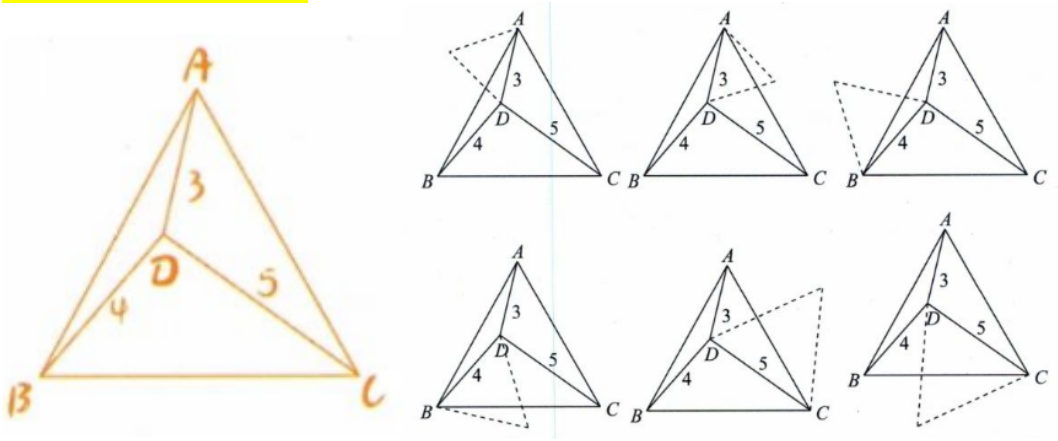
难关必刷 03 旋转综合题（2 种解题模型专练）

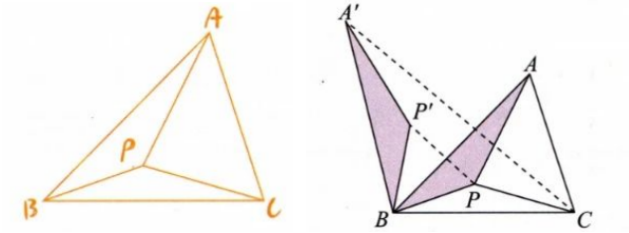
【模型梳理】

模型一：“奔驰”模型



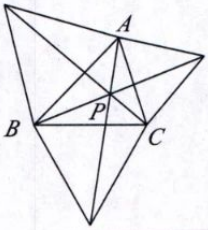
旋转是中考必考题型，奔驰模型是非常经典的一类题型，且近几年中考中经常出现。我们不仅要掌握这类题型，提升利用旋转解决问题的能力，更重要的是要明白一点 :旋转的本质是把分散的条件集中化，从而解决问题

模型二：“费马点”模型



费马点作法

如图，以△ABC 的三边向外分别作等边三角形，然后把外面的三个顶点与原三角形的相对顶点相连，交于点 P，点 P 就是原三角形的费马点.



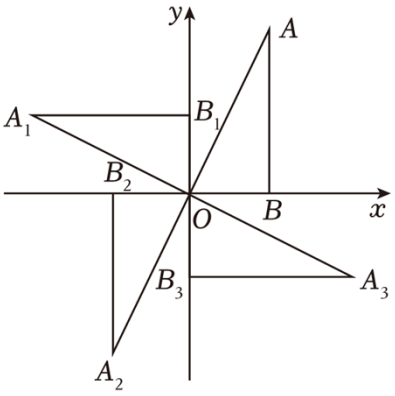
最值问题是中考常考题型，费马点属于几何中的经典题型，目前全国范围内的中考题都是从经典题改编而来，所以应熟练掌握费马点等此类最值经典题。

【题型专练】

模型一：“奔驰”模型

一．选择题（共 2 小题）

1．（2023•中原区校级三模）小星利用平面直角坐标系绘制了如下风车图形，他先将△OBA 固定在坐标系中，其中 A（2，4），B（2，0），接着他将△OBA 绕原点 O 逆时针转动 90°至△OB_1A_1，称为第一次转动，然后将△OB_1A_1 绕原点 O 逆时针转动 90°至△OB_2A_2，称为第二次转动，…那么按照这种转动方式，转动 2023 次后，点 A 的坐标为（　　）



A．（4，﹣2）　　B．$(-2,-2\sqrt{5})$　　C．$(2\sqrt{5},-2)$　　D．（2，4）

【分析】依题意不难发现第 4 次旋转后△OBA 回到初始位置，而 2023÷4＝505……3，据此可得当△OBA 旋转 2023 次后的位置与旋转第 3 次后的位置重合，进而可得出答案．

【解答】解：∵△OBA 每次绕点 O 逆时针旋转 90°，

∴第 4 次旋转后△OBA 回到初始位置，

又∵2023÷4＝505……3，

∴当△OBA 旋转 2023 次后的位置与旋转第 3 次后的位置重合，

即此时点 A 与点 A_3 重合，

∵点 A（2，4），

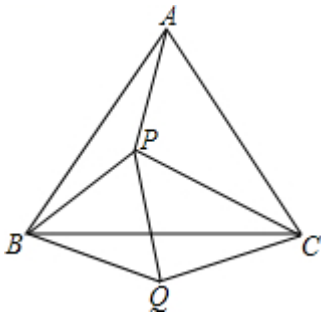
∴点 A_3（4，﹣2），

∴转动 2023 次后，点 A 的坐标为（4，﹣2）．

故选：A．

【点评】此题主要考查了图形的旋转及性质，解答此题的关键是找出第 4 次旋转后△OBA 回到初始位置．

2．（2020 秋•顺平县期中）如图，P 是等边三角形 ABC 内的一点，且 PA＝3，PB＝4，PC＝5，将△ABP 绕点 B 顺时针旋转 60°到△CBQ 位置．连接 PQ，则以下结论错误的是（　　）



A．$\angle QPB=60^\circ$　　B．$\angle PQC=90^\circ$　　C．$\angle APB=150^\circ$　　D．$\angle APC=135^\circ$

【分析】根据等边三角形性质以及勾股定理的逆定理，即可判断 B；依据$\triangle BPQ$ 是等边三角形，即可得到$\angle QPB=\angle PBQ=\angle BQP=60^\circ$，进而得出$\angle BPA=\angle BQC=60^\circ+90^\circ=150^\circ$，求出$\angle QPC=15^\circ$即可判断 D 选项．

【解答】解：∵$\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴$\angle ABC=60^\circ$，

∵将$\triangle ABP$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 到$\triangle CBQ$ 位置，

∴$\triangle BQC\cong\triangle BPA$，

∴$\angle BPA=\angle BQC$，$BP=BQ=4$，$QC=PA=3$，$\angle ABP=\angle QBC$，

∴$\angle PBQ=\angle PBC+\angle CBQ=\angle PBC+\angle ABP=\angle ABC=60^\circ$，

∴$\triangle BPQ$ 是等边三角形，

∴$PQ=BP=4$，

∵$PQ^2+QC^2=4^2+3^2=25$，$PC^2=5^2=25$，

∴$PQ^2+QC^2=PC^2$，

∴$\angle PQC=90^\circ$，即$\triangle PQC$ 是直角三角形，故 B 正确，

∵$\triangle BPQ$ 是等边三角形，

∴$\angle QPB=\angle PBQ=\angle BQP=60^\circ$，故 A 正确，

∴$\angle BPA=\angle BQC=60^\circ+90^\circ=150^\circ$，故 C 正确，

若$\angle APC=135^\circ$，则$\angle QPC=360^\circ-135^\circ-150^\circ-60^\circ=15^\circ$，与 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$ 不符，故选项 D 错误．

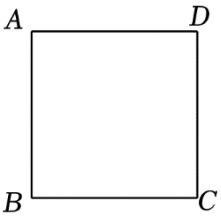
故选：D．

【点评】本题考查了等边三角形的性质和判定，勾股定理的逆定理的应用，主要考查学生综合运用定理进行推理的能力．

二．填空题（共 1 小题）

3．（2022 秋•新抚区期中）如图，正方形 $ABCD$ 中，将边 AB 绕着点 A 旋转，当点 B 落在边 CD 的垂直平分

线上的点 E 处时，$\angle BED$ 的度数为 _____.



【分析】分两种情况讨论，由旋转的性质和线段垂直平分线的性质可得△BEC 是等边三角形，由等腰三角形的性质可求解.

【解答】解：如图，当点 E 在 BA 的右边时，

∵MN 是 CD 的垂直平分线，四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴MN 垂直平分 BA，

∴$BE=EA$，

∵将边 BA 绕着点 A 旋转，

∴$BA=AE$，

∴△BEA 是等边三角形，

∴$\angle EBA=\angle BEA=60°$，

∴$\angle CBE=\angle EAD=30°$，

∵$AB=AD=AE$，

∴$\angle AED=75°$，

∴$\angle BED=75°+60°=135°$；

当点 E'在 BA 的左边时，

同理可得△$BE'A$ 是等边三角形，

∴$BA=BE'$，$\angle BE'A=60°=\angle ABE'$，

∴$\angle DAE'=150°$，

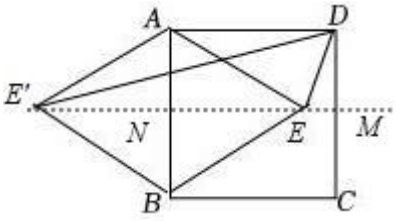
∵$AB=AD=AE'$，

∴$\angle AE'B=15°$，

∴$\angle BE'D=45°$，

∴$\angle BED$ 的度数为 45° 或 135°.

故答案为：45° 或 135°.



【点评】本题考查了旋转的性质，正方形的性质，等边三角形的性质，利用分类讨论思想解决问题是解题的关键.

三．解答题（共 5 小题）

4.（2021 秋•长乐区期中）在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=30°$，$AC=4$，将△ABC 绕点 B 顺时针旋转一定的角度得到△DBE，点 A，C 的对应点分别是 D，E，连接 AD.

（1）如图 1，当点 E 恰好在边 AB 上时，求$\angle ADE$ 的大小；

（2）如图 2，若 F 为 AD 中点，求 CF 的最大值.

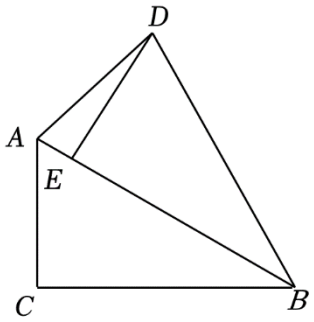


图1

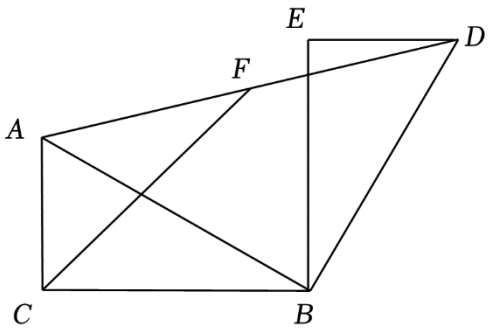


图2

【分析】（1）由旋转可得：$BA=BD$，$\angle EBD=\angle CBA=30°$，$\angle DEB=\angle ACB=90°$，再运用三角形内角和定理即可得出答案；

（2）如图 2，连接 BF，利用等腰三角形的性质证明$\angle AFB=90°$，然后证明 A、C、B、F 四点共圆，接着利用圆是圆中最长的弦即可求解.

【解答】解：（1）如图 1，∵△ABC 绕点 B 顺时针旋转 α 得到△DEB，点 E 恰好在 AB 上，

∴$BA=BD$，$\angle EBD=\angle CBA=30°$，$\angle DEB=\angle ACB=90°$，

∴$\angle BAD=\angle BDA=75°$，

∴$\angle ADE=90°-75°=15°$；

（2）如图 2，连接 BF，

∵$BA=BD$，F 为 AD 中点，

∴$BF\perp AD$，

∴$\angle AFB=90°$，

而$\angle ACB=90°$，

∴A、C、B、F 四点共圆，

∴AB 为这个圆的直径，CF 为这个圆的一条弦，

∵AC=4，$\angle ABC$=30°，

∴AB=8，

∴CF 的最大值为 8.

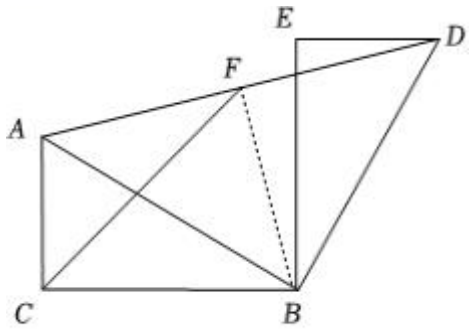


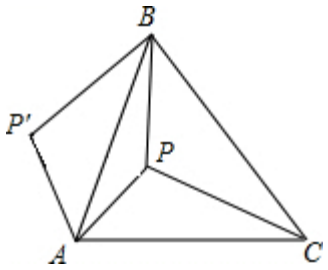
图2

【点评】此题主要考查了旋转的性质，同时也利用了含 30° 角的直角三角形的性质，有一定的综合性.

5.（2021 春•高州市期中）如图，P 是正三角形 ABC 内的一点，且 PA=6，PB=8，PC=10．若将△PAC 绕点 A 逆时针旋转后，得到△$P'AB$.

（1）求点 P 与点 P' 之间的距离；

（2）求∠APB 的度数.



【分析】（1）由已知△PAC 绕点 A 逆时针旋转后，得到△$P'AB$，可得△PAC≌△$P'AB$，PA=$P'A$，旋转角∠$P'AP$=∠BAC=60°，所以△APP' 为等边三角形，即可求得 PP'；

（2）由△APP' 为等边三角形，得∠APP'=60°，在△$PP'B$ 中，已知三边，用勾股定理逆定理证出直角三角形，得出∠$P'PB$=90°，可求∠APB 的度数.

【解答】解：（1）连接 PP'，由题意可知 BP'=PC=10，AP'=AP，

∠PAC=∠$P'AB$，而∠PAC+∠BAP=60°，

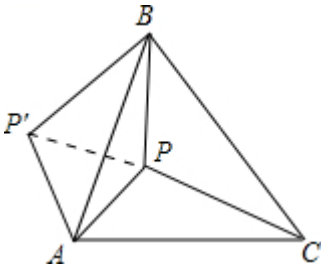
所以∠PAP'=60 度．故△APP' 为等边三角形，

所以 PP'=AP=AP'=6；

（2）利用勾股定理的逆定理可知：

$PP'^2+BP^2=BP'^2$，所以$\triangle BPP'$为直角三角形，且$\angle BPP'=90°$

可求$\angle APB=90°+60°=150°$．



【点评】本题考查旋转的性质，旋转变化前后，对应线段、对应角分别相等，图形的大小、形状都不改变．

6．（2023•崂山区模拟）阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题：如图1，在正三角形ABC内有一点P，且$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求$\angle APB$的度数．

小伟是这样思考的：如图2，利用旋转和全等的知识构造$\triangle AP'C$，连接PP'，得到两个特殊的三角形，从而将问题解决．

请你回答：图1中$\angle APB$的度数等于 _____．

参考小伟同学思考问题的方法，解决下列问题：

（1）如图3，在正方形$ABCD$内有一点P，且$PA=2\sqrt{2}$，$PB=1$，$PD=\sqrt{17}$，则$\angle APB$的度数等于 _____，正方形的边长为 _____；

（2）如图4，在正六边形$ABCDEF$内有一点P，且$PA=2$，$PB=1$，$PF=\sqrt{13}$，则$\angle APB$的度数等于 ____，正六边形的边长为 _____．

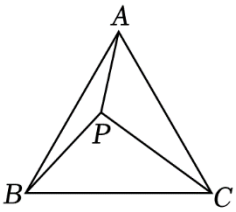


图1

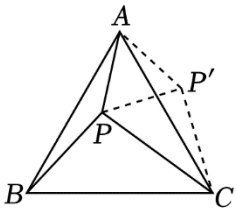


图2

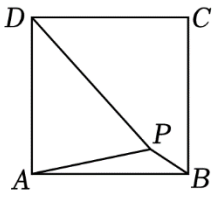


图3

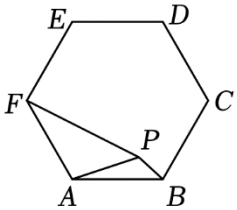


图4

【分析】阅读材料：把$\triangle APB$绕点A逆时针旋转60°得到$\triangle ACP'$，根据旋转的性质可得$P'A=PA$，$P'C=PB$，$\angle PAP'=60°$，然后求出$\triangle APP'$是等边三角形，根据等边三角形的性质求出$PP'=PA=3$，$\angle AP'P=60°$，再利用勾股定理逆定理求出$\angle PP'C=90°$，然后求出$\angle AP'C$，即为$\angle APB$的度数；

（1）把$\triangle APB$绕点A逆时针旋转90°得到$\triangle ADP'$，根据旋转的性质可得$P'A=PA$，$P'D=PB$，$\angle PAP'=90°$，然后判断出$\triangle APP'$是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质求出PP'，$\angle AP'$

$P=45°$，再利用勾股定理逆定理求出$\angle PP'D=90°$，然后求出$\angle AP'D$，即为$\angle APB$的度数；再求出点P'、P、B三点共线，过点A作$AE\perp PP'$于E，根据等腰直角三角形的性质求出$AE=PE=\frac{1}{2}PP'$，然后求出BE，在Rt$\triangle ABE$中，利用勾股定理列式求出AB即可；

（2）把$\triangle APB$绕点A逆时针旋转120°得到$\triangle AFP'$，根据旋转的性质可得$P'A=PA$，$P'F=PB$，$\angle PAP'=120°$，然后求出$\triangle APP'$是底角为30°的等腰三角形，过点A作$AM\perp PP'$于M，设PP'与AF相交于N，求出$AM=1$，再求出PP'，$\angle AP'P=30°$，再利用勾股定理逆定理求出$\angle PP'F=90°$，然后求出$\angle AP'F$，即为$\angle APB$的度数；根据$P'F$、AM的长度得到$P'F=AM$，利用“角角边”证明$\triangle AMN$和$\triangle FP'N$全等，根据全等三角形对应边相等可得$AN=FN$，$P'N=MN$，然后求出MN，在Rt$\triangle AMN$中，利用勾股定理列式求出AN，然后求出AF即可．

【解答】解：阅读材料：把$\triangle APB$绕点A逆时针旋转60°得到$\triangle ACP'$，

由旋转的性质，$P'A=PA=3$，$P'D=PB=4$，$\angle PAP'=60°$，

∴$\triangle APP'$是等边三角形，

∴$PP'=PA=3$，$\angle AP'P=60°$，

∵$PP'^2+P'C^2=3^2+4^2=25$，$PC^2=5^2=25$，

∴$PP'^2+P'C^2=PC^2$，

∴$\angle PP'C=90°$，

∴$\angle AP'C=\angle AP'P+\angle PP'C=60°+90°=150°$；

故$\angle APB=\angle AP'C=150°$；

（1）如图3，把$\triangle APB$绕点A逆时针旋转90°得到$\triangle ADP'$，

由旋转的性质，$P'A=PA=2\sqrt{2}$，$P'D=PB=1$，$\angle PAP'=90°$，

∴$\triangle APP'$是等腰直角三角形，

∴$PP'=\sqrt{2}PA=\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$，$\angle AP'P=45°$，

∵$PP'^2+P'D^2=4^2+1^2=17$，$PD^2=\sqrt{17}^2=17$，

∴$PP'^2+P'D^2=PD^2$，

∴$\angle PP'D=90°$，

∴$\angle AP'D=\angle AP'P+\angle PP'D=45°+90°=135°$，

故，$\angle APB=\angle AP'D=135°$，

∵$\angle APB+\angle APP'=135°+45°=180°$，

∴点P'、P、B三点共线，

过点A作$AE\perp PP'$于E，

则 $AE=PE=\frac{1}{2}PP'=\frac{1}{2}\times4=2$，

∴$BE=PE+PB=2+1=3$，

在 Rt△ABE 中，$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$；

（2）如图 4，∵正六边形的内角为$\frac{1}{6}\times(6-2)\cdot180°=120°$，

∴把△APB 绕点 A 逆时针旋转 120°得到△AFP'，

由旋转的性质，$P'A=PA=2$，$P'F=PB=1$，$\angle PAP'=120°$，

∴$\angle APP'=\angle AP'P=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$，

过点 A 作 $AM\perp PP'$ 于 M，设 PP' 与 AF 相交于 N，

则 $AM=\frac{1}{2}PA=\frac{1}{2}\times2=1$，

$P'M=PM=\sqrt{PA^2-AM^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

∴$PP'=2PM=2\sqrt{3}$，

∵$PP'^2+P'F^2=(2\sqrt{3})^2+1^2=13$，$PF^2=\sqrt{13}^2=13$，

∴$PP'^2+P'F^2=PF^2$，

∴$\angle PP'F=90°$，

∴$\angle AP'F=\angle AP'P+\angle PP'F=30°+90°=120°$，

故，$\angle APB=\angle AP'F=120°$，

∵$P'F=AM=1$，

∵△AMN 和△$FP'N$ 中，

$$\begin{cases}\angle PP'F=\angle AMN=90°\\ \angle P'NF=\angle ANM\\ P'F=AM\end{cases}$$，

∴△AMN≌△$FP'N$（AAS），

∴$AN=FN$，$P'N=MN=\frac{1}{2}P'M=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

在 Rt△AMN 中，$AN=\sqrt{AM^2+MN^2}=\sqrt{1^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

∴$AF=2AN=2\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$.

故答案为：150°；（1）135°，$\sqrt{13}$；（2）120°，$\sqrt{7}$.

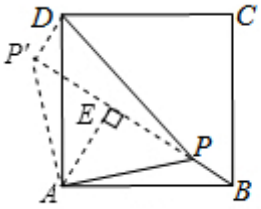


图3

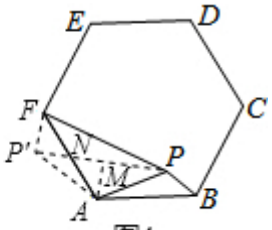


图4

【点评】本题考查了旋转的性质，等边三角形的性质，正方形的性质，勾股定理以及勾股定理逆定理的应用，全等三角形的判定与性质，（1）（2）两问求多边形的边长有一定的难度，作辅助线构造出直角三角形与全等三角形是解题的关键.

7.（2023•青岛二模）（1）探究发现

下面是一道例题及其解答过程，请补充完整.

如图 1，在等边三角形 ABC 内部有一点 P，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$．求 $\angle APB$ 的度数.

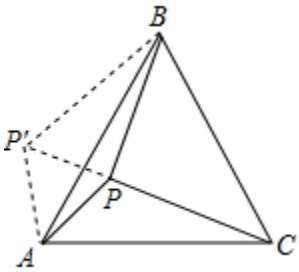


图1

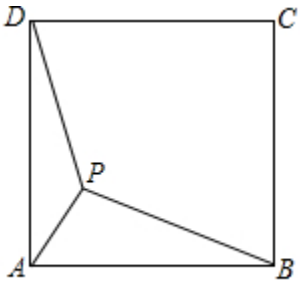


图2

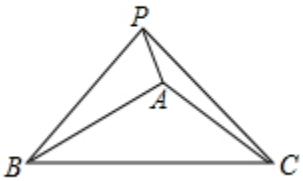


图3

解：将△APC 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到△$AP'B$，连接 PP'，则△APP'为等边三角形.

∵$P'P=PA=3$，$PB=4$，$P'B=PC=5$，

∴$P'P^2+PB^2=P'B^2$

△BPP'为_____三角形

∴$\angle APB$ 的度数为_____.

（2）类比延伸

如图 2，在正方形 $ABCD$ 内部有一点 P，若 $\angle APD=135°$，试判断线段 PA、PB、PD 之间的数量关系，并说明理由.

（3）联想拓展

如图 3，在△ABC 中，$\angle BAC=120°$，$AB=AC$．点 P 在直线 AB 上方且 $\angle APB=60°$，试判断是否存在常数 k，满足（kPA）$^2+PB^2=PC^2$．若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由.

【分析】（1）根据勾股定理的逆定理可得到△BPP' 为直角三角形，且 $\angle BPP'=90°$，即可得到 $\angle APB$ 的度数；

（2）把△ADP 绕点 A 顺时针旋转 90°得到△ABP'，根据旋转变换只改变图形的位置不改变图形的形状可得 $P'B=PD$，$P'A=PA$，然后求出△APP' 是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质得出

$PP'^2=2PA^2$，$\angle PP'A=45°$，再求出$\angle PP'B=90°$，然后利用勾股定理得出$PP'^2+P'B^2=PB^2$，等量代换得出$2PA^2+PD^2=PB^2$.

（3）将△APC 绕 A 点顺时针旋转 120°得到△$AP'B$，连接 PP'，过点 A 作 $AH\perp PP'$，论证 $PP'=\sqrt{3}PA$，再根据勾股定理代换即可.

【解答】解：（1）如图 1，将△APC 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到△$AP'B$，连接 PP'，则△APP' 为等边三角形.

∵$PP'=PA=3$，$PB=4$，$P'B=PC=5$，

∴$P'P^2+PB^2=P'B^2$.

∴△BPP' 为直角三角形.

∴$\angle APB$ 的度数为 90°+60°=150°.

故答案为：直角；150°；

（2）$2PA^2+PD^2=PB^2$. 理由如下：

如图 2，把△ADP 绕点 A 顺时针旋转 90°得到△ABP'，连接 PP'.

则 $P'B=PD$，$P'A=PA$，$\angle PAP'=90°$，

∴△APP' 是等腰直角三角形，

∴$PP'^2=PA^2+P'A^2=2PA^2$，$\angle PP'A=45°$，

∵$\angle APD=135°$，

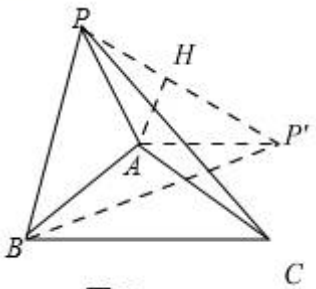
∴$\angle AP'B=\angle APD=135°$，

∴$\angle PP'B=135°-45°=90°$，

在 Rt△$PP'B$ 中，由勾股定理得，$PP'^2+P'B^2=PB^2$，

∴$2PA^2+PD^2=PB^2$.

（3）$k=\pm\sqrt{3}$.



图③

证明：如图③

将△APC 绕 A 点顺时针旋转 120°得到△$AP'B$，连接 PP'，过点 A 作 $AH\perp PP'$，

可得$\angle APP'=30°$，$PP'=\sqrt{3}PA$，$PC=P'B$，

$\because \angle APB=60°$，

$\therefore \angle BPP'=90°$，

$\therefore P'P^2+BP^2=P'B^2$，

$\therefore (\sqrt{3}PA)^2+PB^2=PC^2$

$\because (kPA)^2+PB^2=PC^2$，

$\therefore k=\pm\sqrt{3}$.

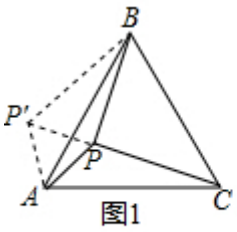


图1

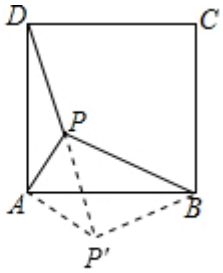


图2

【点评】本题考查了旋转的性质：旋转前后的两个图形全等，对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角，对应点到旋转中心的距离相等．也考查了正方形的性质，等边三角形的判定与性质以及勾股定理的逆定理．

8．（2020秋•田家庵区校级月考）（原题初探）（1）小明在数学作业本中看到有这样一道作业题：如图1，P是正方形$ABCD$内一点，连结PA，PB，PC现将$\triangle PAB$绕点B顺时针旋转90°得到的$\triangle P'CB$，连接PP'．若$PA=\sqrt{2}$，$PB=3$，$\angle APB=135°$，则PC的长为 ____，正方形$ABCD$的边长为 ____．

（变式猜想）（2）如图2，若点P是等边$\triangle ABC$内的一点，且$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，请猜想$\angle APB$的度数，并说明理由．

（拓展应用）（3）聪明的小明经过上述两小题的训练后，善于反思的他又提出了如下的问题：

如图3，在四边形$ABCD$中，$AD=3$，$CD=2$，$\angle ABC=\angle ACB=\angle ADC=45°$，则$BD$的长度为 ____．

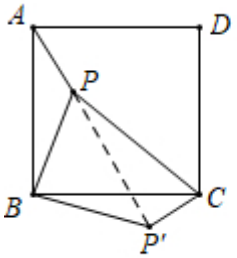


图1

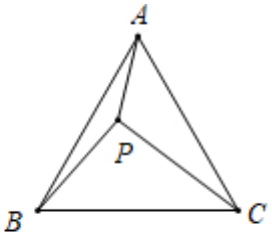


图2

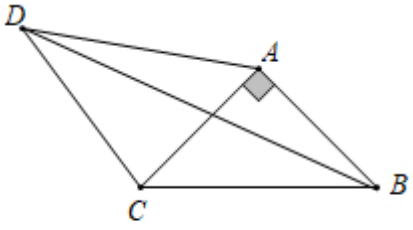


图3

【分析】（1）由旋转的性质得$BP=BP'=3$，$P'C=PA=\sqrt{2}$，$\angle PBP'=90°$，$\angle BP'C=\angle APB=135°$，则$\triangle BPP'$为等腰直角三角形，再由勾股定理得$PC=2\sqrt{5}$，过点$A$作$AE\perp BP$交$BP$的延长线于$E$，则$\triangle AEP$是等腰直角三角形，得$AE=PE=1$，得$BE=4$，然后由勾股定理即可求解；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/127005046133006134