

江苏省无锡市市北高中 2023-2024 学年高三第二次模拟考试数学试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的二项展开式中， x^2 的系数是 ()

- A. 70 B. -70 C. 28 D. -28

2. 已知函数 $f(x) = \ln x$ ，若 $F(x) = f(x) - 3kx^2$ 有 2 个零点，则实数 k 的取值范围为 ()

- A. $\left(-\frac{1}{6e^2}, 0\right)$ B. $\left(-\frac{1}{6e}, 0\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{6e}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{6e^2}\right)$

3. 已知 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2}$, $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.2$, $c = a^b$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

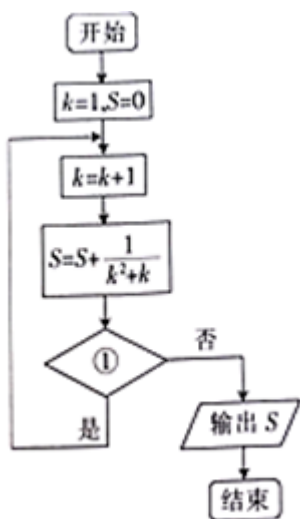
4. 设 i 为数单位， $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，若 $z = \frac{1}{3+i}$ ，则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{10}i$ C. $\frac{1}{100}$ D. $\frac{1}{100}i$

5. 要得到函数 $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图像，只需将 $f(x)$ 的图像 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍
- B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把各点的纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把各点的纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍
- D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍

6. 执行如图所示的程序框图，若输出的 $S = \frac{3}{10}$ ，则①处应填写 ()



- A. $k < 3?$ B. $k \leq 3?$ C. $k \leq 5?$ D. $k < 5?$

7. 复数 $z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$ ($a \in \mathbb{R}$) 为纯虚数, 则 $z =$ ()

- A. i B. $-2i$ C. $2i$ D. $-i$

8. 给出以下四个命题:

- ①依次首尾相接的四条线段必共面;
 ②过不在同一条直线上的三点, 有且只有一个平面;
 ③空间中如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行, 那么这两个角必相等;
 ④垂直于同一直线的两条直线必平行.

其中正确命题的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

9. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 M 为棱 DD_1 的中点, 则平面 ACM 截该正方体的内切球所得截面面积为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. $\frac{4\pi}{3}$

10. 上世纪末河南出土的以鹤的尺骨(翅骨)制成的“骨笛”(图 1), 充分展示了我国古代高超的音律艺术及先进的数学水平, 也印证了我国古代音律与历法的密切联系. 图 2 为骨笛测量“春(秋)分”, “夏(冬)至”的示意图, 图 3 是某骨笛的部分测量数据(骨笛的弯曲忽略不计), 夏至(或冬至)日光(当日正午太阳光线)与春秋分日光(当日正午太阳光线)的夹角等于黄赤交角.

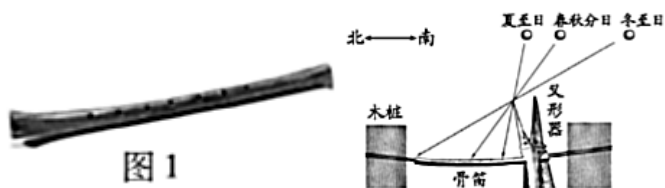


图 2

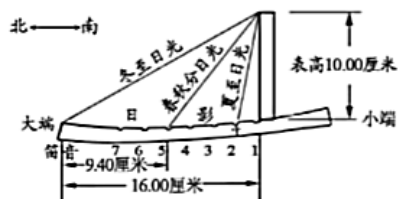


图 3

由历法理论知，黄赤交角近 1 万年持续减小，其正切值及对应的年代如下表：

黄赤交角	23°41′	23°57′	24°13′	24°28′	24°44′
正切值	0.439	0.444	0.450	0.455	0.461
年代	公元元年	公元前 2000 年	公元前 4000 年	公元前 6000 年	公元前 8000 年

根据以上信息，通过计算黄赤交角，可估计该骨笛的大致年代是()

- A. 公元前 2000 年到公元元年
- B. 公元前 4000 年到公元前 2000 年
- C. 公元前 6000 年到公元前 4000 年
- D. 早于公元前 6000 年

11. 设平面 α 与平面 β 相交于直线 m ，直线 a 在平面 α 内，直线 b 在平面 β 内，且 $b \perp m$ 则“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $a \perp b$ ”的 ()

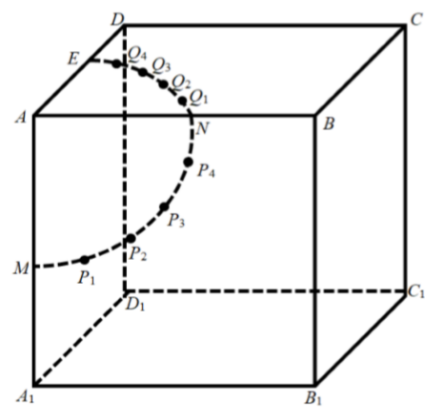
- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 即不充分不必要条件

12. $\triangle ABC$ 中， $AB=3$ ， $BC=\sqrt{13}$ ， $AC=4$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()

- A. $3\sqrt{3}$
- B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- C. 3
- D. $\frac{3}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

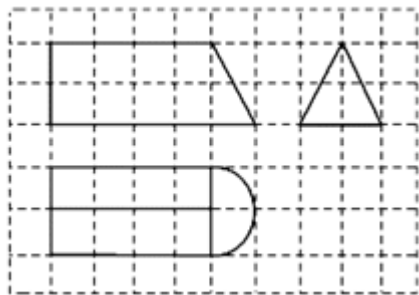
13. 如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M,N,E 分别为棱 AA_1,AB,AD 的中点，以 A 为圆心，1 为半径，分别在面 ABB_1A_1 和面 $ABCD$ 内作弧 MN 和 NE ，并将两弧各五等分，分点依次为 $M、P_1、P_2、P_3、P_4、N$ 以及 $N、Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、E$ 。一只蚂蚁欲从点 P_1 出发，沿正方体的表面爬行至 Q_4 ，则其爬行的最短距离为 _____。参考数据： $\cos 9^\circ=0.9877$ ； $\cos 18^\circ=0.9511$ ； $\cos 27^\circ=0.8910$ ）



14. 已知函数 $y=f(x+1)-2$ 为奇函数， $g(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ ，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的交点为 (x_1,y_1) ， (x_2,y_2) ，...，

(x_6, y_6) ，则 $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 + y_1 + y_2 + \cdots + y_6 = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗实线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的体积为_____.



16. $(x - y^2)(x - y)^{10}$ 展开式中 $x^5 y^6$ 的系数为_____. (用数字作答)

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知点 $B(0, -2)$ 和椭圆 $M: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. 直线 $l: y = kx + 1$ 与椭圆 M 交于不同的两点 P, Q .

(1) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时，求 $\triangle PBQ$ 的面积；

(2) 设直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 C ，当 C 为 PB 中点时，求 k 的值.

18. (12 分) 已知 $f(x) = 2\ln(x+2) - (x+1)^2$, $g(x) = k(x+1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

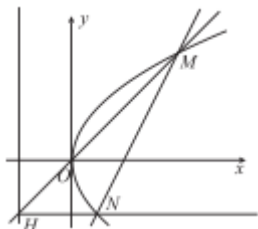
(2) 当 $k = 2$ 时，求证：对于 $\forall x > -1$, $f(x) < g(x)$ 恒成立；

(3) 若存在 $x_0 > -1$ ，使得当 $x \in (-1, x_0)$ 时，恒有 $f(x) > g(x)$ 成立，试求 k 的取值范围.

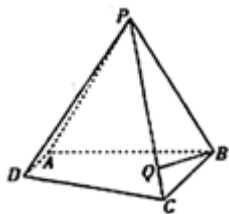
19. (12 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$), 直线 $y = x - 1$ 与 C 交于 A, B 两点，且 $|AB| = 8$.

(1) 求 p 的值；

(2) 如图，过原点 O 的直线 l 与抛物线 C 交于点 M ，与直线 $x = -1$ 交于点 H ，过点 H 作 y 轴的垂线交抛物线 C 于点 N ，证明：直线 MN 过定点.



20. (12 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形且 $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $AB = BC = 2AD = 2$ ，侧面 PAB 为等边三角形，且平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 求平面 PAB 与平面 PDC 所成的锐二面角的大小;

(2) 若 $\vec{CQ} = \lambda \vec{CP}$ ($0 < \lambda < 1$), 且直线 BQ 与平面 PDC 所成角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 λ 的值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若 $a=1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a 的值.

22. (10 分) 设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($1 < a < 5$) 上, 该椭圆的左顶点 A 到直线 $x - y + 5 = 0$ 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若椭圆 C 外一点 N 满足, $\vec{MN}$ 平行于 y 轴, $(\vec{ON} - 2\vec{OM}) \cdot \vec{MN} = 0$, 动点 P 在直线 $x = 2\sqrt{3}$ 上, 满足

$\vec{ON} \cdot \vec{NP} = 2$. 设过点 N 且垂直 OP 的直线 l , 试问直线 l 是否过定点? 若过定点, 请写出该定点, 若不过定点请说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

试题分析: 由题意得, 二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = (-1)^r C_8^r x^{8-\frac{3}{2}r}$, 令 $8 - \frac{3}{2}r = 2 \Rightarrow r = 4$, 所以 x^2

的系数是 $(-1)^4 C_8^4 = 70$, 故选 A.

考点：二项式定理的应用.

2、C

【解析】

令 $F(x) = f(x) - 3kx^2 = 0$ ，可得 $k = \frac{\ln x}{3x^2}$ ，要使得 $F(x) = 0$ 有两个实数解，即 $y = k$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{3x^2}$ 有两个交点，结合已知，即可求得答案.

【详解】

令 $F(x) = f(x) - 3kx^2 = 0$ ，

可得 $k = \frac{\ln x}{3x^2}$ ，

要使得 $F(x) = 0$ 有两个实数解，即 $y = k$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{3x^2}$ 有两个交点，

Q $g'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{3x^3}$ ，

令 $1 - 2\ln x = 0$ ，

可得 $x = \sqrt{e}$ ，

$\therefore$ 当 $x \in (0, \sqrt{e})$ 时， $g'(x) > 0$ ，函数 $g(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增；

当 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ，函数 $g(x)$ 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore$ 当 $x = \sqrt{e}$ 时， $g(x)_{\max} = \frac{1}{6e}$ ，

$\therefore$ 若直线 $y = k$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{3x^2}$ 有两个交点，则 $k \in \left(0, \frac{1}{6e}\right)$.

$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{6e}\right)$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了根据零点求参数范围，解题关键是掌握根据零点个数求参数的解法和根据导数求单调性的步骤，考查了分析能力和计算能力，属于中档题.

3、B

【解析】

利用函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 互为反函数，可得 $0 < a < b < 1$ ，再利用对数运算性质比较 a, c 进而可得结论.

【详解】

依题意，函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 关于直线 $y = x$ 对称，则 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} < \log_{\frac{1}{2}} 0.2$ ，

即 $0 < a < b < 1$ ，又 $c = a^b = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2 \times \log_{\frac{1}{2}} 0.2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 0.2^{0.2}} = 0.2^{0.2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{0.2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} = a$ ，

所以， $c < a < b$ 。

故选：B。

【点睛】

本题主要考查对数、指数的大小比较，属于基础题。

4、A

【解析】

由复数的除法求出 z ，然后计算 $z \cdot \bar{z}$ 。

【详解】

$$z = \frac{1}{3+i} = \frac{3-i}{(3+i)(3-i)} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i,$$

$$\therefore z \cdot \bar{z} = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i\right)\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i\right) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{10}.$$

故选：A。

【点睛】

本题考查复数的乘除法运算，考查共轭复数的概念，掌握复数的运算法则是解题关键。

5、D

【解析】

先求得 $f'(x)$ ，再根据三角函数图像变换的知识，选出正确选项。

【详解】

依题意 $f'(x) = 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cos\left[\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{2}\right] = 3 \sin\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) = 3 \sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right]$ ，所以由

$f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍得到 $f'(x)$ 的图像。

故选：D

【点睛】

本小题主要考查复合函数导数的计算，考查诱导公式，考查三角函数图像变换，属于基础题。

6、B

【解析】

模拟程序框图运行分析即得解.

【详解】

$$k=1, S=0; k=2, S=0+\frac{1}{2^2+2}=\frac{1}{6};$$

$$k=3, S=\frac{1}{6}+\frac{1}{3^2+3}=\frac{1}{4}; k=4, S=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2+4}=\frac{3}{10}.$$

所以①处应填写“ $k, 3$?”

故选: B

【点睛】

本题主要考查程序框图, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

7、 B

【解析】

复数 $z=(a^2-1)+(a-1)i(a \in R)$ 为纯虚数, 则实部为 0, 虚部不为 0, 求出 a , 即得 z .

【详解】

$\because z=(a^2-1)+(a-1)i(a \in R)$ 为纯虚数,

$$\therefore \begin{cases} a^2-1=0 \\ a-1 \neq 0 \end{cases}, \text{解得 } a=-1.$$

$$\therefore z=-2i.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查复数的分类, 属于基础题.

8、 B

【解析】

用空间四边形对①进行判断; 根据公理 2 对②进行判断; 根据空间角的定义对③进行判断; 根据空间直线位置关系对④进行判断.

【详解】

①中, 空间四边形的四条线段不共面, 故①错误.

②中, 由公理 2 知道, 过不在同一条直线上的三点, 有且只有一个平面, 故②正确.

③中, 由空间角的定义知道, 空间中如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行, 那么这两个角相等或互补, 故③错误.

④中, 空间中, 垂直于同一直线的两条直线可相交, 可平行, 可异面, 故④错误.

故选：B

【点睛】

本小题考查空间点，线，面的位置关系及其相关公理，定理及其推论的理解和认识；考查空间想象能力，推理论证能力，考查数形结合思想，化归与转化思想.

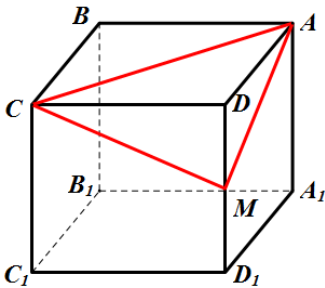
9、A

【解析】

根据球的特点可知截面是一个圆，根据等体积法计算出球心到平面 ACM 的距离，由此求解出截面圆的半径，从而截面面积可求.

【详解】

如图所示：



设内切球球心为 O ， O 到平面 ACM 的距离为 d ，截面圆的半径为 r ，

因为内切球的半径等于正方体棱长的一半，所以球的半径为1，

又因为 $V_{O-AMC} = V_{M-AOC}$ ，所以 $\frac{1}{3} \times d \times S_{\triangle AMC} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times S_{\triangle AOC}$ ，

又因为 $S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$ ， $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$ ，

所以 $\frac{1}{3} \times d \times \sqrt{6} = \frac{2}{3}$ ，所以 $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

所以截面圆的半径 $r = \sqrt{1^2 - d^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以截面圆的面积为 $S = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{3}$ 。

故选：A.

【点睛】

本题考查正方体的内切球的特点以及球的截面面积的计算，难度一般.任何一个平面去截球，得到的截面一定是圆面，截面圆的半径可通过球的半径以及球心到截面的距离去计算.

10、D

【解析】

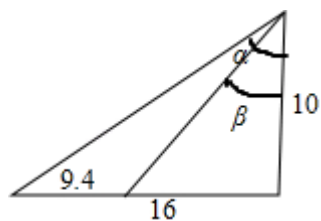
先理解题意，然后根据题意建立平面几何图形，在利用三角函数的知识计算出冬至日光与春秋分日光的夹角，即黄赤交角，即可得到正确选项.

【详解】

解：由题意，可设冬至日光与垂直线夹角为 α ，春秋分日光与垂直线夹角为 β ，

则 $\alpha - \beta$ 即为冬至日光与春秋分日光的夹角，即黄赤交角，

将图 3 近似画出如下平面几何图形：



$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{16}{10} = 1.6, \quad \tan \beta = \frac{16 - 9.4}{10} = 0.66,$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1.6 - 0.66}{1 + 1.6 \times 0.66} \approx 0.457.$$

$$\text{Q } 0.455 < 0.457 < 0.461,$$

$\therefore$ 估计该骨笛的大致年代早于公元前 6000 年.

故选：D.

【点睛】

本题考查利用三角函数解决实际问题的能力，运用了两角和与差的正切公式，考查了转化思想，数学建模思想，以及数学运算能力，属中档题.

11、A

【解析】

试题分析： $\alpha \perp \beta, \quad b \perp m \Rightarrow b \perp \alpha$, 又直线 a 在平面 α 内，所以 $a \perp b$ ，但直线 α, m 不一定相交，所以“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $a \perp b$ ”的充分不必要条件，故选 A.

考点：充分条件、必要条件.

12、A

【解析】

由余弦定理求出角 A ，再由三角形面积公式计算即可.

【详解】

由余弦定理得： $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{1}{2},$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/127155163006006102>