

数学试卷

本试题卷分选择题和非选择题两部分.全卷共 4 页, 选择题部分 1 至 2 页; 非选择题部分 3 至 4 页.满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

考生注意:

1.答题前, 请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的位置上.

2.答题时, 请按照答题纸上“注意事项”的要求, 在答题纸相应的位置上规范作答, 在本试题卷上的作答一律无效.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{0, 2, 3, 4\}$, 则 $B \cap A$ 的子集个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】由交集的概念得出交集中元素的个数即可求解.

【详解】集合 $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{0, 2, 3, 4\}$, 则 $B \cap A = \{2, 3\}$, 则 $B \cap A$ 的子集个数是 $2^2 = 4$.

故选: D.

2. 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$, $a_4 = 2a_3 + 3a_2$, 则 $q =$ ()

- A. -1 B. 1 C. 3 D. 9

【答案】C

【解析】

【分析】由等比数列的通项公式: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, 代入 $a_4 = 2a_3 + 3a_2$ 解关于 q 的方程, 即可得 q 的值.

【详解】由 $a_n > 0$, 知 $a_1 > 0, q > 0$, 又 $a_4 = 2a_3 + 3a_2$,

$$\text{则 } a_1 \cdot q^3 = 2a_1 \cdot q^2 + 3a_1 \cdot q,$$

$$\therefore q^2 = 2q + 3, \text{ 解得 } q = -1 \text{ (舍)}, \text{ 或 } q = 3.$$

故选: C.

3. 已知 $\left(x + \frac{a}{x}\right)^n$ 存在常数项，且常数项是 $20a^3$ ，则 $n =$ ()

A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

【答案】B

【解析】

【分析】求得二项式展开式的通项公式，化简整理，由常数项是 $20a^3$ ，得 r, n .

【详解】 $\left(x + \frac{a}{x}\right)^n$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_n^r \cdot x^{n-r} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^r = C_n^r \cdot x^{n-2r} \cdot a^r, r = 0, 1, 2, \dots, n$,

令 $n - 2r = 0$ ，得 $n = 2r, n \in \mathbb{N}^*$,

所以它的常数项为 $C_{2r}^r \cdot a^r$ ，又已知常数项是 $20a^3$ ，

所以 $r = 3, n = 6$ ，

故选：B.

4. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点到直线 $l: x - y - 4 = 0$ 的距离之差为 2，则 E 的焦距是 ()

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】设椭圆 E 的左右焦点分别为 $(-c, 0), (c, 0), c > 0$ ，结合题意可得 $\left| \frac{-c-4}{\sqrt{2}} - \frac{c-4}{\sqrt{2}} \right| = 2$ ，分 $0 < c < 4$

和 $c \geq 4$ 两种情况，分析求解即可.

【详解】设椭圆 E 的左右焦点分别为 $(-c, 0), (c, 0), c > 0$ ，

由题意可得： $\left| \frac{-c-4}{\sqrt{2}} - \frac{c-4}{\sqrt{2}} \right| = 2$ ，则 $|(c+4) - (c-4)| = 2\sqrt{2}$ ，

若 $0 < c < 4$ ，则 $|(c+4) - (c-4)| = |(c+4) + (c-4)| = 2c = 2\sqrt{2}$ ，即 $c = \sqrt{2}$ ；

若 $c \geq 4$ ，则 $|(c+4) - (c-4)| = |(c+4) - (c-4)| = 8 \neq 2\sqrt{2}$ ，不合题意；

综上所述： $c = \sqrt{2}$ ，即 E 的焦距是 $2c = 2\sqrt{2}$ 。

故选：C.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A$ 和 $\tan B$ 是方程 $x^2 - mx + n = 0, (n \neq 1)$ 的两个根, 则 $\tan C =$ ()

- A. $\frac{m}{n-1}$ B. $\frac{m}{1-n}$ C. $\frac{n}{1-m}$ D. $\frac{n}{1-m}$

【答案】A

【解析】

【分析】由韦达定理, $\tan A + \tan B = m, \tan A \cdot \tan B = n$, 结合诱导公式、两角和的正切即可求解.

【详解】因为 $\tan A$ 和 $\tan B$ 是方程 $x^2 - mx + n = 0$ 的两个根, 所以由韦达定理有

$$\tan A + \tan B = m, \tan A \cdot \tan B = n,$$

$$\text{所以 } \tan C = \tan(\pi - A - B) = -\tan(A + B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\frac{m}{1 - n} = \frac{m}{n - 1}.$$

故选: A.

6. 边长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 AA_1, A_1D_1 中点, M 是 DB 靠近 B 的四等分点, P 在正方体内部或表面, $\vec{DP} \cdot (\vec{EF} + \vec{MF}) = 0$, 则 $|\vec{DP}|$ 的最大值是 ()

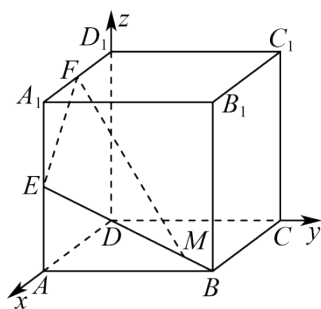
- A. 1 B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系, 设 $P(x, y, z)$, 从而求得 $-\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{3}{2}z = 0$, 再根据向量模长公式结合 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 即可求解.

【详解】



如图, 建立空间直角坐标系, 设 $P(x, y, z)$,

$$\text{则 } D(0, 0, 0), E\left(1, 0, \frac{1}{2}\right), F\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), M\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 0\right),$$

$$\text{所以 } \vec{EF} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \vec{MF} = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 1\right), \text{ 则 } \vec{EF} + \vec{MF} = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right),$$

因为 $\overrightarrow{DP} \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{MF}) = 0$, 又 $\overrightarrow{DP} = (x, y, z)$,

所以 $-\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{3}{2}z = 0$, 即 $z = \frac{x+y}{2}$,

所以 $|\overrightarrow{DP}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$,

又 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 所以 $x^2 + y^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq 1 + 1 + \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 = 3$, 当且仅当 $x = y = 1$, 此时 $z = 1$

时, 等号成立,

所以 $|\overrightarrow{DP}|$ 的最大值是 $\sqrt{3}$.

故选: D.

7. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$, 则 $\sum_{k=-2023}^{2025} f(k) = (\quad)$

A. -8098

B. -8096

C. 0

D. 8100

【答案】A

【解析】

【分析】首先得出 $f(x)$ 关于 $(1, -2)$ 中心对称, 然后即可利用这一性质求解.

【详解】 $f(x) = x^3 - 3x^2 = (x-1)^3 - 3x + 1 = (x-1)^3 - 3(x-1) - 2$,

所以 $f(1+x) + f(1-x) = x^3 - 3x - 2 - x^3 + 3x - 2 = -4$, 即 $f(x)$ 关于 $(1, -2)$ 中心对称,

所以 $\sum_{k=-2023}^{2025} f(k) = [f(-2023) + f(2025)] + [f(-2022) + f(2024)] + \dots + [f(0) + f(2)] + f(1)$

$= 2024 \times (-4) + f(1) = -8098$.

故选: A.

8. 若正实数 a, b, c 满足 $a^b = bc$, $a^b \ln a = c$, 则 $(\quad)$

A. $a \geq b$

B. $a \geq c$

C. $b \geq c$

D. $c \geq b$

【答案】B

【解析】

【分析】借助导数研究函数单调性, 进而得到函数值大小即可.

【详解】 $a^b = bc$, $a^b \ln a = c$, 则 $b \ln a = c$, 则 $b \ln a = 1$, 则 $a = e^{\frac{1}{b}}$.

则 $a^b = (e^{\frac{1}{b}})^b = e$, 则 $a^b = (e^{\frac{1}{b}})^b = e = bc$, 则 $c = \frac{e}{b}$

先比较 a, b : 作差 $a - b = e^{\frac{1}{b}} - b$, 设 $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x (x > 0)$,

求导 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - 1 < 0, (x > 0)$, 则 $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x (x > 0)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减.

$f(1) = e - 1 > 0$, $f(2) = \sqrt{e} - 2 = \sqrt{e} - \sqrt{4} < 0$, 故 $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x (x > 0)$ 有正负还有零.

即 $a - b$ 值有正负还有零, 故不能比较 a, b 大小. 故 A 错误.

再比较 a, c : 作差 $a - c = e^{\frac{1}{b}} - \frac{e}{b}$, 设 $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e}{x} (x > 0)$, 求导

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{e}{x^2} = \frac{1}{x^2}(e - e^{\frac{1}{x}}) = 0, \text{ 则 } x = 1$$

由于 $0 < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow e - e^{\frac{1}{x}} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减.

$x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow e - e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) \geq 0$, 即 $a - c = e^{\frac{1}{b}} - \frac{e}{b} \geq 0$, 即 $a \geq c$. 故 B 正确.

最后比较 b, c , 由于 $c = \frac{e}{b}$, 假设 $b = c = \sqrt{e}$ 满足题意,

假设 $b > c$, 即 $b > \frac{e}{b}$, 即 $b^2 > e$, 即 $b > \sqrt{e}$ 也满足题意,

假设 $b < c$, 即 $b < \frac{e}{b}$, 即 $b^2 < e$, 即 $0 < b < \sqrt{e}$ 也满足题意.

则 b, c 无法比较大小, 故 CD 错误.

故选: B.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知均值为 $(2, 5)$ 的多组样本点数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 经最小二乘法得到的回归直线 $y = 2x + 1$. 现删去样本点数据 $(2, 7)$, 并利用最小二乘法得到新回归直线, 则新回归直线 ()

参考数据: 回归直线 $y = a + bx$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}.$$

A. 斜率改变

B. 截距不变

C. 斜率不变

D. 截距改变

【答案】CD

【解析】

【分析】依据题意得 $\sum_{i=1}^n (x_i - 2)(y_i - 5) = 2 \sum_{i=1}^n (x_i - 2)^2$ ，接着先求出新数据的 $\bar{x}, \bar{y}$ ，再代入最小二乘法公

式求得 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)(y_i - 5 + \frac{2}{n-1})}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2}$ 和 $\hat{\alpha}$ ，进而得解.

【详解】由题意可得 $2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 2)(y_i - 5)}{\sum_{i=1}^n (x_i - 2)^2}$ ，且 $n > 1$ ，

所以 $\sum_{i=1}^n (x_i - 2)(y_i - 5) = 2 \sum_{i=1}^n (x_i - 2)^2$ ，

不妨将样本点数据 $(2, 7)$ 作为第 n 组数据，即 $x_n = 2, y_n = 7$ ，

则前 $n-1$ 组数据满足 $\bar{x} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i - x_n \right) = \frac{1}{n-1} (2n-2) = 2$ ，

$\bar{y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} y_i = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n y_i - y_n \right) = \frac{1}{n-1} (5n-7) = 5 - \frac{2}{n-1}$ ，

所以 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)(y_i - 5 + \frac{2}{n-1})}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)(y_i - 5) + \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2}$

$= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)(y_i - 5) + \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i - \frac{2}{n-1} \times 2(n-1)}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2}$

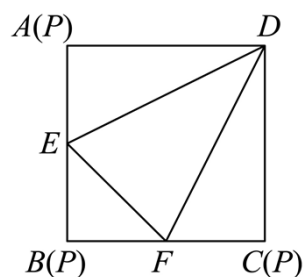
$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)(y_i - 5) + \frac{2}{n-1} \times 2(n-1) - \frac{2}{n-1} \times 2(n-1)}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)(y_i - 5)}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 2)(y_i - 5) - (x_7 - 2)(y_7 - 5)}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2} = \frac{2 \sum_{i=1}^n (x_i - 2)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2} \\
&= \frac{2 \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2 - (x_7 - 2)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2} = \frac{2 \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 2)^2} = 2,
\end{aligned}$$

所以 $\bar{y} - b\bar{x} = 5 - \frac{2}{n-1} - 2 \times 2 = 1 - \frac{2}{n-1} < 1$.

综上，新回归直线斜率不变，截距会发生变化，故选项 AB 错误，选项 CD 正确。

故选：CD.

10. 如图，在三棱锥 $P-EDF$ 的平面展开图中， E ， F 分别是 AB ， BC 的中点，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，则在三棱锥 $P-EDF$ 中（ ）



A. $\triangle PEF$ 的面积为 $\frac{1}{2}$

B. $PD \perp EF$

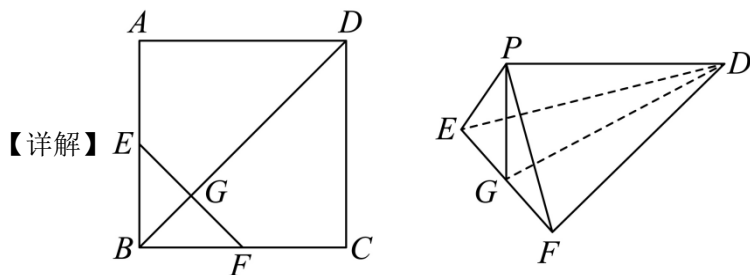
C. 平面 $PEF \perp$ 平面 DEF

D. 三棱锥 $P-EDF$ 的体积为 $\frac{1}{3}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】直接求 $\triangle BEF$ 的面积可判定 A，连接 BD 交 EF 于 G ，根据条件证 $EF \perp$ 平面 GPD 即可判定 B，判定 PG 、 DG 的夹角是否为直角可判定 C，利用棱锥的体积公式可判定 D.



【详解】

对于 A, 易知 $S_{VBEF} = S_{VPEF} = \frac{1}{2} \times BE \times BF = \frac{1}{2}$, 故 A 正确;

对于 B, 连接 BD 交 EF 于 G , 根据正方形的性质易知 $EF \perp BD$,

所以有 $EF \perp GD, EF \perp GP$,

又 $PG, GD \subset$ 平面 PGD , 所以 $EF \perp$ 平面 GPD ,

$PD \subset$ 平面 GPD , 所以 $EF \perp PD$, 故 B 正确;

对于 C, 由上可知 $\angle PGD$ 为平面 PEF 与平面 DEF 的夹角,

易知 $PG = \frac{\sqrt{2}}{2}, DG = \frac{3\sqrt{2}}{2}, PD = 2 \neq \sqrt{PG^2 + DG^2}$, 则 PG, DG 不垂直, 故 C 错误;

对于 D, 由题意可知 PD, PE, PF 两两垂直,

则 $V_{P-EDF} = \frac{1}{3} \times PD \times \frac{1}{2} \times PE \times PF = \frac{1}{3}$, 故 D 正确.

故选: ABD

11. 已知曲线 C 上的点满足: 到定点 $(1,0)$ 与定直线 y 轴的距离的差为定值 m , 其中, 点 A, B 分别为曲线 C 上的两点, 且点 B 恒在点 A 的右侧, 则 ()

A. 若 $m = \frac{1}{2}$, 则曲线 C 的图象为一条抛物线

B. 若 $m = 1$, 则曲线 C 的方程为 $y^2 = 4x$

C. 当 $m > 1$ 时, 对于任意的 $A(x_1, y_0), B(x_2, y_0)$, 都有 $|x_1| > |x_2|$

D. 当 $m < -1$ 时, 对于任意的 $A(x_1, y_0), B(x_2, y_0)$, 都有 $|x_1| > |x_2|$

【答案】AC

【解析】

【分析】设曲线 C 上的点 $P(x, y)$, 由题意求出 x, y 的方程, 分 $x \geq 0$ 、 $x < 0$ 化简后逐项判断可得答案.

【详解】对于 A, 若 $m = \frac{1}{2}$, 设曲线 C 上的点 $P(x, y)$, 由题意可得 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - |x| = \frac{1}{2}$,

化简得 $y^2 = 2x + |x| - \frac{3}{4}$, 当 $x \geq 0$ 时, $y^2 = 3x - \frac{3}{4}$ 为抛物线,

当 $x < 0$ 时, $y^2 = x - \frac{3}{4}$, 因为 $x < 0$, 所以 $x - \frac{3}{4} < 0$, 而 $y^2 \geq 0$, 显然不成立,

综上, 若 $m = \frac{1}{2}$, 则曲线 C 的图象为一条抛物线, 故 A 错误;

对于 B, 若 $m = 1$, 设曲线 C 上的点 $P(x, y)$,

由题意可得 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - |x| = 1$,

化简得 $y^2 = 2x + 2|x|$, 当 $x \geq 0$ 时, $y^2 = 4x$ 为抛物线,

当 $x < 0$ 时, $y = 0$ 为一条射线, 故 B 错误;

对于 C, 若 $m > 1$, 设曲线 C 上的点 $P(x, y)$,

由题意可得 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - |x| = m$,

化简得 $y^2 = 2x + 2m|x| + m^2 - 1$,

因为 $m > 1$,

当 $x \geq 0$ 时, $y^2 = 2(m+1)\left(x - \frac{1-m}{2}\right)$,

为开口向右, 顶点为 $\left(\frac{1-m}{2}, 0\right)$ 的抛物线的一部分,,

当 $x < 0$ 时, $y^2 = 2(1-m)\left(x - \frac{1+m}{2}\right)$,

为开口向左, 顶点为 $\left(\frac{1+m}{2}, 0\right)$ 的抛物线的一部分,,

且 $\left(\frac{1-m}{2}, 0\right)$ 与 $\left(\frac{1+m}{2}, 0\right)$ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 其图象大致如下,

因为 $A(x_1, y_0)$, $B(x_2, y_0)$ 两点的纵坐标相同,

根据对称性可得 $|x_1| > |x_2|$, 故 C 正确;

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文, 请访问: <https://d.book118.com/127115116016006156>