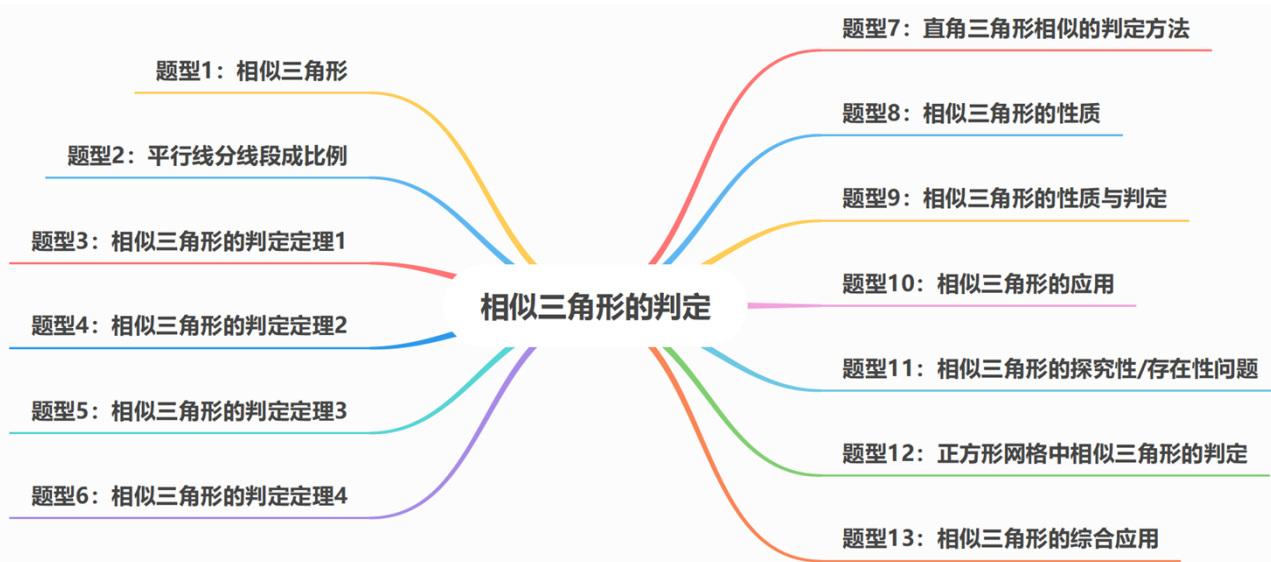


27.2 相似三角形的判定与性质



题型汇总



重要笔记

相似三角形

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果

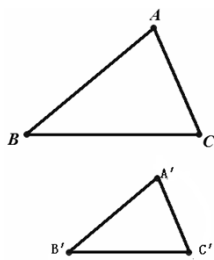
$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C',$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k, \text{ 我们就}$$

说 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，记作

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. k 就是它们的

相似比，“ $\sim$ ”读作“相似于”。



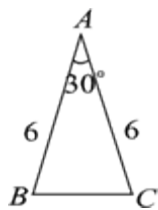
注意：

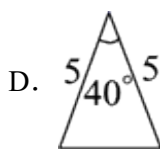
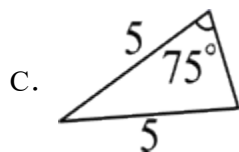
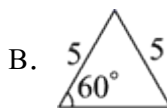
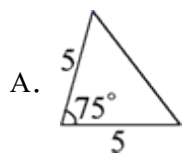
(1) 书写两个三角形相似时，要注意对应点的位置要一致，即 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，则说明点 A 的对应点是 A'，点 B 的对应点是 B'，点 C 的对应点是 C'；

(2) 对于相似比，要注意顺序和对应的问题，如果两个三角形相似，那么第一个三角形的一边和第二个三角形的对应边的比叫做第一个三角形和第二个三角形的相似比。当相似比为 1 时，两个三角形全等。

题型 1：相似三角形

例题 1.1. 如图，已知 $\triangle ABC$ ，则下列 4 个三角形中，与 $\triangle ABC$ 相似的是()





【答案】C

【解析】【解答】解：∵由图可知， $AB=AC=6$ ， $\angle B=75^\circ$ ，

∴ $\angle C=75^\circ$ ， $\angle A=30^\circ$ ，

A 选项中三角形各角的度数分别为 75° ， 52.5° ， 52.5° ，

B 选项中三角形各角的度数都是 60° ，

C 选项中三角形各角的度数分别为 75° ， 30° ， 75° ，

D 选项中三角形各角的度数分别为 40° ， 70° ， 70° ，

∴只有 C 选项中三角形各角的度数与题干中三角形各角的度数相等，

故答案为：C.

【分析】根据“两组对应边的比相等且这两边的夹角相等的两个三角形相似”并结合各选项可判断求解.

【变式 1-1】下列说法正确的是（ ）

A. 有一个角等于 100° 的两个等腰三角形相似

B. 两个矩形一定相似

C. 有一个角等于 45° 的两个等腰三角形相似

D. 相似三角形一定不是全等三角形

【答案】A

【解析】【解答】解：A 中等于 100° 的角只能是等腰三角形的顶角，所以这两个等腰三角形相似，故正确，符合要求；

B 中两个矩形虽然角度相同，但对应的边长比不相等时，两个矩形不相似，故错误，不符合要求；

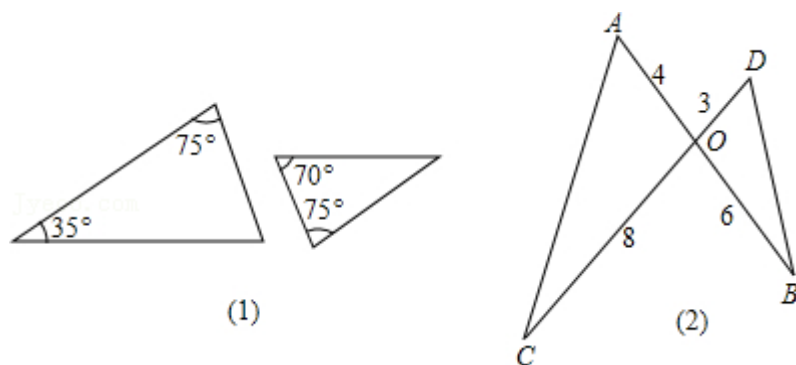
C 中等于 45° 的角可以是等腰三角形的顶角或底角，当为顶角时，三角分别为 45° ， 67.5° ， 67.5° ；当为底角时，三角分别为 45° ， 45° ， 90° ，故这两个等腰三角形不相似，故错误，不符合要求；

D 中当两个相似三角形的相似比为 1 时，两个三角形全等，故错误，不符合要求.

故答案为：A.

【分析】对应角相等，对应边成比例的两个多边形相似，全等是相似比为1时的特殊情况，故全等的图形一定相似，但相似的图形不一定全等，进而结合等腰三角形的性质及矩形的性质即可一一判断得出答案.

【变式 1-2】已知图（1）、（2）中各有两个三角形，其边长和角的度数已在图上标注，图（2）中 AB 、 CD 交于 O 点，对于各图中的两个三角形而言，下列说法正确的是（ ）



- A. 只有（1）相似
B. 只有（2）相似
C. 都相似
D. 都不相似

【分析】对于图（1），先利用三角形内角和计算出第三个角，然后根据两个三角形中有两组角对应相等的三角形相似；对于（2）图，利用两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似进行判断.

【解答】解：对于图（1）： $180^\circ - 75^\circ - 35^\circ = 70^\circ$ ，则两个三角形中有两组角对应相等，所以（1）图中的两个三角形相似；

对于（2）图：由于 $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ ， $\angle AOC = \angle DOB$ ，所以 $\triangle AOC \sim \triangle DOB$.

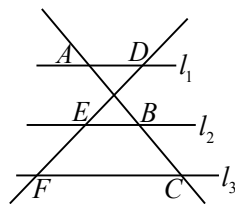
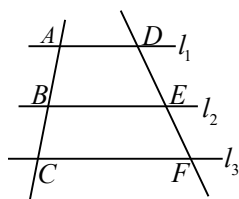
故选：C.

【点评】本题考查了相似三角形的判定：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似；有两组角对应相等的两个三角形相似.

平行线分线段成比例定理

两条直线被三条平行线所截，所得的对应线段成比例，简称为平行线分线段成比例定理. 如图：如果

$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，则 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ， $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ ， $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$.



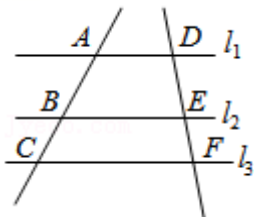
注意：若将所截出的小线段位置靠上的（如 AB ）称为上，位置靠下的称为下，两条线段合成的线段称为全，则可以形象的表示为 $\frac{\text{上}}{\text{下}} = \frac{\text{上}}{\text{下}}$ ， $\frac{\text{上}}{\text{全}} = \frac{\text{上}}{\text{全}}$ ， $\frac{\text{下}}{\text{全}} = \frac{\text{下}}{\text{全}}$ 。

为全，则可以形象的表示为 $\frac{\text{上}}{\text{下}} = \frac{\text{上}}{\text{下}}$ ， $\frac{\text{上}}{\text{全}} = \frac{\text{上}}{\text{全}}$ ， $\frac{\text{下}}{\text{全}} = \frac{\text{下}}{\text{全}}$ 。

题型 2：平行线分线段成比例

例题 2.如图，直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，直线 AC 交 l_1, l_2, l_3 于点 A, B, C ，直线 DF 交 l_1, l_2, l_3 于点 D, E, F 。若

$$\frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}, \text{ 则 } \frac{DE}{DF} \text{ 的值为 ()}$$



A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{7}$

D. $\frac{4}{7}$

【解题思路】 本题通过三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例即可得到结果。

【解答过程】 解： $\because$ 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,

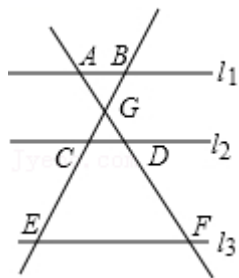
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$

$$\because \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}, \quad DF = DE + EF.$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{DE}{DE + EF} = \frac{4}{7},$$

故选：D.

【变式 2-1】 如图， $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，则下列等式不成立的是 ()



A. $\frac{AD}{DF} = \frac{BC}{CE}$

B. $\frac{AG}{AF} = \frac{BG}{BE}$

C. $\frac{CG}{GE} = \frac{CD}{FE}$

D. $\frac{AG}{GD} = \frac{BC}{CE}$

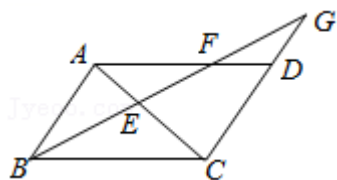
【解题思路】 根据平行线分线段成比例定理和相似三角形的判定和性质即可得到结论。

【解答过程】 解： $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,

$$\therefore \frac{AD}{DF} = \frac{BC}{CE}, \quad \frac{AG}{AF} = \frac{BG}{BE}, \quad \frac{CG}{GE} = \frac{CD}{FE}, \quad \frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GC} \neq \frac{BC}{CE},$$

故选：D.

【变式 2-2】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 F 是 AD 上的点， $AF=2FD$ ，直线 BF 交 AC 于点 E ，交 CD 的延长线于点 G ，则 $\frac{BE}{EG}$ 的值为（ ）



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【解题思路】由 $AF=2DF$ ，可以假设 $DF=k$ ，则 $AF=2k$ ， $AD=3k$ ，证明 $AB=AF=2k$ ， $DF=DG=k$ ，再利用平行线分线段成比例定理即可解决问题.

【解答过程】解：由 $AF=2DF$ ，可以假设 $DF=k$ ，则 $AF=2k$ ， $AD=3k$ ，

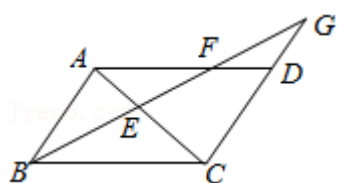
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ， $AD=BC=3k$ ，

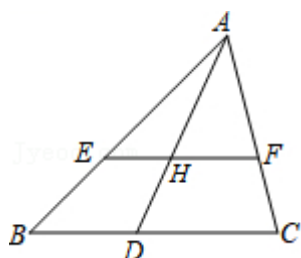
$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AF}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BE}{EG} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$$

故选：C.



【变式 2-3】如图，已知点 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点，且 $EF \parallel BC$ ，点 D 是 BC 边上的点， AD 与 EF 交于点 H ，则下列结论中，错误的是（ ）



- A. $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}$ B. $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{HF}$ C. $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ D. $\frac{AE}{AB} = \frac{HF}{CD}$

【解题思路】利用平行线分线段成比例定理即可一一判断.

【解答过程】解：∵ $EF \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}, \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}, \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{FH}{CD},$$

∴ 选项 A, C, D 正确,

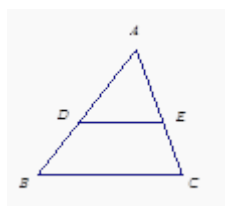
故选: B.

相似三角形的判定定理 (一)

平行于三角形一边的直线和其他两边相交, 所构成的三角形和原三角形相似.

题型 3: 相似三角形的判定定理 1

例题 3. 如图, 点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上, 下列条件不能使 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 相似的是 ()



A. $DE \parallel BC$

B. $AD : AB = DE : BC$

C. $AD : DB = AE : EC$

D. $\angle BDE + \angle DBC = 180^\circ$

【答案】B

【解析】【分析】A. $DE \parallel BC$ 可得出两组对应角相等, 则可通过 AAA 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 相似。

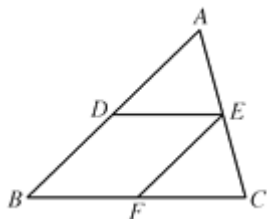
C. $AD : DB = AE : EC$ 即可证明 $AD : AB = AE : AC$, 则可以证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 相似

D. $\angle BDE + \angle DBC = 180^\circ$ 可证明 $DE \parallel BC$. 故也成立。

两边对应成比例, 夹角相等, 才可以证明相似。排除 B.

【点评】本题难度较低, 主要考查学生对相似三角形判定性质知识点的掌握, 为中考常考题型, 要求学生牢固掌握。

【变式 3-1】如图, $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$. 证明: $\triangle ADE \sim \triangle EFC$.



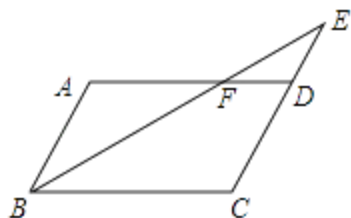
【答案】解: ∵ $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$,

$$\therefore \angle AED = \angle ECF, \angle CEF = \angle EAD.$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle EFC.$$

【解析】【分析】利用一组平行线被第三条直线所截它们的同位角相等，找到符合相似三角形的条件即可.

【变式 3-2】如图，平行四边形 ABCD 中，E 是 CD 的延长线上一点，BE 与 AD 交于点 F， $DE = \frac{1}{2}CD$. 求证： $\triangle ABF \sim \triangle CEB$.



【答案】证明：

$\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形

$\therefore \angle A = \angle C$, $AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABF = \angle CEB$,

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle CEB$.

【解析】【分析】要证 $\triangle ABF \sim \triangle CEB$ ，需找出两组对应角相等；已知了平行四边形的对角相等，再利用 $AB \parallel CD$ ，可得一对内错角相等，则可证.

相似三角形的判定定理（二）

如果两个三角形的三组对应边的比相等，那么这两个三角形相似.

题型 4：相似三角形的判定定理 2

例题 4. 依据下列各组条件，说明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A' B' C'$ 是否相似，并说明理由.

(1) $AB = 10\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, $AC = 15\text{cm}$, $A' B' = 150\text{cm}$, $B' C' = 180\text{cm}$, $A' C' = 225\text{cm}$.

(2) $AB = 10\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$,

$A' B' = 16\text{cm}$, $B' C' = 12.8\text{cm}$, $A' C' = 25.6\text{cm}$.

【解答】

解：(1) $\triangle ABC \sim \triangle A' B' C'$ ，理由如下：

$$\therefore \frac{AB}{A' B'} = \frac{10}{150} = \frac{1}{15}, \frac{BC}{B' C'} = \frac{12}{180} = \frac{1}{15}, \frac{AC}{A' C'} = \frac{15}{225} = \frac{1}{15},$$

$$\therefore \frac{AB}{A' B'} = \frac{BC}{B' C'} = \frac{AC}{A' C'},$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A' B' C'$ ；

(2) $\triangle ABC$ 和 $\triangle A' B' C'$ 相似；理由如下：

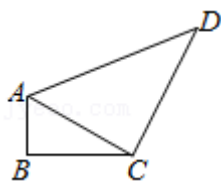
$$\therefore \frac{AB}{A' B'} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}, \frac{BC}{B' C'} = \frac{8}{12.8} = \frac{5}{8}, \frac{AC}{A' C'} = \frac{16}{25.6} = \frac{5}{8},$$

$$\therefore \frac{AB}{A' B'} = \frac{BC}{B' C'} = \frac{AC}{A' C'},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A' B' C'.$$

【点评】本题考查了相似三角形的判定方法、三角形内角和定理；熟练掌握相似三角形的判定方法，通过计算得出两边或三边成比例是解决问题的关键。

【变式 4-1】如图， $\angle B=90^\circ$ ， $\angle ACB=30^\circ$ ， $AC=2$ ， $AD=4$ ， $DC=2\sqrt{3}$ 。求证： $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ 。



【分析】根据直角三角形的性质和相似三角形的判定定理即可得到结论。

【解答】证明： $\because \angle B=90^\circ$ ， $\angle ACB=30^\circ$ ， $AC=2$ ，

$$\therefore AB = \frac{1}{2}AC = 1, BC = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = \sqrt{3},$$

$$\because AD=4, DC=2\sqrt{3}.$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \frac{AC}{AD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AD},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD.$$

【点评】本题考查了相似三角形的判定，直角三角形的性质，熟练掌握相似三角形的判定定理是解题的关键。

【变式 4-2】一个三角形三边的长分别为 6cm ， 9cm ， 7.5cm ，另一个三角形三边的长分别为 8cm ， 10cm ， 12cm ，这两个三角形相似吗？为什么？

【分析】求出两个三角形三条边对应成比例，即可得出两个三角形相似。

【解答】解：这两个三角形相似；理由如下：

$$\therefore \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{7.5}{10} = \frac{3}{4}, \frac{9}{12} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{6}{8} = \frac{7.5}{10} = \frac{9}{12},$$

$\therefore$ 这两个三角形相似.

【点评】本题考查了相似三角形的判定方法；熟练掌握相似三角形的判定方法，证出三角形三边对应成比例是解决问题的关键.

相似三角形的判定定理（三）

如果两个三角形的两组对应边的比相等，并且相应的夹角相等，那么这两个三角形相似.

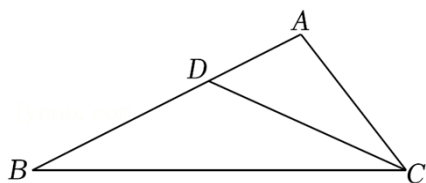
注意：

此方法要求用三角形的两边及其夹角来判定两个三角形相似，应用时必须注意这个角必需是两边的夹角，否则，判断的结果可能是错误的.

题型 5：相似三角形的判定定理 3

例题 5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 AB 上一点，且 $AD=1$ ， $AB=3$ ， $AC=\sqrt{3}$.

求证： $\triangle ACD \sim \triangle ABC$.



【分析】根据两边成比例且夹角相等的两个三角形相似可得结论.

【解答】证明： $\because AD=1$ ， $AB=3$ ， $AC=\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

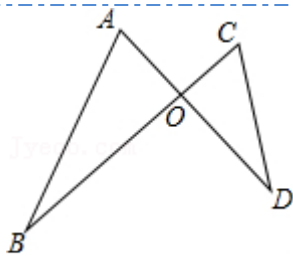
$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

又 $\because \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC$.

【点评】本题主要考查了相似三角形的判定，熟练掌握相似三角形的判定是解题的关键.

【变式 5-1】已知：如图， AD ， BC 交于点 O ， $AO \cdot DO = CO \cdot BO$ ，求证： $\triangle ABO \sim \triangle CDO$.



【分析】利用比例的性质得 $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$ ，加上 $\angle AOB = \angle COD$ ，则根据相似三角形的判定方法可得到结论。

【解答】解：∵ $AO \cdot DO = CO \cdot BO$ ，

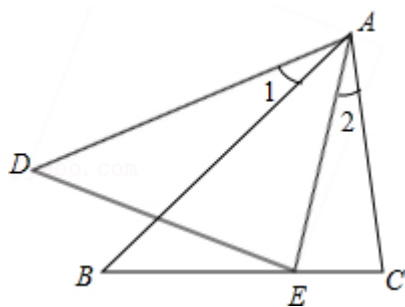
$$\therefore \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO},$$

而 $\angle AOB = \angle COD$ ，

∴ $\triangle ABO \sim \triangle CDO$ 。

【点评】本题考查了相似三角形的判定：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似。

【变式 5-2】如图， $AB \cdot AE = AD \cdot AC$ ，且 $\angle 1 = \angle 2$ ，求证： $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 。



【分析】由已知条件得到： $\angle BAC = \angle DAE$ ， $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ 。则由“两边及夹角法”证得结论。

【解答】证明：如图，∵ $AB \cdot AE = AD \cdot AC$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

又∵ $\angle 1 = \angle 2$ ，

∴ $\angle 2 + \angle BAE = \angle 1 + \angle BAE$ ，即 $\angle BAC = \angle DAE$ ，

∴ $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 。

【点评】本题考查了相似三角形的判定。

(1) 平行线法：平行于三角形的一边的直线与其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似；

(2) 三边法：三组对应边的比相等的两个三角形相似；

(3) 两边及其夹角法：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似；

(4) 两角法：有两组角对应相等的两个三角形相似.

相似三角形的判定定理 (四)

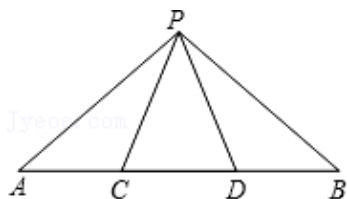
如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似.

注意：

要判定两个三角形是否相似，只需找到这两个三角形的两个对应角相等即可，对于直角三角形而言，若有一个锐角对应相等，那么这两个三角形相似.

题型 6：相似三角形的判定定理 4

例题 6.如图，在 $\triangle PAB$ 中，点 C 、 D 在 AB 上， $PC=PD=CD$ ， $\angle APB=120^\circ$ ， $\triangle APC$ 与 $\triangle BPD$ 相似吗？为什么？



【分析】由 $PC=PD=CD$ 可判断 $\triangle PCD$ 为等边三角形，则 $\angle PCD=\angle PDC=\angle CPD=60^\circ$ ，利用邻补角得到 $\angle 3=\angle 4=120^\circ$ ，又由于 $\angle APB=120^\circ$ ，可计算出 $\angle 1+\angle 2=60^\circ$ ，加上 $\angle A+\angle 2=60^\circ$ ，所以 $\angle 1=\angle A$ ，于是可根据有两组角对应相等的两个三角形相似得到 $\triangle PAC \sim \triangle BPD$.

【解答】解： $\triangle APC$ 与 $\triangle BPD$ 相似. 理由如下：

如图，

$$\because PC=PD=CD,$$

$$\therefore \triangle PCD \text{ 为等边三角形,}$$

$$\therefore \angle PCD=\angle PDC=\angle CPD=60^\circ,$$

$$\therefore \angle 3=\angle 4=120^\circ,$$

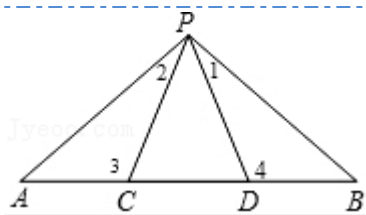
$$\because \angle APB=120^\circ,$$

$$\therefore \angle 1+\angle 2=120^\circ-60^\circ=60^\circ,$$

$$\because \angle PCD=\angle A+\angle 2=60^\circ,$$

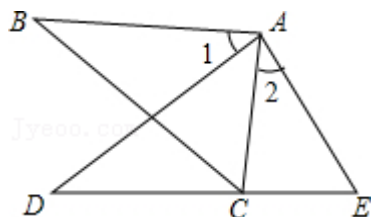
$$\therefore \angle 1=\angle A,$$

$$\therefore \triangle PAC \sim \triangle BPD.$$



【点评】本题考查了相似三角形的判定：有两组角对应相等的两个三角形相似，也考查了等边三角形的判定与性质。

【变式 6-1】如图， $\angle B = \angle D$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 。求证： $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 。



【分析】已经有一对角相等，只需再证一对角相等即可。因为 $\angle 1 = \angle 2$ ，所以 $\angle 1 + \angle DAC = \angle 2 + \angle DAC$ ，即 $\angle BAC = \angle DAE$ 。问题得证。

【解答】证明： $\because \angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle CAD = \angle 2 + \angle CAD$ ，

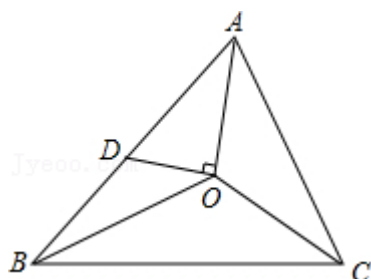
$\therefore \angle BAC = \angle DAE$ ，

又 $\because \angle B = \angle D$ ，

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$ 。

【点评】本题考查了相似三角形的判定。两角法：有两组角对应相等的两个三角形相似，熟记相似三角形的各种判定方法是解题关键。

【变式 6-2】如图， O 是 $\triangle ABC$ 的三条角平分线的交点，过点 O 作 AO 的垂线交 AB 于点 D ，求证： $\triangle OBD \sim \triangle CBO$ 。



【分析】根据三角形内心的性质得 $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle BAC$ ， $\angle 2 = \angle 4$ ， $\angle 3 = \frac{1}{2} \angle ACB$ ，则利用三角形内角和定理

得到 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ ，则 $\angle BOC = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 3) = 90^\circ + \angle 1$ ，再根据三角形外角性质得 $\angle BDO$

$=\angle DOA+\angle 1$ ，于是得到 $\angle BDO=\angle BOC$ ，然后根据有两组角对应相等的两个三角形相似可判断 $\triangle OBD\sim\triangle CBO$ 。

【解答】证明：如图，

$\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的三条角平分线的交点，

$$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC, \angle 2=\angle 4, \angle 3=\frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3=90^{\circ},$$

$$\text{即 } \angle 2+\angle 3=90^{\circ}-\angle 1,$$

$$\text{而 } \angle BOC=180^{\circ}-(\angle 2+\angle 3)=90^{\circ}+\angle 1,$$

$$\therefore \angle BDO=\angle DOA+\angle 1,$$

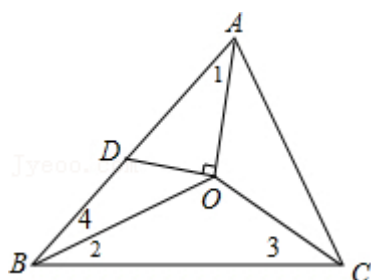
而 $AO\perp OD$ ，

$$\therefore \angle DOA=90^{\circ},$$

$$\therefore \angle BDO=\angle BOC,$$

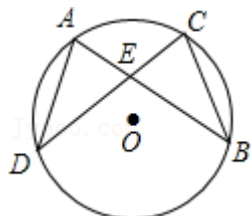
而 $\angle 4=\angle 2$ ，

$$\therefore \triangle OBD\sim\triangle CBO.$$



【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质：有两组角对应相等的两个三角形相似，也考查了三角形的内心的性质。

【变式 6-3】如图， $\odot O$ 中的弦 AB ， CD 相交于点 E ，求证： $\triangle AED\sim\triangle CEB$ 。



【分析】先根据圆周角定理得出 $\angle A=\angle C$ ， $\angle B=\angle D$ ，进而可得出结论。

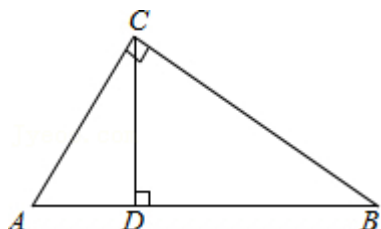
【解答】解： $\because \angle A=\angle C$ ， $\angle B=\angle D$ ，

$$\therefore \triangle AED\sim\triangle CEB.$$

【点评】本题考查的是相似三角形的判定，熟知有两组角对应相等的两个三角形相似是解答此题的关键.

题型 7: 直角三角形相似的判定方法

例题 7. 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是斜边 AB 上高，找出图中的相似三角形，并说明理由.



【分析】根据相似三角形的判定定理及已知即可得到存在的相似三角形.

【解答】解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$

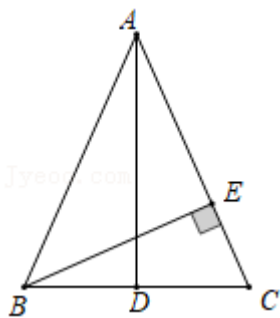
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD$$

$$\triangle ACD \sim \triangle CBD$$

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD.$$

【点评】考查相似三角形的判定定理：（1）两角对应相等的两个三角形相似。（2）两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似。（3）三边对应成比例的两个三角形相似.

【变式 7-1】 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， AD 是顶角 $\angle BAC$ 的角平分线， BE 是腰 AC 边上的高，垂足为点 E . 求证： $\triangle ACD \sim \triangle BCE$.



【分析】根据等腰三角形的性质得到 $AD \perp BC$ ，则 $\angle ADC = 90^\circ$ ，然后根据有两组角对应相等的两个三角形相似得到结论.

【解答】证明： $\because AD$ 是等腰 $\triangle ABC$ 的顶角 $\angle BAC$ 的角平分线，

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$\because BE$ 是腰 AC 边上的高，

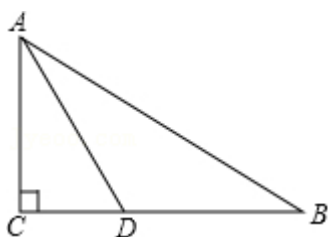
$$\therefore \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACD = \angle BCE, \angle ADC = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE.$$

【点评】本题考查了相似三角形的判定：有两组角对应相等的两个三角形相似．也考查了相似三角形的判定．

【变式 7-2】如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， D 是 BC 上一点，已知 $CD = 1$ ， $AD = \sqrt{5}$ ， $AB = 2\sqrt{5}$ ．求证： $\text{Rt}\triangle ADC \sim \text{Rt}\triangle BAC$ ．



【分析】先根据勾股定理，求得 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $AC = 2$ ， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC = 4$ ，再根据两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似，判定 $\text{Rt}\triangle ADC \sim \text{Rt}\triangle BAC$ ．

【解答】证明： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $CD = 1$ ， $AD = \sqrt{5}$ ，

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \text{ 中，} AC = 2,$$

$$\because \angle C = 90^\circ, AB = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中，} BC = 4,$$

$$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CB} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又} \because \angle DCA = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADC \sim \text{Rt}\triangle BAC.$$

【点评】本题主要考查了相似三角形的判定以及勾股定理的运用，解决问题的关键是掌握：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似．

相似三角形的性质

1. 相似三角形的对应角相等，对应边成比例．
2. 相似三角形对应线段的比等于相似比．

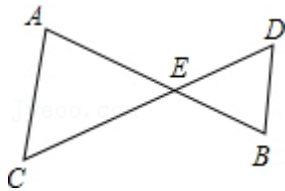
相似三角形的对应高、对应中线、对应角平分线的比等于相似比．

3. 相似三角形周长的比等于相似比

4. 相似三角形面积的比等于相似比的平方

题型 8: 相似三角形的性质

例题 8. 如图, 已知 $\triangle ACE \sim \triangle BDE$, $AC=6$, $BD=3$, $AB=12$, $CD=18$. 求 AE 和 DE 的长.



【分析】根据相似三角形对应边成比例求出 $\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}$, 再求解即可.

【解答】解: $\because \triangle ACE \sim \triangle BDE$,

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE} = \frac{AC}{BD},$$

$$\because AC=6, BD=3,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE} = 2,$$

$$\therefore AE = 12 \times \frac{2}{2+1} = 8,$$

$$DE = 18 \times \frac{1}{1+2} = 6.$$

【点评】本题考查了相似三角形对应边成比例的性质, 熟记性质是解题的关键.

【变式 8-1】已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 6, 8, 10, 和 $\triangle ABC$ 相似的 $\triangle A' B' C'$ 的最长边长 30, 求 $\triangle A' B' C'$ 的另两条边的长、周长及最大角的大小.

【分析】由 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 6, 8, 10, 可判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 又由和 $\triangle ABC$ 相似的 $\triangle A' B' C'$ 的最长边长 30, 可得相似比为 1: 3, 则可求得另两条边的长, 继而求得周长; 然后由相似三角形的对应角相等, 求得最大角的大小.

【解答】解: $\because \triangle ABC$ 的三边长分别为 6, 8, 10, 且 $6^2+8^2=10^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

$\therefore \triangle ABC$ 的最大角是 90° ,

$\because$ 和 $\triangle ABC$ 相似的 $\triangle A' B' C'$ 的最长边长 30,

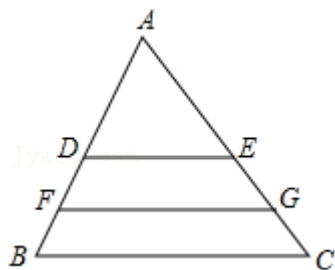
$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle A' B' C'$ 的相似比为: $10: 30=1: 3$,

$\therefore$ 另两条边的长分别为: $6 \times 3=18$, $8 \times 3=24$,

$\therefore$ 周长为: $18+24+30=72$, 最大角为 90° .

【点评】此题考查了相似三角形的性质以及勾股定理的逆定理. 注意相似三角形的对应边成比例、对应角相等.

【变式 8-2】如图, 已知 $\triangle ADE \sim \triangle AFG \sim \triangle ABC$, 且 $\triangle ABC$ 的面积被线段 DE 、 FG 三等分, 其中 $BC=12\text{cm}$, 求线段 DE 和 FG 的长度.



【分析】根据相似三角形面积的比等于相似比的平方分别求解即可.

【解答】解: $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$, 且 $\triangle ABC$ 的面积被线段 DE 、 FG 三等分,

$$\therefore \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } \left(\frac{DE}{12}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } DE = 4\sqrt{3},$$

$\because \triangle AFG \sim \triangle ABC$, 且 $\triangle ABC$ 的面积被线段 DE 、 FG 三等分,

$$\therefore \left(\frac{FG}{BC}\right)^2 = \frac{2}{3},$$

$$\text{即 } \left(\frac{FG}{12}\right)^2 = \frac{2}{3},$$

$$\text{解得 } FG = 4\sqrt{6},$$

答: 线段 DE 和 FG 的长度分别为 $4\sqrt{3}\text{cm}$, $4\sqrt{6}\text{cm}$.

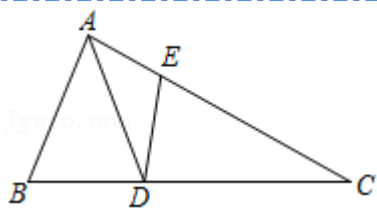
【点评】本题考查了相似三角形的性质, 主要利用了相似三角形面积的比等于相似比的平方.

题型 9: 相似三角形的性质与判定

例题 9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 BC 边上, 点 E 在 AC 边上, 且 $AD=AB$, $\angle DEC = \angle ADB$.

(1) 求证: $\triangle AED \sim \triangle ADC$;

(2) 若 $AE=1$, $EC=3$, 求 AB 的长.



【分析】（1）利用三角形外角的性质及 $\angle DEC = \angle ADB$ 可得出 $\angle ADE = \angle C$ ，结合 $\angle DAE = \angle CAD$ 即可证出 $\triangle AED \sim \triangle ADC$ ；

（2）利用相似三角形的性质可求出 AD 的长，再结合 $AD = AB$ 即可得出 AB 的长.

【解答】（1）证明： $\because \angle DEC = \angle DAE + \angle ADE$ ， $\angle ADB = \angle DAE + \angle C$ ， $\angle DEC = \angle ADB$ ，
 $\therefore \angle ADE = \angle C$.

又 $\because \angle DAE = \angle CAD$ ，

$\therefore \triangle AED \sim \triangle ADC$.

（2） $\because \triangle AED \sim \triangle ADC$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD}, \text{ 即 } \frac{AD}{1+3} = \frac{1}{AD},$$

$\therefore AD = 2$ 或 $AD = -2$ （舍去）.

又 $\because AD = AB$ ，

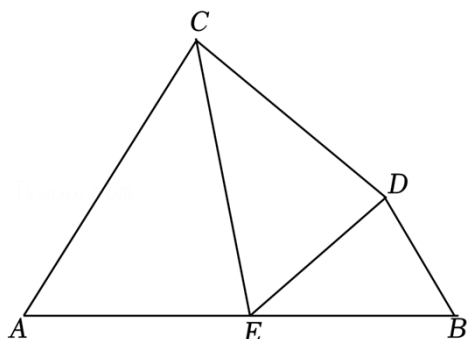
$\therefore AB = 2$.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，解题的关键是：（1）利用“两角对应相等，两三角形相似”证出 $\triangle AED \sim \triangle ADC$ ；（2）利用相似三角形的性质，求出 AD 的长.

【变式 9-1】如图， E 为 AB 上一点， $\angle A = \angle CED = \angle B$ ，连接 CD .

（1）求证： $\triangle CAE \sim \triangle EBD$ ；

（2）若 CE 平分 $\angle ACD$ ， $CD = 6$ ， $BD = 3$ ，求 ED 的长.



【分析】（1）由 $\angle A = \angle CED$ ， $\angle A + \angle ACE = \angle CED + \angle DEB$ ，得 $\angle DEB = \angle ACE$ ，即可推出结论；

（2）证明 $\triangle CDE \sim \triangle EDB$ ，得出比例式求解即可.

【解答】（1）证明： $\because \angle A = \angle CED$ ， $\angle A + \angle ACE = \angle CED + \angle DEB$ ，

$$\therefore \angle DEB = \angle ACE,$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle B,$$

$$\therefore \triangle CAE \sim \triangle EBD;$$

(2) 解: $\because CE$ 平分 $\angle ACD$,

$$\therefore \angle ACE = \angle DCE,$$

由 (1) 知, $\angle DEB = \angle ACE$,

$$\therefore \angle DCE = \angle DEB,$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle CED,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle EDB,$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{DE}{DB},$$

$$\text{即} \frac{6}{DE} = \frac{DE}{3},$$

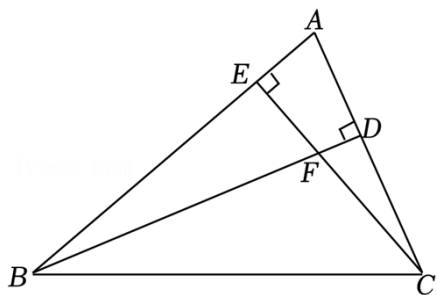
$$\therefore DE = 3\sqrt{2}.$$

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键。

【变式 9-2】如图，已知，在锐角 $\triangle ABC$ 中， BD 和 CE 分别是边 AC 、 AB 上的高。

$$(1) \text{ 求证: } \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{BF};$$

$$(2) \text{ 联结 } AF, \text{ 求证: } AF \cdot BE = BC \cdot EF.$$



【分析】(1) 通过证明 $\triangle AEC \sim \triangle FEB$ ，根据相似三角形的性质可得结论；

(2) 通过证明 $\triangle AEF \sim \triangle CEB$ ，根据相似三角形的性质可得结论。

【解答】证明：(1) $\because BD$ 和 CE 分别是边 AC 、 AB 上的高，

$$\therefore \angle AEC = \angle BDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ACE = 90^\circ = \angle A + \angle ABD,$$

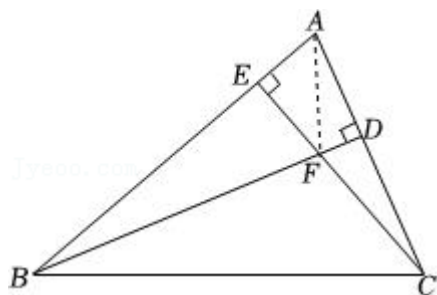
$$\therefore \angle ACE = \angle ABD,$$

又 $\because \angle AEC = \angle BEF = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AEC \sim \triangle FEB$,

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{BF};$$

(2) 如图, 连接 AF ,



$\because \triangle AEC \sim \triangle FEB$,

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{EC}{BE},$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{EF}{BE},$$

又 $\because \angle AEC = \angle FEB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CEB$,

$$\therefore \frac{AF}{BC} = \frac{EF}{BE},$$

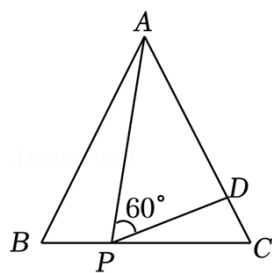
$$\therefore AF \cdot BE = BC \cdot EF.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 掌握相似三角形的判定方法是解题的关键.

【变式 9-3】 如图, 等边三角形 $\triangle ACB$ 的边长为 3, 点 P 为 BC 上的一点, 点 D 为 AC 上的一点, 连接 AP 、 PD , $\angle APD = 60^\circ$.

(1) 求证: $\triangle ABP \sim \triangle PCD$;

(2) 若 $PC = 2$, 求 CD 的长.



【分析】 (1) 由 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 易得 $\angle B = \angle C = 60^\circ$, 又 $\angle APD = 60^\circ$, 由外角性质可得 $\angle DPC$

$=\angle PAB$ ，利用相似三角形的判定定理（AA）可得 $\triangle ABP \sim \triangle PCD$ ；

（2）利用相似三角形的性质可得 $\frac{AB}{PC} = \frac{BP}{CD}$ ，易得 CD ，可得 AD ，再利用 $AP^2 = AD \cdot AC$ ，可得 AP ，从而可得答案．

【解答】（1）证明：①在等边三角形 $\triangle ACB$ 中， $\angle B = \angle C = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle APD = 60^\circ$ ， $\angle APC = \angle PAB + \angle B$ ，

$\therefore \angle DPC = \angle PAB$ ，

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCD$ ；

（2）解： $\because \triangle ABP \sim \triangle PCD$ ， $AB = AC = 3$ ，

$$\therefore \frac{AB}{PC} = \frac{BP}{CD},$$

$$\therefore CD = \frac{BP \cdot PC}{AB} = \frac{2 \times 1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AD = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3},$$

$\because$ 等边三角形 $\triangle ACB$ 的边长为3， $PC = 2$ ， $AP^2 = AD \cdot AC$ ，

$\therefore AB = 3$ ， $BP = 1$ ，

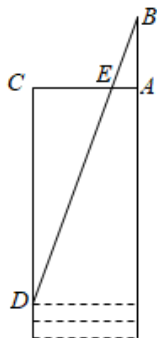
$$\therefore AP = \sqrt{7},$$

$$\therefore CD = \frac{2}{3}.$$

【点评】本题主要考查了相似三角形的性质及判定，由条件证得 $\triangle ABP \sim \triangle PCD$ ， $\triangle ADP \sim \triangle APC$ 是解答此题的关键．

题型 10：相似三角形的应用

例题 10.《九章算术》中记载了一种测量古井水面以上部分深度的办法，如图所示，在井口 A 处立一垂直于井口的木杆 AB ，从木杆的顶端 B 观测井水水岸 D ，视线 BD 与井口的直径 CA 交于点 E ，若测得 $AB = 1$ 米， $AC = 1.6$ 米， $AE = 0.4$ 米，则水面以上深度 CD 为（ ）



A. 4 米

B. 3 米

C. 3.2 米

D. 3.4 米

【分析】由题意知： $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ ，得出对应边成比例即可得出 CD 。

【解答】解：由题意知： $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CDE$ ，

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE},$$

$$\therefore \frac{1}{CD} = \frac{0.4}{1.6-0.4},$$

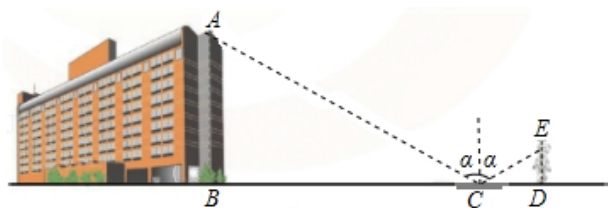
$\therefore$ 解得 $CD=3$ ，

$\therefore$ 水面以上深度 CD 为 3 米。

故选：B。

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，根据题意得出 $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ 是解决问题的关键。

【变式 10-1】小军想出了一个测量建筑物高度的方法：在地面上点 C 处平放一面镜子，并在镜子上做一个标记，然后向后退去，直至站在点 D 处恰好看到建筑物 AB 的顶端 A 在镜子中的像与镜子上的标记重合（如图）。设小军的眼睛距地面 $1.65m$ ， BC 、 CD 的长分别为 $60m$ 、 $3m$ ，求这座建筑物的高度。



【分析】直接利用相似三角形的判定与性质得出 $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}$ ，进而得出 AB 的长。

【解答】解：由题意可得： $\angle ABC = \angle EDC$ ， $\angle ACB = \angle ECD$ ，

故 $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ ，

$$\text{则 } \frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC},$$

$\therefore$ 小军的眼睛距地面 $1.65m$ ， BC 、 CD 的长分别为 $60m$ 、 $3m$ ，

$$\therefore \frac{AB}{1.65} = \frac{60}{3},$$

解得： $AB=33$ ，

答：这座建筑物的高度为 $33m$ 。

【点评】此题主要考查了相似三角形的应用，正确得出比例式是解题关键。

【变式 10-2】如图，直立在 B 处的标杆 $AB=2.9$ 米，小爱站在 F 处，其中眼睛 E ，标杆顶 A ，树顶 C 在同

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/128052022034006077>