

2023 年高考数学模拟试卷

注意事项：

- 1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
- 2. 答题时请按要求用笔。
- 3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
- 4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
- 5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $y = f(x)$ 满足对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+2) = f(-x)$ 成立，且函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称， $f(1) = 4$ ，则 $f(2016) + f(2017) + f(2018)$ 的值为（ ）
- A. 0 B. 2 C. 4 D. 1
2. 设 $a = \log_3 0.5$ ， $b = \log_{0.2} 0.3$ ， $c = 2^{0.3}$ ，则 a, b, c 的大小关系是（ ）
- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$
3. 已知实数 $a > 0, b > 1$ 满足 $a + b = 5$ ，则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b-1}$ 的最小值为（ ）
- A. $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{3+4\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{3+4\sqrt{2}}{6}$
4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的一条渐近线方程是 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，则双曲线的离心率为（ ）
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
5. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ x - 2y - 2 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = \frac{y-2}{x+1}$ 的最小值为
- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $-\frac{1}{2}$
6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为零，且 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}$ 构成新的等差数列， S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若存在 n 使得 $S_n = 0$ ，则 $n =$ （ ）
- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13
7. 下列几何体的三视图中，恰好有两个视图相同的几何体是（ ）

- A. 正方体

B. 球体
- C. 圆锥

D. 长宽高互不相等的长方体

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 4^x+3, x\leq 0 \\ 2^x+\log_9 x^2-9, x>0 \end{cases}$ ，则函数 $y=f(f(x))$ 的零点所在区间为（ ）

- A. $\left(3,\frac{7}{2}\right)$

B. $(-1,0)$

C. $\left(\frac{7}{2},4\right)$

D. $(4,5)$

9. 设 $k>1$ ，则关于 x,y 的方程 $(1-k)x^2+y^2=k^2-1$ 所表示的曲线是（ ）

- A. 长轴在 y 轴上的椭圆

B. 长轴在 x 轴上的椭圆
- C. 实轴在 y 轴上的双曲线

D. 实轴在 x 轴上的双曲线

10. 中国古代用算筹来进行记数，算筹的摆放形式有纵横两种形式（如图所示），表示一个多位数时，像阿拉伯记数一样，把各个数位的数码从左到右排列，但各位数码的筹式需要纵横相间，其中个位、百位、方位.....用纵式表示，十位、千位、十万位.....用横式表示，则 **56846** 可用算筹表示为（ ）

1

2

3

4

5

6

7

8

9

|

||

|||

||||

|||||

┐

┐┐

┐┐┐

┐┐┐┐

纵式

—

=

≡

≡≡

≡≡≡

└

└└

└└└

└└└└

横式

中国古代的算筹数码

- A.

||||└┐┐||||┐

B.

||||└┐┐≡┐

C.

≡┐└┐||||└

D.

||||└┐┐||||└

11. “哥德巴赫猜想”是近代三大数学难题之一，其内容是：一个大于 **2** 的偶数都可以写成两个质数(素数)之和，也就是我们所谓的“**1+1**”问题.它是 **1742** 年由数学家哥德巴赫提出的，我国数学家潘承洞、王元、陈景润等在哥德巴赫猜想的证明中做出相当好的成绩.若将 **6** 拆成两个正整数的和，则拆成的和式中，加数全部为质数的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{2}{3}$

12. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1=\sqrt{2}AB$ ， D 是 BC 的中点，则异面直线 AD 与 A_1C 所成的角为（ ）

- A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 $a, b \geq \frac{1}{2}$, 且 $a^2 - a = b - b^2$, 由 $M = \frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b}$ 的最大值是_____

14. 若函数 $f(x) = x^2 + \frac{ax^2}{2^x + 1}$ 为奇函数, 则 $a =$ _____.

15. 函数 $f(x) = ae^x$ 与 $g(x) = -x - 1$ 的图象上存在关于 x 轴的对称点, 则实数 a 的取值范围为_____.

16. 函数 $f(x) = \sqrt{\lg \frac{2}{x} - 1}$ 的定义域为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点分别为 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{2}, 0)$. 点 $M(1, 0)$

与椭圆短轴的两个端点的连线相互垂直.

(1) 求椭圆 C 的方程;

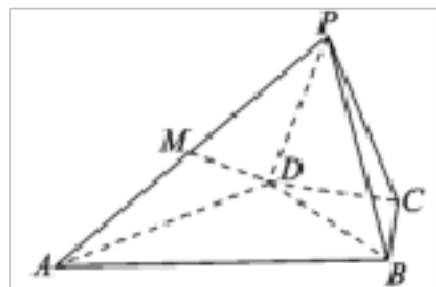
(2) 已知点 N 的坐标为 $(3, 2)$, 点 P 的坐标为 (m, n) ($m \neq 3$). 过点 M 任作直线 l 与椭圆 C 相交于 A 、 B 两点, 设直线 AN 、 NP 、 BN 的斜率分别为 k_1 、 k_2 、 k_3 , 若 $k_1 + k_3 = 2k_2$, 试求 m 、 n 满足的关系式.

18. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和 $S_n = -3n^2$, 又 $\{b_n\}$ 单调递增的等比数列, $b_1 b_2 b_3 = 512$, $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $c_n = \frac{b}{(b-2)^n(b-1)}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 并求证: $\frac{2}{3} \leq T_n < 1$.

19. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 中, $\triangle ABD$ 为等边三角形, $\triangle BCD$ 是等腰三角形, 且顶角 $\angle BCD = 120^\circ$, $PC \perp BD$, 平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$, M 为 PA 中点.



(1) 求证: $DM \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若 $PD \perp PB$, 求二面角 $C-PA-B$ 的余弦值大小.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 + \cos x$ ($a \in R$)

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 证明 $f'(x) \geq 0$, 在 $[0, +\infty)$ 恒成立;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值, 求 a 的取值范围.

21. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a \neq b$, 且

$$\cos^2 A - \cos^2 B = \sqrt{3} \sin A \cos A - \sqrt{3} \sin B \cos B.$$

(I) 求角 C 的大小;

(II) 若 $c = \sqrt{3}$, 求 ΔABC 面积的取值范围.

22. (10 分) $\max \{m,n\}$ 表示 m , n 中的最大值, 如 $\max \{3,\sqrt{10}\}=\sqrt{10}$, 已知函数 $f(x)=\max \{x^2-1,2\ln x\}$,

$$g(x)=\max \left\{x+\ln x,-x^2+\left(a^2-\frac{1}{2}\right)x+2a^2+4a\right\}.$$

(1) 设 $h(x)=f(x)-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2$, 求函数 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 上的零点个数;

(2) 试探讨是否存在实数 $a\in(-2,+\infty)$, 使得 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立? 若存在, 求 a 的取值范围;

若不存在, 说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. C

【解析】

根据函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称可得 $f(x)$ 为奇函数, 结合 $f(x+2)=f(-x)$ 可得 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 利用 $f(0)=0$ 及 $f(1)=4$ 可得所求的值.

【详解】

因为函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称, 所以 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称,

所以 $f(x)$ 为 R 上的奇函数.

由 $f(x+2)=f(-x)$ 可得 $f(x+2)=-f(x)$, 故 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,

故 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

因为 $2016=4\times 504,2017=4\times 504+1,2018=4\times 504+2$,

所以 $f(2016)+f(2017)+f(2018)=f(0)+f(1)+f(2)=4+f(2)$.

因为 $f(x+2)=f(-x)$, 故 $f(0+2)=f(-0)=-f(0)=0$,

所以 $f(2016)+f(2017)+f(2018)=4$.

故选：C.

【点睛】

本题考查函数的奇偶性和周期性，一般地，如果 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=-f(x)(a\neq 0)$ ，那么 $f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数，本题属于中档题.

2. A

【解析】

选取中间值 0 和 1，利用对数函数 $y=\log_3x$ ， $y=\log_{0.2}x$ 和指数函数 $y=2^x$ 的单调性即可求解.

【详解】

因为对数函数 $y=\log_3x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\log_30.5<\log_31=0$,

因为对数函数 $y=\log_{0.2}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $0=\log_{0.2}1<\log_{0.2}0.3<\log_{0.2}0.2=1$,

因为指数函数 $y=2^x$ 在 R 上单调递增，

所以 $2^{0.3}>2^0=1$,

综上所述, $a<b<c$.

故选:A

【点睛】

本题考查利用对数函数和指数函数的单调性比较大小;考查逻辑思维能力和知识的综合运用能力;选取合适的中间值是求解本题的关键;属于中档题、常考题型.

3. A

【解析】

所求 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b-1}$ 的分母特征，利用 $a+b=5$ 变形构造 $a+(b-1)=4$ ，再等价变形 $\frac{1}{4}(\frac{2}{a}+\frac{1}{b-1})[a+(b-1)]$ ，利用基本不等式求最值.

【详解】

解：因为 $a > 0, b > 1$ 满足 $a + b = 5$ ，

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{2}{a} + \frac{1}{b-1} &= \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b-1} \right) [a + (b-1)] \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left[3 + \frac{2(b-1)}{a} + \frac{a}{b-1} \right] \geq \frac{1}{4} (3 + 2\sqrt{2}), \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{2(b-1)}{a} = \frac{a}{b-1}$ 时取等号，

故选：A.

【点睛】

本题考查通过拼凑法利用基本不等式求最值.拼凑法的实质在于代数式的灵活变形，拼系数、凑常数是关键.**(1)**拼凑的技巧，以整式为基础，注意利用系数的变化以及等式中常数的调整，做到等价变形;**(2)**代数式的变形以拼凑出和或积的定值为目标**(3)**拆项、添项应注意检验利用基本不等式的前提.

4. D

【解析】

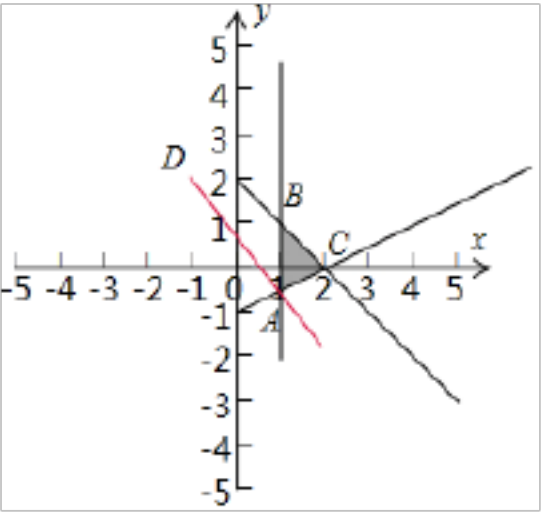
双曲线的渐近线方程是 $y = \pm \frac{1}{a}x$ ，所以 $\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即 $a = \sqrt{3}, b = 1$ ， $c^2 = a^2 + b^2 = 4$ ，即 $c = 2$ ， $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，

故选 D.

5. B

【解析】

作出不等式组对应的平面区域，目标函数 $z = \frac{y-2}{x+1}$ 的几何意义为动点 $M(x, y)$ 到定点 $D(-1, 2)$ 的斜率，利用数形结合即可得到 z 的最小值.



【详解】

解：作出不等式组对应的平面区域如图：

目标函数 $z = \frac{y-2}{x+1}$ 的几何意义为动点 $M(x, y)$ 到定点 $D(-1, 2)$ 的斜率，

当 M 位于 $A\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ 时, 此时 DA 的斜率最小, 此时 $z_{min}=\frac{-\frac{1}{2}-2}{1+1}=-\frac{5}{4}$.

故选 **B**.

【点睛】

本题主要考查线性规划的应用以及两点之间的斜率公式的计算, 利用 z 的几何意义, 通过数形结合是解决本题的关键.

6. **D**

【解析】

利用等差数列的通项公式可得 $a_1=-6d$, 再利用等差数列的前 n 项和公式即可求解.

【详解】

由 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}$ 构成等差数列可得

$$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}$$

$$\text{即}\frac{a_1-a_3}{a_1a_3}=\frac{a_3-a_4}{a_3a_4}\Rightarrow\frac{-2d}{a_1}=\frac{-d}{a_4}\Rightarrow a_1=2a_4$$

$$\text{又}a_4=a_1+3d\Rightarrow a_1=2(a_1+3d)$$

$$\text{解得: }a_1=-6d$$

$$\text{又}S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\frac{n}{2}(-12d+(n-1)d)=\frac{n}{2}d(n-13)$$

所以 $S_n=0$ 时, $n=13$.

故选: **D**

【点睛】

本题考查了等差数列的通项公式、等差数列的前 n 项和公式, 需熟记公式, 属于基础题.

7. **C**

【解析】

根据基本几何体的三视图确定.

【详解】

正方体的三个三视图都是相等的正方形, 球的三个三视图都是相等的圆, 圆锥的三个三视图有一个是圆, 另外两个是全等的等腰三角形, 长宽高互不相等的长方体的三视图是三个两两不全等的矩形.

故选: **C**.

【点睛】

本题考查基本几何体的三视图，掌握基本几何体的三视图是解题关键.

8. A

【解析】

首先求得 $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 的取值范围.然后求得 $x > 0$ 时, $f(x)$ 的单调性和零点, 令 $f(f(x))=0$, 根据“ $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 的取值范围”得到 $f(x)=2^x+\log_3 x-9=3$, 利用零点存在性定理, 求得函数 $y=f(f(x))$ 的零点所在区间.

【详解】

当 $x \leq 0$ 时, $3 < f(x) \leq 4$.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x)=2^x+\log_9 x^2-9=2^x+\log_3 x-9$ 为增函数, 且 $f(3)=0$, 则 $x=3$ 是 $f(x)$ 唯一零点.由于“当

$x \leq 0$ 时, $3 < f(x) \leq 4$.”, 所以

令 $f(f(x))=0$, 得 $f(x)=2^x+\log_3 x-9=3$, 因为 $f(3)=0 < 3$,

$$f\left(\frac{7}{2}\right)=8\sqrt{2}+\log_3 \frac{7}{2}-9 > 8 \times 1.414 + \log_3 3 - 9 = 3.312 > 3,$$

所以函数 $y=f(f(x))$ 的零点所在区间为 $\left(3, \frac{7}{2}\right)$.

故选: A

【点睛】

本小题主要考查分段函数的性质, 考查符合函数零点, 考查零点存在性定理, 考查函数的单调性, 考查化归与转化的数学思想方法, 属于中档题.

9. C

【解析】

根据条件, 方程 $(1-k)x^2+y^2=k^2-1$. 即 $\frac{y^2}{k^2-1}-\frac{x^2}{k+1}=1$, 结合双曲线的标准方程的特征判断曲线的类型.

【详解】

解: $\because k > 1, \therefore 1+k > 0, k^2-1 > 0,$

方程 $(1-k)x^2+y^2=k^2-1$, 即 $\frac{y^2}{k^2-1}-\frac{x^2}{k+1}=1$, 表示实轴在 y 轴上的双曲线,

故选 C.

【点睛】

本题考查双曲线的标准方程的特征，依据条件把已知的曲线方程化为 $\frac{y^2}{k^2-1}-\frac{x^2}{k+1}=1$ 是关键.

10. **B**

【解析】

根据题意表示出各位上的数字所对应的算筹即可得答案.

【详解】

解：根据题意可得，各个数码的筹式需要纵横相间，个位，百位，万位用纵式表示；十位，千位，十万位用横式表示，
 $\therefore 56846$ 用算筹表示应为：纵 **5** 横 **6** 纵 **8** 横 **4** 纵 **6**，从题目中所给出的信息找出对应算筹表示为 B 中的.

故选： B .

【点睛】

本题主要考查学生的合情推理与演绎推理，属于基础题.

11. **A**

【解析】

列出所有可以表示成和为 **6** 的正整数式子，找到加数全部为质数的只有 $3+3=6$ ，利用古典概型求解即可.

【详解】

6 拆成两个正整数的和含有的基本事件有:**(1,5),(2,4),(3,3), (4,2),(5,1)**,

而加数全为质数的有**(3,3)**,

根据古典概型知，所求概率为 $P=\frac{1}{5}$.

故选： A .

【点睛】

本题主要考查了古典概型，基本事件，属于容易题.

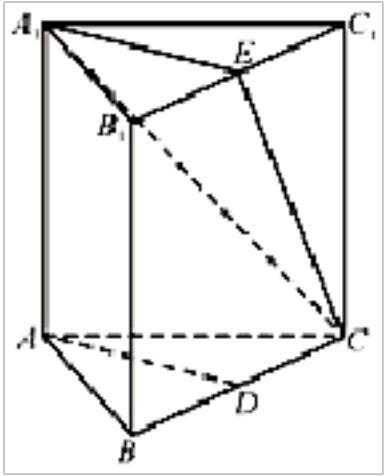
12. **C**

【解析】

取 B_1C_1 中点 E ，连接 A_1E ， CE ，根据正棱柱的结构性质，得出 $A_1E \parallel AD$ ，则 $\angle CA_1E$ 即为异面直线 AD 与 A_1C 所成角，求出 $\tan \angle CA_1E = \frac{CE}{A_1E}$ ，即可得出结果.

【详解】

解：如图，取 B_1C_1 中点 E ，连接 A_1E ， CE ，



由于正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ，则 $BB_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1$ ，

而 $A_1E \subset$ 底面 $A_1B_1C_1$ ，所以 $BB_1 \perp A_1E$ ，

由正三棱柱的性质可知， $\triangle A_1B_1C_1$ 为等边三角形，

所以 $A_1E \perp B_1C_1$ ，且 $A_1E \cap B_1C_1 = E$ ，

所以 $A_1E \perp$ 平面 BB_1C_1C ，

而 $EC \subset$ 平面 BB_1C_1C ，则 $A_1E \perp EC$ ，

则 $A_1E \parallel AD$ ， $\angle A_1EC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CA_1E$ 即为异面直线 AD 与 A_1C 所成角，

设 $AB = 2$ ，则 $AA_1 = 2\sqrt{2}$ ， $A_1E = \sqrt{3}$ ， $CE = 3$ ，

$$\text{则 } \tan \angle CA_1E = \frac{CE}{A_1E} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}，$$

$$\therefore \angle CA_1E = \frac{\pi}{3}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查通过几何法求异面直线的夹角，考查计算能力.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{3\sqrt{2}}{2}+1$

【解析】

将其转化为几何意义，然后根据最值的条件求出最大值

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/128046010040006047>