块三角板都在直线 EF 的上方，当 OB 平分由 OA，OC，OD 其中任意两边组成的角时，α的值为 30° 或 90° 或 105°.

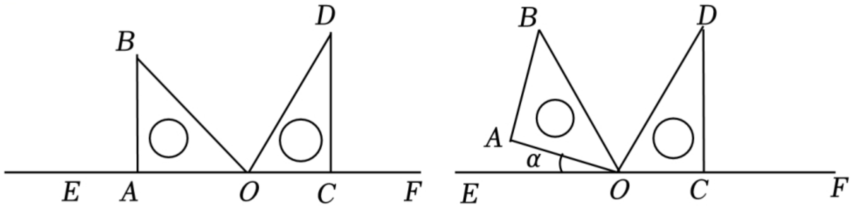


图1　　　　　　　　图2

解：当 OB 平分 $\angle AOD$ 时，

∵ $\angle AOE=\alpha$，$\angle COD=60^\circ$，

∴ $\angle AOD=180^\circ-\angle AOE-\angle COD=120^\circ-\alpha$，

∴ $\angle AOB=\frac{1}{2}\angle AOD=60^\circ-\frac{1}{2}\alpha=45^\circ$，

∴ $\alpha=30^\circ$，

当 OB 平分 $\angle AOC$ 时，

∵ $\angle AOC=180^\circ-\alpha$，

∴ $\angle AOB=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha=45^\circ$，

∴ $\alpha=90^\circ$；

当 OB 平分 $\angle DOC$ 时，

∵ $\angle DOC=60^\circ$，

∴ $\angle BOC=30^\circ$，

∴ $\alpha=180^\circ-45^\circ-30^\circ=105^\circ$，

综上所述，旋转角度α的值为 30° 或 90° 或 105°；

故答案为：30° 或 90° 或 105°．

➢**变式训练**

【**变式 2-1**】. 将一副直角三角板 ABC，ADE 按如图 1 叠加放置，其中 B 与 E 重合，$\angle BAC=45^\circ$，$\angle BAD=30^\circ$．将三角板 ADE 从图 1 位置开始绕点 A 顺时针旋转，并记 AM，AN 分别为 $\angle BAE$，$\angle CAD$ 的平分线，当三角板 ADE 旋转至如图 2 的位置时，$\angle MAN$ 的度数为 $\underline{\quad 37.5 \quad}$°．

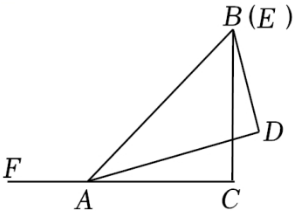


图1

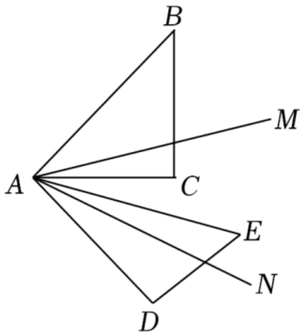


图2

解：∵AM，AN 分别为$\angle BAE$，$\angle CAD$ 的角平分线，

∴$\angle MAE=\frac{1}{2}\angle BAE$，$\angle NAC=\frac{1}{2}\angle DAC$，

∴$\angle MAN=\angle MAE+\angle NAC-\angle CAE$

$=\frac{1}{2}(\angle BAE+\angle DAC)-\angle CAE$

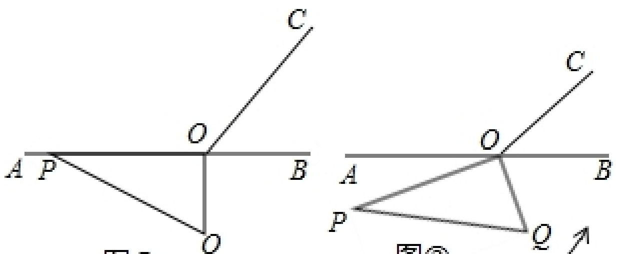
$=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle DAE+2\angle CAE)-\angle CAE$

$=\frac{1}{2}\times 75°$

$=37.5°$；

故答案为：37.5．

【变式 2-2】. 如图①，O 为直线 AB 上一点作射线 OC，使$\angle AOC=120^\circ$，将一个直角三角尺如图摆放，直角顶点在点 O 处，一条直角边 OP 在射线 OA 上，将图①中的三角尺绕点 O 以每秒 5° 的速度按逆时针方向旋转（如图②所示），在旋转一周的过程中第 t 秒时，OQ 所在直线恰好平分$\angle BOC$，则 t 的值为 24s 或 60s .



图① 图②

解：如图 1，∵$\angle AOC=120^\circ$，

∴$\angle BOC=60^\circ$，

∵OQ 平分$\angle BOC$，

∴$\angle BOQ=\frac{1}{2}\angle BOC=30^\circ$，

∴$t=\frac{90^\circ+30^\circ}{5^\circ}=24s$；

如图 2，∵$\angle AOC=120^\circ$，

∴$\angle BOC=60^\circ$，

∵OQ' 平分$\angle BOC$，

∴$\angle AOQ=\angle BOQ'=\frac{1}{2}\angle BOC=30^\circ$，

∴$t=\frac{180^\circ+30^\circ+90^\circ}{5^\circ}=60s$，

综上所述，OQ 所在直线恰好平分$\angle BOC$，则 t 的值为 24s 或 60s，

故答案为：24s 或 60s.

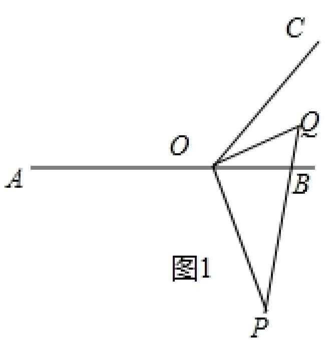


图1

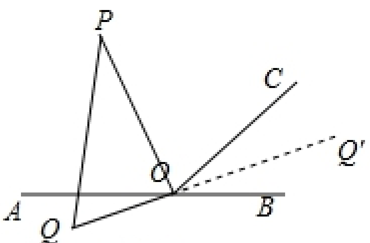
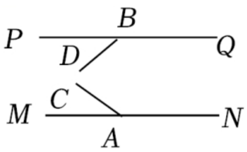


图2

课后创新培养

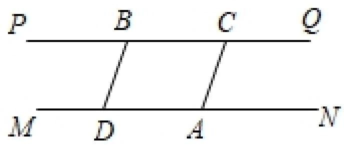
实战演练

1．如图，已知 $PQ // MN$，点 A，B 分别在 MN，PQ 上，射线 AC 自射线 AM 的位置开始，以每秒 3° 的速度绕点 A 顺时针旋转至 AN 便立即逆时针回转，射线 BD 自射线 BP 的位置开始，以每秒 1° 的速度绕点 B 逆时针旋转至 BQ 后停止运动．若射线 BD 先转动 30 秒，射线 AM 才开始转动，当射线 AC，BD 互相平行时，射线 AC 的旋转时间为 <u>37.5 或 105</u> 秒．



解：根据题意，需要分两种情况，

当射线 AC 顺时针旋转时，如图所示：



$\because PQ // MN$，

$\therefore \angle PBD = \angle BDN$，

$\because BD // AC$，

$\therefore \angle BDA = \angle CAN$，

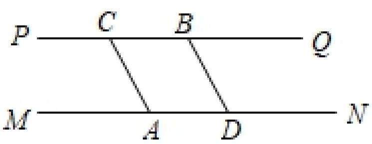
$\therefore \angle PBD = \angle CAN$，

设射线 AC 运动时间为 t，则 $\angle MAC = 3°t$，$\angle PBD = 30° + 1°t$，

$\therefore \angle CAN = 180° - 3°t$，

$\therefore 30° + 1°t = 180° - 3°t$，解得 $t = 37.5$．

当射线 AC 逆时针旋转时，如图所示：



$\because PQ // MN$，

∴∠PBD＝∠BDN，

∵BD∥AC，

∴∠BDA＝∠CAN，

∴∠PBD＝∠CAN，

设射线 AC 运动时间为 t，则∠CAN＝3°t－180°，∠PBD＝30°+1°t，

∴30°+1°t＝3°t－180°，解得 t＝105．

故答案为：37.5 或 105．

2．如图 1，直线 ED 上有一点 O，过点 O 在直线 ED 上方作射线 OC，将一直角三角板 AOB（∠OAB＝30°）的直角顶点放在点 O 处，一条直角边 OA 在射线 OD 上，另一边 OB 在直线 ED 上方，将直角三角板绕着点 O 按每秒 10°的速度逆时针旋转一周，旋转时间为 t 秒．若射线 OC 的位置保持不变，且∠COE＝140°．则在旋转过程中，如图 2，当 t＝__2 或 8 或 32__秒时，射线 OA，OC 与 OD 中的某一条射线恰好是另两条射线所夹角的平分线．

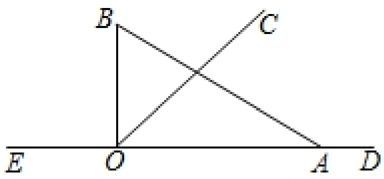


图 1

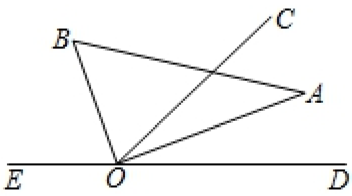


图 2

解：当射线 OA 是∠COD 的平分线时，

∵∠COD＝180°－∠COE＝40°，OA 是∠COD 的平分线，

∴∠AOD＝$\frac{1}{2}$∠COD＝20°，

∴t＝$\frac{20}{10}$＝2；

当射线 OC 是∠AOD 的平分线时，

∠AOD＝2∠COD＝80°，

∴t＝$\frac{80}{10}$＝8；

当射线 OD 是∠COA 的平分线时，

360－10t＝40，

∴t＝32，

故答案为：2 或 8 或 32．

3．如图 1，已知$\angle ABC=50°$，有一个三角板 BDE 与$\angle ABC$ 共用一个顶点 B，其中$\angle EBD=45°$．

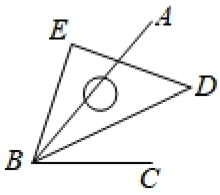


图 1

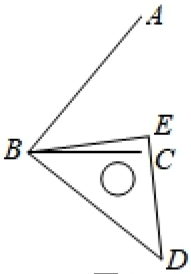


图 2

（1）若 BD 平分$\angle ABC$，求$\angle EBC$ 的度数；

（2）如图 2，将三角板绕着点 B 顺时针旋转α度（$0°<\alpha<90°$），当 $AB\perp BD$ 时，求$\angle EBC$ 的度数．

解：（1）∵BD 平分$\angle ABC$，$\angle ABC=50°$，

∴$\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=25°$，

∵$\angle EBD=45°$，

∴$\angle EBC=\angle EBD+\angle DBC=45°+25°=70°$．

（2）∵$AB\perp BD$，

∴$\angle ABD=90°$，

∵$\angle ABC=50°$，

∴$\angle DCB=90°-50°=40°$，

∵$\angle EBD=45°$，

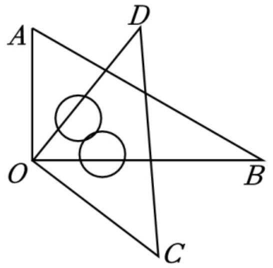
∴$\angle EBC=45°-40°=5°$．

4．将一副三角板叠放在一起，使直角顶点重合于点 O．

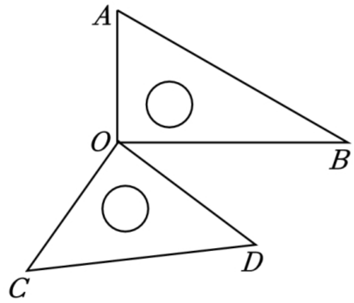
（1）如图 1，若 $\angle AOD=35^\circ$，求 $\angle BOC$ 的度数；

（2）如图（1），求 $\angle BOD+\angle AOC$ 的度数；

（3）如图（2）若三角板 AOB 保持不动，将三角板 COD 的边 OD 与边 OA 重合，然后将其绕点 O 旋转．试猜想在旋转过程中，$\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 有何数量关系？请说明理由．



图（1）



图（2）

解：（1）若 $\angle AOD=35^\circ$，

$\because \angle AOB=\angle COD=90^\circ$，

$\therefore \angle BOD=90^\circ-35^\circ=55^\circ$，

$\therefore \angle BOC=90^\circ-\angle BOD=90^\circ-55^\circ=35^\circ$；

（2）$\because \angle BOD=\angle AOB+\angle COD-\angle AOC$，

$\therefore \angle BOD+\angle AOC=\angle AOB+\angle COD=90^\circ+90^\circ=180^\circ$；

（3）$\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 互补．

当 $\angle AOB$ 与 $\angle DOC$ 有重叠部分时，

$\because \angle AOB=\angle COD=90^\circ$，

$\therefore \angle AOD+\angle BOD+\angle BOD+\angle BOC=180^\circ$．

$\because \angle AOD+\angle BOD+\angle BOC=\angle AOC$，

$\therefore \angle AOC+\angle BOD=180^\circ$；

当 $\angle AOB$ 与 $\angle DOC$ 没有重叠部分时，$\angle AOB+\angle COD+\angle AOC+\angle BOD=360^\circ$，

又 $\because \angle AOB=\angle COD=90^\circ$，

$\therefore \angle AOC+\angle BOD=180^\circ$．

5．已知$\angle AOB=60^{\circ}$，OM平分$\angle AOC$，ON平分$\angle BOC$，求：

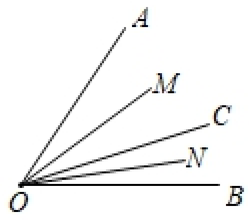


图1

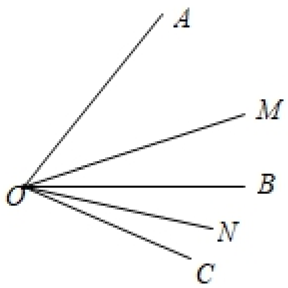


图2

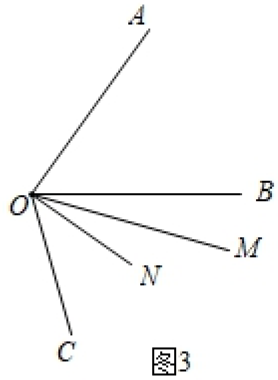


图3

（1）如图1，OC为$\angle AOB$内部任意一条射线，求$\angle MON=$__30°__；

（2）如图2，当OC旋转到$\angle AOB$的外部时，$\angle MON$的度数会发生变化吗？请说明原因；

（3）如图3，当OC旋转到$\angle AOB$（$\angle BOC<120^{\circ}$）的外部且射线OC在OB的下方时，OM平分$\angle AOC$，射线ON在$\angle BOC$内部，$\angle NOC=\frac{1}{4}\angle BOC$，求$\angle COM-\frac{2}{3}\angle BON$的值？

解：（1）∵OM平分$\angle AOC$，ON平分$\angle BOC$，$\angle AOB=60^{\circ}$，

∴$\angle MOC=\frac{1}{2}\angle AOC$，

∴$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC$，

∴$\angle MON=\angle MOC+\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC+\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times60^{\circ}=30^{\circ}$．

故答案为：30°；

（2）不变，

当OC旋转到$\angle AOB$的外部时，

∵OM平分$\angle AOC$，ON平分$\angle BOC$，$\angle AOB=60^{\circ}$，

∴$\angle MOC=\frac{1}{2}\angle AOC$，

∴$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC$，

∴$\angle MON=\angle MOC-\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC-\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times60^{\circ}=30^{\circ}$．

∴$\angle MON$的度数不会发生变化；

（3）当OC旋转到$\angle AOB$（$\angle BOC<120^{\circ}$）的外部且射线OC在OB的下方时，

∵OM平分$\angle AOC$，$\angle NOC=\frac{1}{4}\angle BOC$，

$\therefore \angle COM = \frac{1}{2}\angle AOC$，$\angle BON = \frac{3}{4}\angle BOC$，

$\therefore \angle COM - \frac{2}{3}\angle BON = \frac{1}{2}\angle AOC - \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOC - \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOB = 30^\circ$．

6．如图 1，点 O 为直线 AB 上一点，过点 O 作射线 OC，使$\angle AOC$：$\angle BOC$＝1：2，$\angle MON$ 的一边 OM 在射线 OB 上，另一边 ON 在直线 AB 的下方，且$\angle MON$＝90°．

（1）如图 1，求$\angle CON$ 的度数；

（2）将图 1 中的$\angle MON$ 绕点 O 以每秒 20° 的速度沿逆时针方向旋转一周，在旋转的过程中，如图 2，若直线 ON 恰好平分锐角$\angle AOC$，求$\angle MON$ 所运动的时间 t 值；

（3）在（2）的条件下，当$\angle AOC$ 与$\angle NOC$ 互余时，求出$\angle BOC$ 与$\angle MOC$ 之间的数量关系．

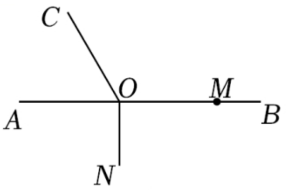


图1

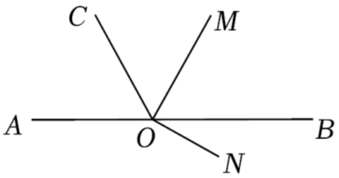


图2

解：（1）∵$\angle AOC$：$\angle BOC$＝1：2，$\angle AOC+\angle MOC$＝180°，

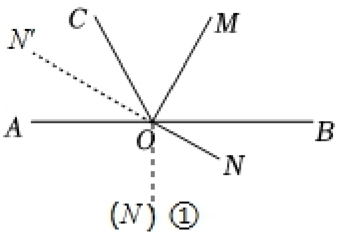
$\therefore \angle AOC = \frac{1}{3}\times 180^\circ = 60^\circ$，

∵$\angle MON$＝90°，

$\therefore \angle AON$＝90°，

$\therefore \angle CON = \angle AOC + \angle AON = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$；

（2）当直线 ON 平分$\angle AOC$ 时，如图，ON'平分$\angle AOC$，逆时针旋转 60 度至 ON''时，直线 ON 平分所以 t＝3，



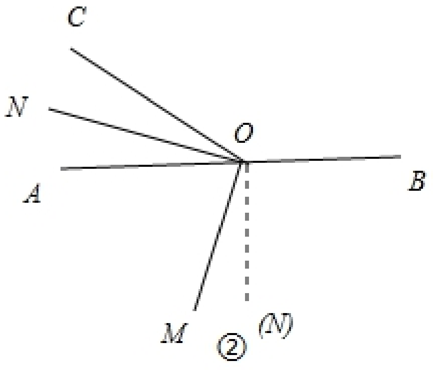
∵$\angle AOC$＝60°，

$\therefore \angle AON'$＝30°，

此时射线 ON 逆时针旋转 60 度，

$\therefore \angle MON$ 所运动的时间 t＝60÷20＝3（s）；

如图②，



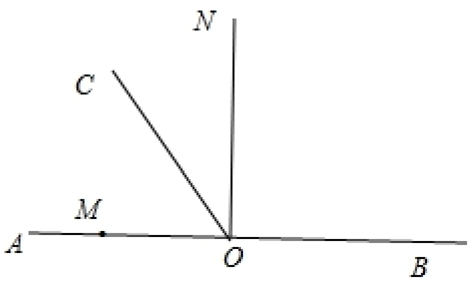
∵直线 ON 恰好平分锐角 $\angle AOC$，

∴ON 沿逆时针旋转的度数为 $90°+150°=240°$，

∴$\angle MON$ 所运动的时间 $t=\frac{240}{20}=12$（s）；

综上，$\angle MON$ 所运动的时间 t 值为 $3s$ 或 $12s$；

（3）如图③所示：



图③

∵$\angle AOC+\angle NOC=90°$，$OM$ 与 OA 重合

∴$\angle BOC$ 与 $\angle MOC$ 互补．

如图②所示：

当 ON 平分 $\angle AOC$ 时，$\angle AOC+\angle NOC=90°$，

∴$\angle NOC=30°$，$\angle MOC=120°$，$\angle BOC=120°$，

∴$\angle BOC=\angle MOC$．

综上所述：$\angle BOC$ 与 $\angle MOC$ 互补或相等．

7. 点 O 直线 AB 上一点，过点 O 作射线 OC，使得$\angle BOC=65^{\circ}$，将一直角三角板的直角顶点放在点 O 处.

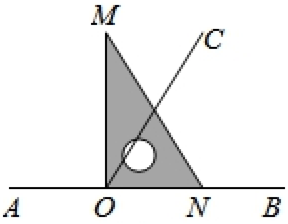


图1

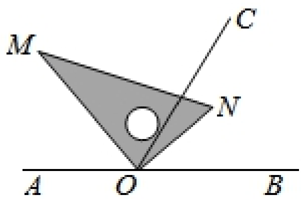


图2

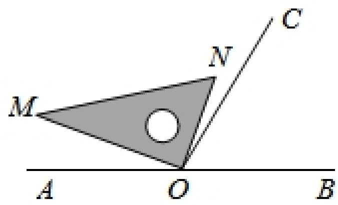


图3

（1）如图 1，将三角板 MON 的一边 ON 与射线 OB 重合时，求$\angle MOC$ 的度数；

（2）如图 2，将三角板 MON 绕点 O 逆时针旋转一定角度，此时 OC 是$\angle MOB$ 的平分线，求$\angle BON$ 和$\angle CON$ 的度数；

（3）将三角板 MON 绕点 O 逆时针旋转至图 3 时，$\angle NOC=\frac{1}{4}\angle AOM$，求$\angle NOB$ 的度数.

解：（1）$\because \angle MON=90^{\circ}$，$\angle BOC=65^{\circ}$，

$\therefore \angle MOC=\angle MON-\angle BOC=90^{\circ}-65^{\circ}=25^{\circ}$；

（2）$\because \angle BOC=65^{\circ}$，$OC$ 是$\angle MOB$ 的角平分线，

$\therefore \angle MOB=2\angle BOC=130^{\circ}$，

$\therefore \angle BON=\angle MOB-\angle MON=130^{\circ}-90^{\circ}=40^{\circ}$，

$\angle CON=\angle COB-\angle BON=65^{\circ}-40^{\circ}=25^{\circ}$，

即$\angle BON=40^{\circ}$，$\angle CON=25^{\circ}$；

（3）$\because \angle NOC=\frac{1}{4}\angle AOM$，

$\therefore \angle AOM=4\angle NOC$.

$\because \angle BOC=65^{\circ}$，

$\therefore \angle AOC=\angle AOB-\angle BOC=180^{\circ}-65=115^{\circ}$，

$\because \angle MON=90^{\circ}$，

$\therefore \angle AOM+\angle NOC=\angle AOC-\angle MON=115^{\circ}-90^{\circ}=25^{\circ}$，

$\therefore 4\angle NOC+\angle NOC=25^{\circ}$，

$\therefore \angle NOC=5^{\circ}$，

$\therefore \angle NOB=\angle NOC+\angle BOC=70^{\circ}$.

8．以直线 AB 上一点 O 为端点作射线 OC，使∠BOC＝40°，将一个直角三角板的直角顶点放在 O 处，即∠DOE＝90°．

（1）如图 1，若直角三角板 DOE 的一边 OE 放在射线 OA 上，求∠COD 的度数；

（2）如图 2，将直角三角板 DOE 绕点 O 顺时针转动到某个位置，若 OE 恰好平分∠AOC，求∠COD 的度数；

（3）将直三角板 DOE 绕点 O 顺时针转动（OD 与 OB 重合时为停止）的过程中，恰好∠COD＝$\frac{1}{3}$∠AOE，求此时∠BOD 的度数．

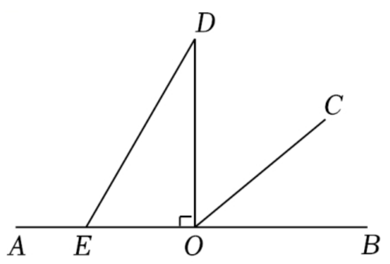


图1

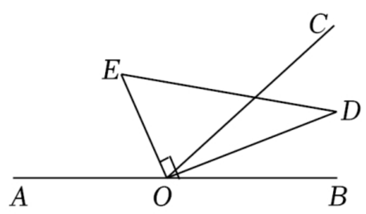


图2

解：（1）由题意得∠BOD＝90°，

∵∠BOC＝40°，

∴∠COD＝90°﹣40°＝50°．

（2）∵∠AOC+∠BOC＝180°，∠BOC＝40°，

∴∠AOC＝180°﹣40°＝140°，

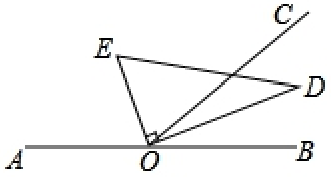
∵OE 平分∠AOC，

∴∠COE＝$\frac{1}{2}$∠AOC＝70°，

∵∠DOE＝90°，

∴∠COD＝90°﹣70°＝20°，

（3）①当∠COD 在∠BOC 的内部时，



∵∠COD＝∠BOC﹣∠BOD，而∠BOC＝40°，

∴∠COD＝40°﹣∠BOD，

∵∠AOE+∠EOD+∠BOD=180°，∠EOD=90°，

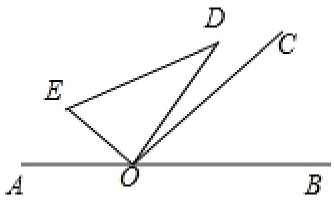
∴∠AOE=90°﹣∠BOD，

又∵∠$COD=\frac{1}{3}$∠AOE，

∴40°﹣∠$BOD=\frac{1}{3}$（90°﹣∠BOD），

∴∠BOD=15°；

②当∠COD在∠BOC的外部时，



∵∠COD=∠BOD﹣∠BOC，而∠BOC=40°，

∴∠COD=∠BOD﹣40°，

∵∠AOE+∠EOD﹣∠BOD=180°，∠EOD=90°，

∴∠AOE=90°﹣∠BOD，

又∵∠$COD=\frac{1}{3}$∠AOE，

∴∠BOD﹣40°$=\frac{1}{3}$（90°﹣∠BOD），

∴∠BOD=52.5°，

综上所述：∠BOD的度数为15°或52.5°．

9．已知∠AOD=160°，OB、OC、OM、ON是∠AOD内的射线．

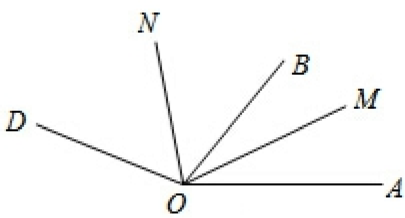


图1

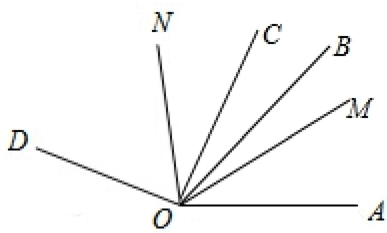


图2

（1）如图1，若OM平分∠AOB，ON平分∠BOD．当OB绕点O在∠AOD内旋转时，求∠MON的大小；

（2）如图2，若∠BOC=20°，OM平分∠AOC，ON平分∠BOD．当∠BOC绕点O在∠AOD内旋转时，求∠MON的大小；

（3）在（2）的条件下，若$\angle AOB=10^\circ$，当$\angle BOC$在$\angle AOD$内绕着点O以2度/秒的速度逆时针旋转t秒时，$\angle AOM=\frac{2}{3}\angle DON$．求$t$的值．

解：（1）因为$\angle AOD=160^\circ$，

OM平分$\angle AOB$，ON平分$\angle BOD$，

所以$\angle MOB=\frac{1}{2}\angle AOB$，$\angle BON=\frac{1}{2}\angle BOD$，

即$\angle MON=\angle MOB+\angle BON$

$=\frac{1}{2}\angle AOB+\frac{1}{2}\angle BOD$

$=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOD)$

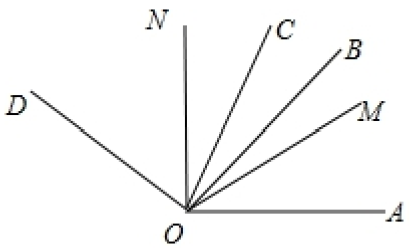
$=\frac{1}{2}\angle AOD=80^\circ$，

答：$\angle MON$的度数为80°；

（2）因为OM平分$\angle AOC$，ON平分$\angle BOD$，

所以$\angle MOC=\frac{1}{2}\angle AOC$，$\angle BON=\frac{1}{2}\angle BOD$，

当OC在OB左侧时，如图：



$\angle MON=\angle MOC+\angle BON-\angle BOC$

$=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOD-\angle BOC$

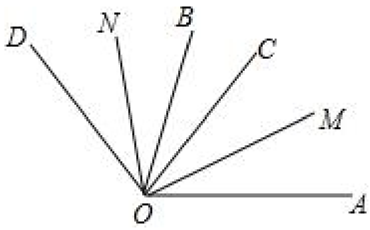
$=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOD)-\angle BOC$

$=\frac{1}{2}(\angle AOD+\angle BOC)-\angle BOC$

$=\frac{1}{2}\times 180^\circ-20^\circ$

$=70^\circ$；

如图，当射线OC在OB右侧时，



∵$\angle COM=\frac{1}{2}\angle AOC$，$\angle BON=\frac{1}{2}\angle BOD$，

∴$\angle MON=\angle MOC+\angle BON+\angle BOC$

$=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOD+\angle BOC$

$=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOD)+\angle BOC$

$=\frac{1}{2}(\angle AOD-\angle BOC)+\angle BOC$

$=\frac{1}{2}\times140^\circ+20^\circ$

$=90^\circ$；

答：$\angle MON$ 的度数为 70° 或 90°．

（3）∵射线 OB 从 OA 逆时针以 2° 每秒的速度旋转 t 秒，$\angle COB=20^\circ$，

∴根据（2）中，得

$\angle AOC=\angle AOB+\angle COB=2t^\circ+10^\circ+20^\circ=2t^\circ+30^\circ$．

∵射线 OM 平分$\angle AOC$，

∴$\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOC=t^\circ+15^\circ$．

∵$\angle BOD=\angle AOD-\angle BOA$，$\angle AOD=160^\circ$，

∴$\angle BOD=150^\circ-2t^\circ$．

∵射线 ON 平分$\angle BOD$，

∴$\angle DON=\frac{1}{2}\angle BOD=75^\circ-t^\circ$．

又∵$\angle AOM$：$\angle DON=2$：3，

∴（$t+15$）：（$75-t$）$=2$：3，

解得 $t=21$．

答：t 的值为 21 秒．

10．点 O 为直线 AB 上一点，过点 O 作射线 OC，使$\angle BOC=65^\circ$，将一直角三角板的直角顶点放在点 O 处．