

§ 4.2 直线、圆的位置关系

§ 4.2.1 直线与圆的位置关系

一、教材分析

学生在初中的学习中已了解直线与圆的位置关系,并知道可以利用直线与圆的交点的个数以及圆心与直线的距离 d 与半径 r 的关系判断直线与圆的位置关系,但是,在初中学习时,利用圆心与直线的距离 d 与半径 r 的关系判断直线与圆的位置关系的方法却以结论性的形式呈现.在高一学习了解析几何以后,要考虑的问题是如何掌握由直线和圆的方程判断直线与圆的位置关系的方法.解决问题的方法主要是几何法和代数法.其中几何法应该是在初中学习的基础上,结合高中所学的点到直线的距离公式求出圆心与直线的距离 d 后,比较与半径 r 的关系从而作出判断.适可而止地引进用联立方程组转化为二次方程判别根的“纯代数判别法”,并与“几何法”欣赏比较,以决优劣,从而也深化了基本的“几何法”.含参数的问题、简单的弦的问题、切线问题等综合问题作为进一步的拓展提高或综合应用,也适度地引入课堂教学中,但以深化“判定直线与圆的位置关系”为目的,要控制难度.虽然学生学习解析几何了,但把几何问题代数化无论是思维习惯还是具体转化方法,学生仍是似懂非懂,因此应不断强化,逐渐内化为学生的习惯和基本素质.

二、教学目标

1. 知识与技能

- (1) 理解直线与圆的位置的种类;
- (2) 利用平面直角坐标系中点到直线的距离公式求圆心到直线的距离;
- (3) 会用点到直线的距离来判断直线与圆的位置关系.

(二) 过程与方法

设直线 $l: ax + by + c = 0$, 圆 $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 圆的半径为 r , 圆心 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ 到直线的距离为 d , 则判别直线与圆的位置关系的依据有以下几点:

- (1) 当 $d > r$ 时, 直线 l 与圆 C 相离;
- (2) 当 $d = r$ 时, 直线 l 与圆 C 相切;
- (3) 当 $d < r$ 时, 直线 l 与圆 C 相交;

3. 情态与价值观

让学生通过观察图形, 理解并掌握直线与圆的位置关系, 培养学生数形结合的思想.

三、教学重点与难点

教学重点: 直线与圆的位置关系的几何图形及其判断方法.

教学难点: 用坐标法判断直线与圆的位置关系.

四、课时安排

2 课时

五、教学设计

第 1 课时

(一) 导入新课

思路 1. 平面解析几何是高考的重点和热点内容, 每年的高考试题中有选择题、填空题和解答题, 考查的知识点有直线方程和圆的方程的建立、直线与圆的位置关系等, 本节主要学习直线与圆的关系.

思路 2. (复习导入)

(1) 直线方程 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不同时为零).

(2) 圆的标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 圆心为 (a, b) , 半径为 r .

(3) 圆的一般方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (其中 $D^2 + E^2 - 4F > 0$), 圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$, 半径为 $\frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

(二) 推进新课、新知探究、提出问题

①初中学过的平面几何中,直线与圆的位置关系有几类?

②在初中,我们怎样判断直线与圆的位置关系呢?

③如何用直线与圆的方程判断它们之间的位置关系呢?

④判断直线与圆的位置关系有几种方法? 它们的特点是什么?

讨论结果: ①初中学过的平面几何中,直线与圆的位置关系有直线与圆相离、直线与圆相切、直线与圆相交三种.

②直线与圆的三种位置关系的含义是:

直线与圆的位置关系	公共点个数	圆心到直线的距离 d 与半径 r 的关系	图形
相交	两个	$d < r$	
相切	只有一个	$d = r$	
相离	没有	$d > r$	

③方法一,判断直线 l 与圆的位置关系,就是看由它们的方程组成的方程组有无实数解;方法二,可以依据圆心到直线的距离与半径长的关系判断直线与圆的位置关系.

④直线与圆的位置关系的判断方法:

几何方法步骤:

1°把直线方程化为一般式,求出圆心和半径.

2°利用点到直线的距离公式求圆心到直线的距离.

3°作判断: 当 $d > r$ 时,直线与圆相离; 当 $d = r$ 时,直线与圆相切;当 $d < r$ 时,直线与圆相交.

代数方法步骤:

1°将直线方程与圆的方程联立成方程组.

2°利用消元法,得到关于另一个元的一元二次方程.

3°求出其判别式 Δ 的值.

4°比较 Δ 与 0 的大小关系,若 $\Delta > 0$,则直线与圆相离; 若 $\Delta = 0$,则直线与圆相切;若 $\Delta < 0$,则直线与圆相交.反之也成立.

(三) 应用示例

思路 1

例 1 已知直线 $l: 3x+y-6=0$ 和圆心为 C 的圆 $x^2+y^2-2y-4=0$,判断直线 l 与圆的位置关系.如果相交,求出它们的交点坐标.

活动:学生思考或交流,回顾判断的方法与步骤,教师引导学生考虑问题的思路,必要时提示,对学生的思维作出评价;方法一,判断直线 l 与圆的位置关系,就是看由它们的方程组成的方程组有无实数解;方法二,可以依据圆心到直线的距离与半径长的关系判断直线与圆的位置关系.

解法一:由直线 l 与圆的方程,得

$$\begin{cases} 3x + y - 6 = 0, & (1) \\ x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0. & (2) \end{cases}$$

消去 y ,得 $x^2-3x+2=0$,因为 $\Delta=(-3)^2-4\times 1\times 2=1>0$,所以直线 l 与圆相交,有两个公共点.

解法二:圆 $x^2+y^2-2y-4=0$ 可化为 $x^2+(y-1)^2=5$,其圆心 C 的坐标为 $(0,1)$,半径长为 $\sqrt{5}$,圆心 C 到直线 l 的

距离 $d = \frac{|3\times 0 + 1 - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} < \sqrt{5}$.所以直线 l 与圆相交,有两个公共点.

由 $x^2-3x+2=0$, 得 $x_1=2, x_2=1$. 把 $x_1=2$ 代入方程①, 得 $y_1=0$; 把 $x_2=1$ 代入方程①, 得 $y_2=3$. 所以直线 l 与圆相交有两个公共点, 它们的坐标分别是 $(2,0)$ 和 $(1,3)$.

点评: 比较两种解法, 我们可以看出, 几何法判断要比代数法判断快得多, 但是若要求交点, 仍需联立方程组求解.

例 2 已知圆的方程是 $x^2+y^2=2$, 直线 $y=x+b$, 当 b 为何值时, 圆与直线有两个公共点, 只有一个公共点没有公共点.

活动: 学生思考或交流, 教师引导学生考虑问题的思路, 必要时提示, 对学生的思维作出评价. 我们知道, 判断直线 l 与圆的位置关系, 就是看由它们的方程组成的方程组有无实数解, 或依据圆心到直线的距离与半径长的关系判断直线与圆的位置关系. 反过来, 当已知圆与直线的位置关系时, 也可求字母的取值范围, 所求曲线公共点问题可转化为 b 为何值时, 方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x + b \end{cases} \text{ 有两组不同实数根、有两组相同实根、无实根的问题.}$$

圆与直线有两个公共点、只有一个公共点、没有公共点的问题, 可转化为 b 为何值时圆心到直线的距离小于半径、等于半径、大于半径的问题.

解法一: 若直线 $l: y=x+b$ 和圆 $x^2+y^2=2$ 有两个公共点、只有一个公共点、没有公共点,

$$\text{则方程组 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x + b \end{cases} \text{ 有两个不同解、有两个相同解、没有实数解,}$$

消去 y , 得 $2x^2+2bx+b^2-2=0$,

所以 $\Delta=(2b)^2-4 \times 2(b^2-2)=16-4b^2$.

所以, 当 $\Delta=16-4b^2>0$, 即 $-2<b<2$ 时, 圆与直线有两个公共点; 当 $\Delta=16-4b^2=0$, 即 $b=\pm 2$ 时, 圆与直线只有一个公共点; 当 $\Delta=16-4b^2<0$, 即 $b>2$ 或 $b<-2$ 时, 圆与直线没有公共点.

解法二: 圆 $x^2+y^2=2$ 的圆心 C 的坐标为 $(0,0)$, 半径长为 2 , 圆心 C 到直线 $l: y=x+b$ 的距离

$$d = \frac{|-1 \times 0 + 1 \times 0 - b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}}.$$

当 $d>r$ 时, 即 $\frac{|b|}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, 即 $|b|>2$, 即 $b>2$ 或 $b<-2$ 时, 圆与直线没有公共点;

当 $d=r$ 时, 即 $\frac{|b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 即 $|b|=2$, 即 $b=\pm 2$ 时, 圆与直线只有一个公共点;

当 $d<r$ 时, 即 $\frac{|b|}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$, 即 $|b|<2$, 即 $-2<b<2$ 时, 圆与直线有两个公共点.

点评: 由于圆的特殊性, 判断圆与直线的位置关系, 多采用圆心到直线的距离与半径的大小进行比较的方法, 而以后我们将要学习的圆锥曲线与直线位置关系的判断, 则需要利用方程组解的个数来判断.

变式训练

已知直线 l 过点 $P(4,0)$, 且与圆 $O: x^2+y^2=8$ 相交, 求直线 l 的倾斜角 α 的取值范围.

解法一: 设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$, 即 $kx-y-4k=0$,

因为直线 l 与圆 O 相交, 所以圆心 O 到直线 l 的距离小于半径,

$$\text{即 } \frac{|-4k|}{\sqrt{k^2+1}} < 2\sqrt{2}, \text{ 化简得 } k^2 < 1, \text{ 所以 } -1 < k < 1, \text{ 即 } -1 < \tan \alpha < 1.$$

当 $0 \leq \tan \alpha < 1$ 时, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}$; 当 $-1 < \tan \alpha < 0$ 时, $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$.

所以 α 的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$.

解法二: 设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x-4), \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } (k^2+1)x^2 - 8k^2x + 16k^2 - 8 = 0.$$

因为直线 l 与圆 O 相交, 所以 $\Delta = (-8k^2)^2 - 4(k^2+1)(16k^2-8) > 0$, 化简得 $k^2 < 1$. (以下同解法一)

点评: 涉及直线与圆的位置关系的问题, 常可运用以上两种方法. 本题若改为选择题或填空题, 也可利用图形直接得到答案.

思路 2

例 1 已知圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$, 求经过圆上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程.

活动: 学生思考讨论, 教师提示学生解题的思路, 引导学生回顾直线方程的求法, 既考虑通法又考虑图形的几何性质. 此切线过点 (x_0, y_0) , 要确定其方程, 只需求出其斜率 k , 可利用待定系数法(或直接求解). 直线与圆相切的几何特征是圆心到切线的距离等于圆的半径, 切线与法线垂直.

解法一: 当点 M 不在坐标轴上时, 设切线的斜率为 k , 半径 OM 的斜率为 k_1 ,

因为圆的切线垂直于过切点的半径, 所以 $k = -\frac{1}{k_1}$.

因为 $k_1 = \frac{y_0}{x_0}$ 所以 $k = -\frac{x_0}{y_0}$. 所以经过点 M 的切线方程是 $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$.

整理得 $x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2$. 又因为点 $M(x_0, y_0)$ 在圆上, 所以 $x_0^2 + y_0^2 = r^2$.

所以所求的切线方程是 $x_0x + y_0y = r^2$.

当点 M 在坐标轴上时, 可以验证上面的方程同样适用.

解法二: 设 $P(x, y)$ 为所求切线上的任意一点, 当 P 与 M 不重合时, $\triangle OPM$ 为直角三角形, OP 为斜边, 所以 $OP^2 = OM^2 + MP^2$, 即 $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

整理得 $x_0x + y_0y = r^2$. 可以验证, 当 P 与 M 重合时同样适合上式, 故所求的切线方程是 $x_0x + y_0y = r^2$.

解法三: 设 $P(x, y)$ 为所求切线上的任意一点, 当点 M 不在坐标轴上时, 由 $OM \perp MP$ 得 $k_{OM} \cdot k_{MP} = -1$, 即

$\frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{y_0 - y}{x_0 - x} = -1$, 整理得 $x_0x + y_0y = r^2$. 可以验证, 当点 M 在坐标轴上时, P 与 M 重合, 同样适合上式, 故所求的切

线方程是 $x_0x + y_0y = r^2$.

点评: 如果已知圆上一点的坐标, 我们可直接利用上述方程写出过这一点的切线方程.

变式训练

求过圆 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的圆的切线方程.

解: 设 $x_0 \neq a, y_0 \neq b$, 所求切线斜率为 k , 则由圆的切线垂直于过切点的半径, 得 $k = -\frac{1}{k_{CM}} = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}$, 所以所

求方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}(x - x_0)$, 即 $(y-b)(y_0-b) + (x-a)(x_0-a) = (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2$.

又点 $M(x_0, y_0)$ 在圆上, 则有 $(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 = r^2$.

代入上式, 得 $(y-b)(y_0-b) + (x-a)(x_0-a) = r^2$.

当 $x_0=a, y_0=b$ 时仍然成立, 所以过圆 $C: (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的圆的切线方程为 $(y-b)(y_0-b)+(x-a)(x_0-a)=r^2$.

例2 从点 $P(4,5)$ 向圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 引切线, 求切线方程.

活动: 学生思考交流, 提出解题的方法, 回想直线方程的求法, 先验证点与圆的位置关系, 再利用几何性质解题.

解: 把点 $P(4,5)$ 代入 $(x-2)^2+y^2=4$, 得 $(4-2)^2+5^2=29>4$, 所以点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 外. 设切线斜率为 k , 则切线方程为 $y-5=k(x-4)$, 即 $kx-y+5-4k=0$. 又圆心坐标为 $(2,0)$, $r=2$. 因为圆心到切线的距离等于半径, 即

$$\frac{|2k-0+5-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=2, k=\frac{21}{20}.$$

所以切线方程为 $21x-20y+16=0$. 当直线的斜率不存在时还有一条切线是 $x=4$.

点评: 过圆外已知点 $P(x,y)$ 的圆的切线必有两条, 一般可设切线斜率为 k , 写出点斜式方程, 再利用圆心到切线的距离等于半径, 写出有关 k 的方程. 求出 k , 因为有两解, 所以应有两个不同的 k 值, 当求得的 k 值只有一个时, 说明有一条切线斜率不存在, 即为垂直于 x 轴的直线, 所以补上一条切线 $x=x_1$.

变式训练

求过点 $M(3,1)$, 且与圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 相切的直线 l 的方程.

解: 设切线方程为 $y-1=k(x-3)$, 即 $kx-y-3k+1=0$,

因为圆心 $(1,0)$ 到切线 l 的距离等于半径 2,

$$\text{所以 } \frac{|k-3k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2, \text{ 解得 } k=-\frac{3}{4}.$$

所以切线方程为 $y-1=-\frac{3}{4}(x-3)$, 即 $3x+4y-13=0$.

当过点 M 的直线的斜率不存在时, 其方程为 $x=3$, 圆心 $(1,0)$ 到此直线的距离等于半径 2, 故直线 $x=3$ 也符合题意.

所以直线 l 的方程是 $3x+4y-12=0$ 或 $x=3$.

例3 (1) 已知直线 $l: y=x+b$ 与曲线 $C: y=\sqrt{1-x^2}$ 有两个不同的公共点, 求实数 b 的取值范围;

(2) 若关于 x 的不等式 $\sqrt{1-x^2} > x+b$ 解集为 $\mathbf{R}$, 求实数 b 的取值范围.

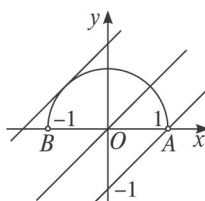


图 1

解: (1) 如图 1 (数形结合), 方程 $y=x+b$ 表示斜率为 1, 在 y 轴上截距为 b 的直线 l ;

方程 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示单位圆在 x 轴上及其上方的半圆,

当直线过 B 点时, 它与半圆交于两点, 此时 $b=1$, 直线记为 l_1 ;

当直线与半圆相切时, $b=\sqrt{2}$, 直线记为 l_2 .

直线 l 要与半圆有两个不同的公共点, 必须满足 l 在 l_1 与 l_2 之间 (包括 l_1 但不包括 l_2),

所以 $1 \leq b < \sqrt{2}$, 即所求的 b 的取值范围是 $[1, \sqrt{2})$.

(2) 不等式 $\sqrt{1-x^2} > x+b$ 恒成立, 即半圆 $y = \sqrt{1-x^2}$ 在直线 $y = x+b$ 上方,

当直线 l 过点 $(1,0)$ 时, $b = -1$, 所以所求的 b 的取值范围是 $(-\infty, -1)$.

点评: 利用数形结合解题, 有时非常方便直观.

(四) 知能训练

本节练习 2、3、4.

(五) 拓展提升

圆 $x^2 + y^2 = 8$ 内有一点 $P_0(-1, 2)$, AB 为过点 P_0 且倾斜角为 α 的弦.

(1) 当 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 时, 求 AB 的长;

(2) 当 AB 的长最短时, 求直线 AB 的方程.

解: (1) 当 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 时, 直线 AB 的斜率为 $k = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$, 所以直线 AB 的方程为 $y - 2 = -(x + 1)$, 即 $y = -x + 1$.

解法一: (用弦长公式)

$$\text{由 } \begin{cases} y = -x + 1, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } 2x^2 - 2x - 7 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = -\frac{7}{2}$,

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1 + (-1)^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - 4 \times (-\frac{7}{2})} = \sqrt{30}.$$

解法二: (几何法) 弦心距 $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 半径 $r = 2\sqrt{2}$, 弦长 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{8 - \frac{1}{2}} = \sqrt{30}$.

(2) 当 AB 的长最短时, $OP_0 \perp AB$, 因为 $k_{OP_0} = -2, k_{AB} = \frac{1}{2}$, 直线 AB 的方程为 $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$,

即 $x - 2y + 5 = 0$.

(六) 课堂小结

(1) 判断直线与圆的位置关系的方法: 几何法和代数法.

(2) 求切线方程.

(七) 作业

习题 4.2 A 组 1、2、3.

第 2 课时

(一) 导入新课

思路 1. 一艘轮船在沿直线返回港口的途中, 接到气象台的台风预报: 台风中心位于轮船正西 70 km 处, 受影响的范围是半径长为 30 km 的圆形区域. 已知港口位于台风中心正北 40 km 处, 如果这艘轮船不改变航

线,那么它是否会受到台风的影响?

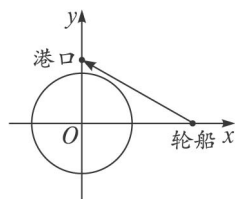


图 2

分析: 如图 2,以台风中心为原点 O ,以东西方向为 x 轴,建立直角坐标系,其中,取 10 km 为单位长度.则台风影响的圆形区域所对应的圆心为 O 的圆的方程为 $x^2+y^2=9$;

轮船航线所在的直线 l 的方程为 $4x+7y-28=0$.

问题归结为圆心为 O 的圆与直线 l 有无公共点.因此我们继续研究直线与圆的位置关系.

(二) 推进新课、新知探究、提出问题

①过圆上一点可作几条切线? 如何求出切线方程?

②过圆外一点可作几条切线? 如何求出切线方程?

③过圆内一点可作几条切线?

④你能概括出求圆切线方程的步骤是什么吗?

⑤如何求直线与圆的交点?

⑥如何求直线与圆的相交弦的长?

讨论结果: ①过圆上一点可作一条切线,过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线方程是 $x_0x+y_0y=r^2$;

过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线方程是 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.

②过圆外一点可作两条切线,求出切线方程有代数法和几何法.代数法的关键是把直线与圆相切这个几何问题转化为联立它们的方程组只有一个解的代数问题.可通过一元二次方程有一个实根的充要条件—— $\Delta=0$ 去求出 k 的值,从而求出切线的方程.用几何方法去求解,要充分利用直线与圆相切的几何性质,圆心到切线的距离等于圆的半径($d=r$),求出 k 的值.

③过圆内一点不能作圆的切线.

④求圆切线方程,一般有三种方法,一是设切点,利用①②中的切线公式法;二是设切线的斜率,用判别式法;三是设切线的斜率,用图形的几何性质来解,即圆心到切线的距离等于圆的半径($d=r$),求出 k 的值.

⑤把直线与圆的方程联立得方程组,方程组的解即是交点的坐标.

⑥把直线与圆的方程联立得交点的坐标,结合两点的距离公式来求;再就是利用弦心距、弦长、半径之间的关系来求.

(三) 应用示例

思路 1

例 1 过点 $P(-2,0)$ 向圆 $x^2+y^2=1$ 引切线,求切线的方程.

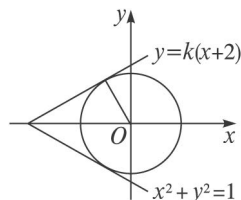


图 3

解: 如图 3,方法一:设所求切线的斜率为 k ,则切线方程为 $y=k(x+2)$,因此由方程组 $\begin{cases} y = k(x+2), \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$ 得

$$x^2+k^2(x+2)^2=1.$$

上述一元二次方程有一个实根,

$$\Delta = 16k^4 - 4(k^2 + 1)(4k^2 - 1) = 12k^2 - 4 = 0, k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以所求切线的方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2).$$

方法二: 设所求切线的斜率为 k , 则切线方程为 $y = k(x+2)$, 由于圆心到切线的距离等于圆的半径($d=r$), 所以

$$d = \frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}} = 1, \text{ 解得 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{所以所求切线的方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2).$$

方法三: 利用过圆上一点的切线的结论. 可假设切点为 (x_0, y_0) , 此时可求得切线方程为 $x_0x + y_0y = 1$.

然后利用点 $(-2, 0)$ 在切线上得到 $-2x_0 = 1$, 从中解得 $x_0 = -\frac{1}{2}$.

再由点 (x_0, y_0) 在圆上, 所以满足 $x_0^2 + y_0^2 = 1$, 既 $\frac{1}{4} + y_0^2 = 1$, 解出 $y_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{这样就可求得切线的方程为 } \frac{y-0}{x+2} = \frac{\pm \frac{\sqrt{3}}{2} - 0}{-\frac{1}{2} + 2},$$

$$\text{整理得 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2).$$

点评: 过圆外一点向圆可作两条切线; 可用三种方法求出切线方程, 其中以几何法“ $d=r$ ”比较好(简便).

变式训练

已知直线 l 的斜率为 k , 且与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 只有一个公共点, 求直线 l 的方程.

活动: 学生思考, 观察题目的特点, 见题想法, 教师引导学生考虑问题的思路, 必要时给予提示, 直线与圆只有一个公共点, 说明直线与圆相切. 可利用圆的几何性质求解.

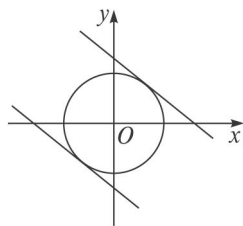


图 4

解: 如图 4, 方法一: 设所求的直线方程为 $y = kx + b$, 由圆心到直线的距离等于圆的半径, 得

$$d = \frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}} = r, \therefore b = \pm r\sqrt{1+k^2}, \text{ 求得切线方程是 } y = kx \pm r\sqrt{1+k^2}.$$

方法二: 设所求的直线方程为 $y = kx + b$, 直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 只有一个公共点, 所以它们组成的方程组只有

一组实数解,由 $\begin{cases} y = kx + b, \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$, 得 $x^2 + k^2(x+b)^2 = 1$, 即 $x^2(k^2+1) + 2k^2bx + b^2 = 1$, $\Delta = 0$ 得 $b = \pm r\sqrt{1+k^2}$, 求得切线方程是 $y = kx \pm r\sqrt{1+k^2}$.

例2 已知圆的方程为 $x^2 + y^2 + ax + 2y + a^2 = 0$, 一定点为 $A(1, 2)$, 要使过定点 $A(1, 2)$ 作圆的切线有两条, 求 a 的取值范围.

活动: 学生讨论, 教师指导, 教师提问, 学生回答, 教师对学生解题中出现的问題及时处理, 利用几何方法, 点 $A(1, 2)$ 在圆外, 即到圆心的距离大于圆的半径.

解: 将圆的方程配方得 $(x + \frac{a}{2})^2 + (y+1)^2 = \frac{4-3a^2}{4}$, 圆心 C 的坐标为 $(-\frac{a}{2}, -1)$, 半径 $r = \sqrt{\frac{4-3a^2}{4}}$,

条件是 $4-3a^2 > 0$, 过点 $A(1, 2)$ 所作圆的切线有两条, 则点 A 必在圆外, 即

$$\sqrt{(1 + \frac{a}{2})^2 + (2+1)^2} > \sqrt{\frac{4-3a^2}{4}}.$$

化简, 得 $a^2 + a + 9 > 0$, 由 $\begin{cases} a^2 + a + 9 > 0, \\ 4 - 3a^2 > 0, \end{cases}$

$$\text{解得 } -\frac{2\sqrt{3}}{3} < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}, a \in \mathbb{R}.$$

$$\text{所以 } -\frac{2\sqrt{3}}{3} < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故 } a \text{ 的取值范围是 } (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}).$$

点评: 过圆外一点可作圆的两条切线, 反之经过一点可作圆的两条切线, 则该点在圆外. 同时注意圆的一般方程的条件.

思路2

例1 已知过点 $M(-3, -3)$ 的直线 l 被圆 $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$ 所截得的弦长为 45, 求直线 l 的方程.

活动: 学生思考或讨论, 教师引导学生考虑问题的思路, 求直线 l 的方程, 一般设点斜式, 再求斜率. 这里知道弦长, 半径也知道, 所以弦心距可求, 如果设出直线的方程, 由点到直线的距离等于弦心距求出斜率; 另外也可利用弦长公式, 结合一元二次方程根与系数的关系求解.

解法一: 将圆的方程写成标准形式有 $x^2 + (y+2)^2 = 25$, 所以圆心为 $(0, -2)$, 半径为 5. 因为直线 l 被圆 $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$ 所截得的弦长为 $4\sqrt{5}$, 所以弦心距为 $\sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}$, 圆心到直线的距离为 $\sqrt{5}$, 由于直线过点 $M(-3, -3)$, 所以可设直线 l 的方程为 $y+3 = k(x+3)$, 即 $kx - y + 3k - 3 = 0$.

根据点到直线的距离公式, 圆心到直线的距离为 $\sqrt{5}$, 因此 $d = \frac{|2+3k-3|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{5}$, 两边平方整理得

$$2k^2-3k-2=0, \text{解得 } k=\frac{1}{2}, k=2.$$

所以所求的直线 l 的方程为 $y+3=\frac{1}{2}(x+3)$ 或 $y+3=2(x+3)$, 即 $x+2y+9=0$ 或 $2x-y+3=0$.

解法二: 设直线 l 和已知圆 $x^2+y^2+4y-21=0$ 的交点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 l 的斜率为 k, 由于直线过点 $M(-3, -3)$, 所以可设直线 l 的方程为 $y+3=k(x+3)$, 即 $y=kx+3k-3$. 代入圆的方程 $x^2+y^2+4y-21=0$, 并整理得 $(1+k^2)x^2+2k(3k-1)x+(3k-1)^2-25=0$. 结合一元二次方程根与系数的关系有

$$x_1+x_2=-\frac{2k(3k-1)}{1+k^2}, x_1 \cdot x_2=\frac{(3k-1)^2-25}{1+k^2}. \quad (1)$$

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+k^2(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1 \cdot x_2]}$$

$$\text{因为 } |AB|=45, \text{ 所以有 } (1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1 \cdot x_2]=80. \quad (2)$$

把①式代入②式, 得 $(1+k^2)\left\{\left[-\frac{2k(3k-1)}{1+k^2}\right]^2-4\frac{(3k-1)^2-25}{1+k^2}\right\}=80$. 经过整理, 得 $2k^2-3k-2=0$, 解得

$$k=\frac{1}{2}, k=2. \text{ 所以所求的直线 l 的方程为 } y+3=\frac{1}{2}(x+3) \text{ 或 } y+3=2(x+3), \text{ 即 } x+2y+9=0 \text{ 或 } 2x-y+3=0.$$

点评: 解法一突出了适当地利用图形的几何性质有助于简化计算, 强调图形在解题中的作用, 加强了数形结合; 解法二是利用直线被曲线截得的弦长公式求出斜率后求直线方程, 思路简单但运算较繁.

变式训练

已知圆 C: $x^2+(y-1)^2=5$, 直线 l: $mx-y+1-m=0$.

(1) 求证: 对 $m \in \mathbb{R}$, 直线 l 与圆 C 总有两个不同交点;

(2) 设 l 与圆 C 交于不同两点 A、B, 若 $|AB|=\sqrt{17}$, 求 l 的倾斜角;

(3) 求弦 AB 的中点 M 的轨迹方程;

(4) 若定点 $P(1, 1)$ 分弦 AB 为 $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$, 求此时直线 l 的方程.

解: (1) 判断圆心到直线的距离小于半径即可, 或用直线系过定点 $P(1, 1)$ 求解; 点 $P(1, 1)$ 在圆内.

(2) 利用弦心距、半径、弦构成的直角三角形求弦长, 得 $m=\pm\sqrt{3}$, 所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

(3) 设 M 的坐标为 (x, y) , 连结 CM、CP, 因为 $C(0, 1), P(1, 1), |CM|^2+|PM|^2=|CP|^2$, 所以 $x^2+(y-1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=1$, 整理得轨迹方程为 $x^2+y^2-x-2y+1=0 (x \neq 1)$.

$$(4) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 由 } \frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}, \text{ 得 } \frac{x_2+2x_1}{1+2}=1. \quad (1)$$

$$\text{又由直线方程和圆的方程联立消去 } y, \text{ 得 } (1+m^2)x^2-2m^2x+m^2-5=0, \quad (*)$$

$$\text{故 } x_1+x_2=\frac{2m^2}{1+m^2}, \quad (2)$$

$$\text{由 } (1)(2), \text{ 得 } x_1=\frac{3+m^2}{1+m^2}, \text{ 代入 } (*), \text{ 解得 } m=\pm 1.$$

所以直线 l 的方程为 $x-y=0$ 或 $x+y-2=0$.

例2 已知直线 $l: y = k(x + 2\sqrt{2})$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A、B 两点, O 为坐标原点, $\triangle ABO$ 的面积为 S, ①试将 S 表示成 k 的函数 $S(k)$, 并指出它的定义域; ②求 S 的最大值, 并求出取得最大值时的 k 值.

活动: 学生审题, 再思考讨论, 教师提示学生欲求 $\triangle ABO$ 的面积, 应先求出直线被圆截得的弦长 $|AB|$, 将 $|AB|$ 表示成 k 的函数.

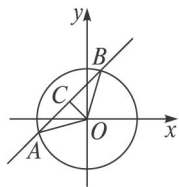


图 5

解: ①如图 5 所示, 直线的方程为 $kx - y + 2\sqrt{2}k = 0 (k \neq 0)$,

$$\text{点 } O \text{ 到 } l \text{ 之间的距离为 } |OC| = \frac{2\sqrt{2}|k|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\text{弦长 } |AB| = 2\sqrt{|OA|^2 - |OC|^2} = 2\sqrt{4 - \frac{8k^2}{1+k^2}} = 4\sqrt{\frac{1-k^2}{1+k^2}},$$

$$\therefore \triangle ABO \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |AB| \cdot |OC| = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2(1-k^2)}}{1+k^2},$$

$$\because |AB| > 0, \therefore -1 < k < 1 (k \neq 0).$$

$$\therefore S(k) = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2(1-k^2)}}{1+k^2} \quad (-1 < k < 1 \text{ 且 } k \neq 0).$$

$$\text{②} \triangle ABO \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| \sin \angle AOB = 2 \sin \angle AOB,$$

$$\therefore \text{当 } \angle AOB = 90^\circ \text{ 时, } S_{\max} = 2,$$

$$\text{此时 } |OC| = \sqrt{2}, |OA| = 2, \text{ 即 } \frac{2\sqrt{2}|k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{2},$$

$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

点评: 在涉及到直线被圆截得的弦长时, 要巧妙利用圆的有关几何性质, 如本题中的 $Rt\triangle BOC$, 其中 $|OB|$ 为圆半径, $|BC|$ 为弦长的一半.

变式训练

已知 x, y 满足 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, 求 $x - 2y$ 的最大值.

活动: 学生审题, 再思考讨论, 从表面上看, 此问题是一个代数, 可用代数方法来解决. 但细想后会发现比较复杂, 它需把二次降为一次. 教师提示学生利用数形结合或判别式法.

解法一: (几何解法): 设 $x - 2y = b$, 则点 (x, y) 既在直线 $x - 2y = b$ 上, 又在圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ 上, 即直线 $x - 2y = b$ 和圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ 有交点, 故圆心 $(1, -2)$ 到直线的距离小于或等于半径,

所以 $\frac{|5-b|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5}$. 所以 $0 \leq b \leq 10$, 即 b 的最大值是 10.

解法二:(代数解法): 设 $x-2y=b$, 代入方程 $x^2+y^2-2x+4y=0$, 得 $(2y+b)^2+y^2-2(2y+b)+4y=0$, 即 $5y^2+4by+b^2-2b=0$. 由于这个一元二次方程有解, 所以其判别式 $\Delta=16b^2-20(b^2-2b)=40b-4b^2 \geq 0$, 即 $b^2-10b \leq 0, 0 \leq b \leq 10$. 所以求出 b 的最大值是 10.

点评:比较两个解法, 我们可以看到, 数形结合的方法难想但简单, 代数法易想但较繁, 要多练习以抓住规律.

例 3 已知圆 $C: (x-1)^2+(y-2)^2=25$, 直线 $l: (2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0(m \in \mathbb{R})$.

(1) 证明不论 m 取什么实数, 直线 l 与圆恒交于两点;

(2) 求直线被圆 C 截得的弦长最小时 l 的方程.

活动: 学生先思考, 然后讨论, 教师引导学生考虑问题的方法, 由于直线过定点, 如果该定点在圆内, 此题便可解得. 最短的弦就是与过定点与此直径垂直的弦.

解:(1) 证明: 因为 l 的方程为 $(x+y-4)+m(2x+y-7)=0$. 因为 $m \in \mathbb{R}$, 所以 $\begin{cases} 2x+y-7=0, \\ x+y-4=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=1, \end{cases}$ 即

l 恒过定点 $A(3,1)$. 因为圆心 $C(1,2)$, $|AC| = \sqrt{5} < 5$ (半径), 所以点 A 在圆 C 内, 从而直线 l 恒与圆 C 相交于两点.

(2) 弦长最小时, $l \perp AC$, 由 $k_{AC} = -\frac{1}{2}$, 所以 l 的方程为 $2x-y-5=0$.

点评: 证明直线与圆恒相交, 一是可以将直线与圆的方程联立方程组, 进而转化为一元二次方程, 根据判别式与 0 的大小来判断, 这是通性通法, 但过程繁琐, 计算量大; 二是说明直线过圆内一点, 由此直线与圆必相交. 对于圆中过 A 点的弦, 以直径为最长, 过 A 点与此直径垂直的弦为最短.

变式训练

求圆 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ 上的点到直线 $y=x-1$ 的最近距离和最远距离.

解: 圆方程化为 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$,

圆心 $(-2,1)$ 到直线 $y=x-1$ 的距离为 $d = \frac{|-2-1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}$,

所以所求的最近距离为 $2\sqrt{2}-1$, 最远距离为 $2\sqrt{2}+1$.

(四) 知能训练

1. 已知直线 $l: y=2x-2$, 圆 $C: x^2+y^2+2x+4y+1=0$, 请判断直线 l 与圆 C 的位置关系, 若相交, 则求直线 l 被圆 C 所截的线段长.

活动: 请大家独立思考, 多想些办法. 然后相互讨论, 比较解法的不同之处. 学生进行解答, 教师巡视, 掌握学生的一般解题情况.

解法一: 由方程组 $\begin{cases} y=2x-2, \\ x^2+y^2+2x+4y+1=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{3}{5}, \\ y=-\frac{4}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-4, \end{cases}$

即直线 l 与圆 C 的交点坐标为 $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ 和 $(-1, -4)$, 则截得线段长为 $\frac{8}{5}\sqrt{5}$.

解法二：由方程组(略)消去 y , 得 $5x^2 + 2x - 3 = 0$,

设直线与圆交点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 AB 中点为 $(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5})$,

$$\text{所以} \begin{cases} x_1 + y_1 = -\frac{2}{5}, \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{5}, \end{cases} \text{得} (x_1 - x_2)^2 = \frac{64}{25},$$

$$\text{则所截线段长为} |AB| = \sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2} = \frac{8}{5}\sqrt{5}.$$

解法三：圆心 C 为 $(-1, -2)$, 半径 $r=2$, 设交点为 A, B , 圆心 C 到直线 l 之距 $d = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, 所以

$$\frac{|AB|}{2} = \sqrt{r^2 - d^2} = \frac{4}{5}\sqrt{5}. \text{则所截线段长为} |AB| = \frac{8}{5}\sqrt{5}.$$

点评：前者直接求交点坐标,再用两点距离公式求值;后者虽然也用两点距离公式,但借用韦达定理,避免求交点坐标.解法三利用直线与圆的位置关系,抓住圆心到直线之距 d 及圆半径 r 来求解.反映了抓住本质能很快接近答案的特点.显然,解法三比较简洁.

2. 已知直线 $x+2y-3=0$ 交圆 $x^2+y^2+x-6y+F=0$ 于点 P, Q , O 为原点,问 F 为何值时, $OP \perp OQ$?

$$\text{解:由} \begin{cases} x+2y-3=0, \\ x^2+y^2+x-6y+F=0 \end{cases} \text{消去 } y, \text{得 } 5x^2+10x+4F-27=0,$$

$$\text{所以 } x_1x_2 = \frac{4F-27}{5}, x_1+x_2 = -2.$$

$$\text{所以 } y_1y_2 = \frac{(x_1-3)(x_2-3)}{4} = \frac{x_1x_2 - 3(x_1+x_2) + 9}{4} = \frac{12+F}{5}.$$

$$\text{因为 } OP \perp OQ, \text{所以 } x_1x_2 + y_1y_2 = 0, \text{即 } \frac{4F-27}{5} + \frac{12+F}{5} = 0. \text{所以 } F=3.$$

点评：(1)解本题之前先要求学生指出解题思路.

(2)体会垂直条件是怎样转化的,以及韦达定理的作用:处理 x_1, x_2 的对称式.在解析几何中经常运用韦达定理来简化计算.

(五) 拓展提升

已知点 P 到两个定点 $M(-1,0), N(1,0)$ 距离的比为 $\sqrt{2}$, 点 N 到直线 PM 的距离为 1, 求直线 PN 的方程.

$$\text{解:设点 } P \text{ 的坐标为}(x,y), \text{由题设有} \frac{|PM|}{|PN|} = \sqrt{2}, \text{即} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2},$$

$$\text{整理得 } x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0. \quad ①$$

$$\text{因为点 } N \text{ 到 } PM \text{ 的距离为 } 1, |MN|=2, \text{所以 } \angle PMN=30^\circ, \text{直线 } PM \text{ 的斜率为} \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{直线 } PM \text{ 的方程为 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1). \quad ②$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/126240223235010220>