

几何综合题“不一样的旋转,不一样的特征”



内容概览

题型一:旋转之全等特性

题型二:旋转之相似特性

题型三:旋转之隐圆本性



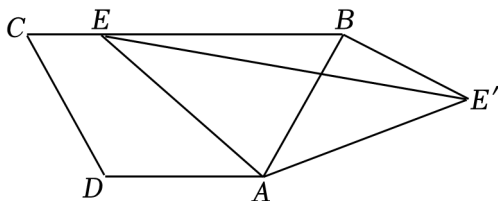
方法清单

题型一:旋转之全等特性

旋转是全等变换之一,其本质特点即为旋转前后的两个图形全等,利用全等性质解决有关线段与角的计算问题,

题目 1 (2023·无锡) 如图,四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 60^\circ$, $AD = AB = 2$, $BC = 4$, E 为射线 CB 上的动点,将线段 AE 绕 A 点顺时针旋转 120° 得到 AE' . 设 $CE = x$, $\triangle BEE'$ 的面积为 S .

- (1) 当 $x = 3$ 时,求 BE' 的长;
- (2) 当 $x \neq 4$ 时,求 S 关于 x 的函数表达式;
- (3) 求 DE' 的最小值.



【分析】(1) 过点 D 作 $DF \parallel AB$ 交 BC 于 F , 连接 AF , 可得四边形 $ABFD$ 是菱形, 则 $\triangle ABF$ 是等边三角形, 由 $x = 3$ 得 $BE = 1$, 则 E 是 BF 的中点, 可得 $AE \perp BC$, 证明 $\triangle ABE' \cong \triangle ADE$, 可得 $BE' = DE$, 即可求解;

(2) 连接 DE , 作 $AF \perp BE$, 可表示出 $AE^2 = EF^2 + AF^2 = (3 - x)^2 + 3 = x^2 - 6x + 12$, 从而得出 $S_{\triangle AEE'} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$(x^2 - 6x + 12) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + 3\sqrt{3}$, 可证得 $\triangle ADE \cong \triangle ABE'$, 从而得出 $S_{\triangle ABE'} = S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot AF = \frac{1}{2}$

$\times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$, 可得出 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}BE \cdot AF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4 - x)$, 从而 $S_{\text{四边形} AEBE'} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ABE'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(4 - x) + \sqrt{3}$, 进一步得出结果;

(3) 将 AB 绕点 A 顺时针旋转 120° 至 AS , 连接 DS , 可证得 $\triangle AEB \cong \triangle AE'S$, 从而得出 $\angle ASE' = \angle ABE = 60^\circ$, 可得出 $\angle DAS = 120^\circ$, $AD = AB = AS = 2$, 从而得出 $\angle ASD = \angle ADS = 30^\circ$, 从而 $\angle DSE' = \angle ASD + \angle ASE' = 90^\circ$, 故当点 E' 在 S 处时, DE' 最小, 从而 $DS = \sqrt{3}AD = 2\sqrt{3}$, 从而得出 DE' 的最小值为: $2\sqrt{3}$.

【解答】解: (1) 如图 1,

作 $AF \parallel CD$, 交 BC 于 F ,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $AFCD$ 是平行四边形,

$\therefore AF = CD = 2$, $CF = AD = 2$,

$\therefore BF = BC - CF = 4 - 2 = 2$,

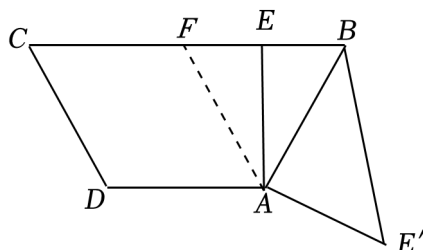


图1

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle ABF \text{ 是等边三角形, } BE = \frac{1}{2}BF = 1, \\
&\therefore \angle BAF = 60^\circ, \angle BAE = \angle FAE = \frac{1}{2}\angle BAF, \\
&\therefore \angle BAE = 30^\circ, AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \sqrt{3}, \\
&\therefore \angle EAE' = 120^\circ, \\
&\therefore \angle BAE' = 90^\circ, \\
&\therefore BE' = \sqrt{AB^2 + AE'^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7};
\end{aligned}$$

(2) (方法一) 如图 2,

连接 AC , 以 A 为圆心, AC 长为半径画弧交 CB 的延长线于 F , 作 $E'G \perp CF$, 交 CB 的延长线于 G ,

$$\begin{aligned}
&\therefore AF = AC, \\
&\therefore \angle ACB = \angle AFC, \\
&\therefore AD = CD = 2, \\
&\therefore \angle ACD = \angle CAD, \\
&\therefore AD \parallel BC, \\
&\therefore \angle ACB = \angle CAD, \\
&\therefore \angle ACB = \angle ACD,
\end{aligned}$$

由 (1) 知: $\angle C = 60^\circ$,

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle AFC = \angle ACB = 30^\circ, \\
&\therefore \angle CAF = 120^\circ, \\
&\therefore \angle CAF = \angle EAE' = 120^\circ, \\
&\therefore \angle CAE = \angle FAE', \\
&\therefore AE = AE',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle ACE \cong \triangle AFE' (SAS), \\
&\therefore E'F = CE = x, \angle AFE' = \angle ACE = 30^\circ, \\
&\therefore \angle BFE' = \angle AFC + \angle AFE' = 60^\circ, \\
&\therefore E'G = \frac{\sqrt{3}}{2}E'F = \frac{\sqrt{3}}{2}x,
\end{aligned}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}BE \cdot E'G = \frac{1}{2}(4-x) \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \sqrt{3}x;$$

(方法二) 如图 3,

连接 DE , 作 $AF \perp BE$,

$$\begin{aligned}
&\therefore BF = 1, AF = \sqrt{3}, \\
&\therefore EF = 2 - x, \\
&\therefore AE^2 = EF^2 + AF^2 = (3-x)^2 + 3 = x^2 - 6x + 12, \\
&\therefore S_{\triangle AEE'} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - 6x + 12) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + 3\sqrt{3}, \\
&\therefore \angle DAB = \angle EAE' = 120^\circ, \\
&\therefore \angle DAE = \angle BAE', \\
&\therefore AD = AB, AE = AE', \\
&\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABE' (SAS), \\
&\therefore S_{\triangle ABE'} = S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot AF = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}, \\
&\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}BE \cdot AF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4-x),
\end{aligned}$$

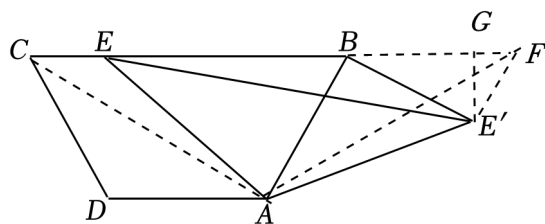


图 2

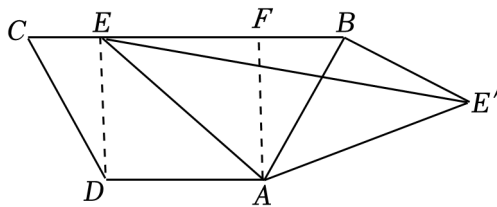


图 3

$$\therefore S_{\text{四边形} AEBE'} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ABE'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4-x) + \sqrt{3},$$

$$\therefore S = S_{\triangle ABE'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4-x) + \sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + 3\sqrt{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \sqrt{3}x,$$

(3) (方法一), 如图 4,

由 (2) 知: $\angle CFE' = 60^\circ$,

$\therefore$ 点 E' 在与过点 F 且与 CF 成 60° 的直线上 l 运动,

作 $AW \perp CF$ 于 W , 作 $DG \perp l$ 于 G , 作 $DH \parallel l$ 交 BF 于 H , 作 $HQ \perp l$ 于 Q , 当点 E' 在 G 处时, DE' 最小,

$\therefore DG = HQ$, $\angle DHC = \angle CFE' = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABC = \angle CFE'$,

由 (2) 知: $CH = BH = 2$,

$\therefore \angle ACF = \angle AFC = 30^\circ$,

$\therefore CF = 2CW = 2 \times \sqrt{3}AW = 6$,

$\therefore FH = CF - CH = 4$,

$\therefore DG = HQ = 4 \cdot \cos \angle AFC = 4 \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$,

$\therefore DE'$ 的最小值为: $2\sqrt{3}$,

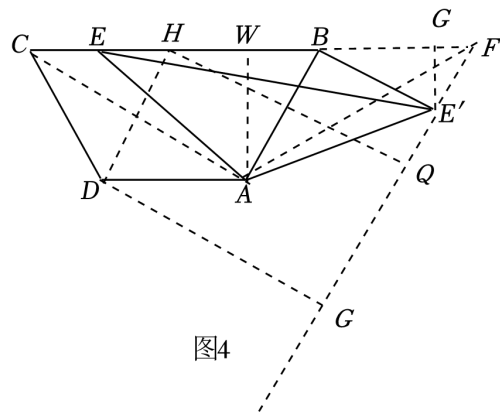


图4

(方法二) 如图 5,

将 AB 绕点 A 顺时针旋转 120° 至 AS , 连接 DS ,

$\therefore \angle BAS = \angle EAE' = 120^\circ$,

$\therefore \angle EAB = \angle E'AS$,

$\therefore AE = AE'$, $AB = AS$,

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AE'S (SAS)$,

$\therefore \angle ASE' = \angle ABE = 60^\circ$,

$\therefore \angle DAB = \angle BAS = 120^\circ$,

$\therefore \angle DAS = 120^\circ$,

$\therefore AD = AB = AS = 2$,

$\therefore \angle ASD = \angle ADS = 30^\circ$,

$\therefore \angle DSE' = \angle ASD + \angle ASE' = 90^\circ$,

$\therefore$ 当点 E' 在 S 处时, DE' 最小,

$\therefore DS = \sqrt{3}AD = 2\sqrt{3}$,

$\therefore DE'$ 的最小值为: $2\sqrt{3}$.

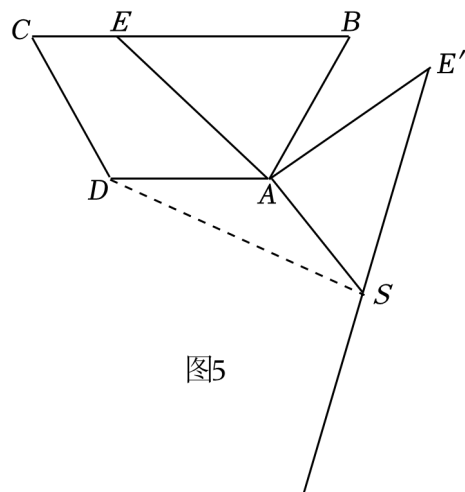


图5

【点评】本题是几何变换综合题,考查了等腰三角形的性质、直角三角形的性质、勾股定理、旋转的性质等知识,解决问题的关键是作辅助线,构造全等三角形.

- 题目 2** (2023·鄱阳县二模)【课本再现】(1) 如图 1, 点 D 在等边 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 连接 AD , 将 $\triangle ABD$ 绕点 A 旋转, 使得旋转后点 B 的对应点为点 C , 得到 $\triangle ACD'$, 连接 DD' , 判断 $\triangle ADD'$ 的形状, 并说明理由;
【类比迁移】(2) 如图 2, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 D 在 $\triangle ABC$ 外, $\angle CDB = 120^\circ$, $AD = 4$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值;
【拓展应用】(3) 如图 3, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 若 $CD \perp BD$ 于点 D , $AD = 4\sqrt{2}$, $CD = 2$, 直接写出 BC 的长.

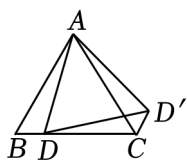


图1

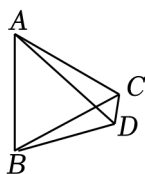


图2

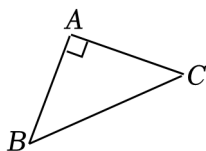


图3

【分析】 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD$, $\triangle ABD \cong \triangle ACD'$, 得出 $AD = AD'$, $\angle BAD = \angle CAD'$, $\angle CAD' + \angle CAD = 60^\circ$, 可证 $\triangle ADD'$ 是等边三角形;

(2) 如图 1, 延长 DB 到点 D' , 使 $AB = AC$, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = AC$, $\angle CDB = 120^\circ$, 根据等量代换 $\angle ACD = \angle ABD'$, $\triangle ABD' \cong \triangle ACD$, $\angle DAD' = 60^\circ$,

当 $AB \perp DD'$ 时, AB 最小, 此时面积最小, 进而求解;

(3) BC 的长为 $2\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{26}$,

如图 2, 延长 DB 至点 D' , 使 $BD' = CD$, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 根据等量代换 $\angle DCA = \angle ABD'$, $\triangle ABD' \cong \triangle ACD$, $\angle DAD' = 90^\circ$, $\triangle DAD'$ 是等腰直角三角形, 根据勾股定理即可求解, 如图 3, 在 BD 上取一点 D' , 使 $BD' = CD$, 同理可得 BC .

【解答】解: (1) $\triangle ADD'$ 是等边三角形,

理由: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 60^\circ$,

依题意可知, $\triangle ABD \cong \triangle ACD'$,

$\therefore AD = AD'$, $\angle BAD = \angle CAD'$,

$\therefore \angle CAD' + \angle CAD = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ADD'$ 是等边三角形;

(2) 如图 1, 延长 DB 到点 D' , 使 $BD' = CD$,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore \angle CDB = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAC + \angle CDB = 180^\circ$,

$\therefore \angle DBA + \angle ACD = 180^\circ$,

$\therefore \angle DBA + \angle ABD' = 180^\circ$,

$\therefore \angle ACD = \angle ABD'$,

$\therefore \triangle ABD' \cong \triangle ACD (SAS)$,

$\therefore AD' = AD = 4$, $\angle DAC = \angle BAD'$,

$\therefore \angle DAD' = 60^\circ$,

当 $AB \perp DD'$ 时, AB 最小, 此时面积最小,

$AB = AD \cdot \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$,

此时 $\triangle ABC$ 面积为: $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$\therefore \triangle ABC$ 面积的最小值为: $3\sqrt{3}$;

(3) BC 的长为 $2\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{26}$,

如图 2, 延长 DB 至点 D' , 使 $BD' = CD$,

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore CD \perp BD$,

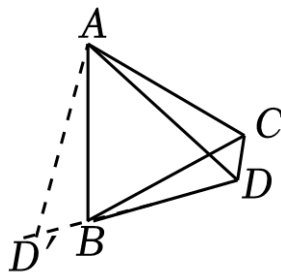


图1

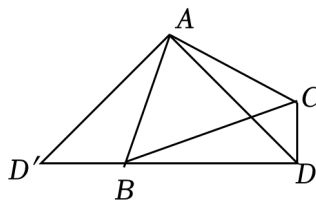


图2

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle BAC + \angle CDB = 180^\circ, \\
&\therefore \angle DBA + \angle ACD = 180^\circ. \\
&\therefore \angle DCA = \angle ABD', \\
&\therefore \triangle ABD' \cong \triangle ACD (SAS), \\
&\therefore AD' = AD = 4\sqrt{2}, \angle DAC = \angle D'AB, \\
&\therefore \angle DAD' = 90^\circ, \\
&\therefore \triangle DAD' \text{ 是等腰直角三角形}, \\
&\therefore DD' = 8, \\
&\therefore CD = 2, \\
&\therefore DB = 8 - 2 = 6, \\
&\therefore BC = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10},
\end{aligned}$$

如图3, 在 BD 上取一点 D' , 使 $BD' = CD$,

$$\text{同理可得 } BC = \sqrt{10^2 + 2^2} = 2\sqrt{26},$$

综上所述, BC 的长为 $2\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{26}$.

【点评】本题考查等边三角形, 等腰直角三角形, 旋转和最值等综合问题, 解题的关键是对问题的分类讨论.

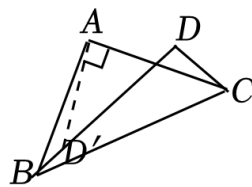


图3

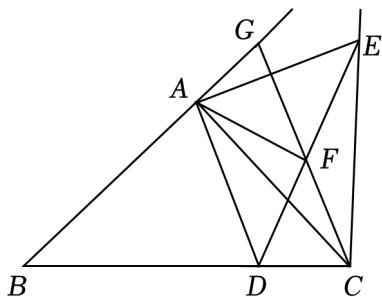
题目 3 (2023·高新区校级四模) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, D 为线段 BC 上一点, 连接 AD , 将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到线段 AE , 作射线 CE .

(1) 求证: $\triangle BAD \cong \triangle CAE$, 并求 $\angle BCE$ 的度数;

(2) 若 F 为 DE 中点, 连接 AF , 连接 CF 并延长, 交射线 BA 于点 G . 当 $BD = 2$, $DC = 1$ 时,

①求 AF 的长;

②直接写出 CG 的长.



【分析】(1) 利用 SAS 证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$, 得 $\angle ABC = \angle ACE = 45^\circ$, 即可解决问题;

(2) ①利用勾股定理求出 DE 的长, 再利用直角三角形斜边上中线的性质可得答案;

②利用等角对等边说明点 F 为 CG 的中点, 再利用直角三角形斜边上中线的性质可得答案.

【解答】(1) 证明: $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\text{又 } \because AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (SAS).$$

$$\text{又 } \because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACB + \angle ACE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ.$$

(2) ①在 $Rt\triangle DCE$ 中, $\because EC = BD = 2$, $DC = 1$,

$$\therefore DE = \sqrt{5},$$

又 $\because F$ 为 DE 中点,

$$\text{则 } AF = \frac{1}{2}DE = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

② 在 $Rt\triangle DCE$ 中, F 为 DE 的中点,

$$\therefore CF = \frac{1}{2}DE = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore CF = AF,$$

$$\therefore \angle FAC = \angle FCA,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FAG = \angle AGC,$$

$$\therefore AF = GF,$$

$$\therefore CG = 2AF = \sqrt{5}.$$

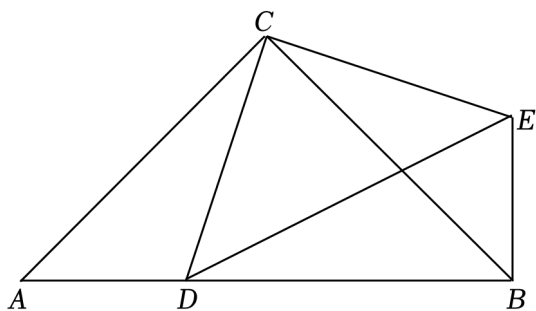
【点评】本题是几何变换综合题,主要考查了等腰直角三角形的性质,全等三角形的判定与性质,勾股定理,直角三角形斜边上中线的性质等知识,熟练掌握直角三角形斜边上中线的性质是解题的关键.

题目 4 (2023·甘孜州) 如图,在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 3\sqrt{2}$, 点 D 在 AB 边上, 连接 CD , 将 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 CE , 连接 BE , DE .

(1) 求证: $\triangle CAD \cong \triangle CBE$;

(2) 若 $AD = 2$ 时, 求 CE 的长;

(3) 点 D 在 AB 上运动时, 试探究 $AD^2 + BD^2$ 的值是否存在最小值, 如果存在, 求出这个最小值; 如果不存在, 请说明理由.



【分析】(1) 由 ASA 即可证明 $\triangle CAD \cong \triangle CBE$;

(2) 证明 $\triangle CAD \cong \triangle CBE(SAS)$, 得到 $DE = \sqrt{BD^2 + BE^2} = 2\sqrt{5}$, 在 $Rt\triangle CDE$ 中, $CE = CD = \frac{DE}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$;

(3) 证明 $AD^2 + BD^2 = 2CD^2 \geq 2 \times 3^2 = 18$, 即可求解.

【解答】(1) 证明: 由题意, 可知 $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, $CA = CB$, $CD = CE$.

$$\therefore \angle ACB - \angle DCB = \angle DCE - \angle DCB.$$

$$\text{即 } \angle ACD = \angle BCE.$$

$$\text{在 } \triangle CAD \text{ 和 } \triangle CBE \text{ 中, } \begin{cases} CA = CB \\ \angle ACD = \angle CBE \\ CD = CE \end{cases}$$

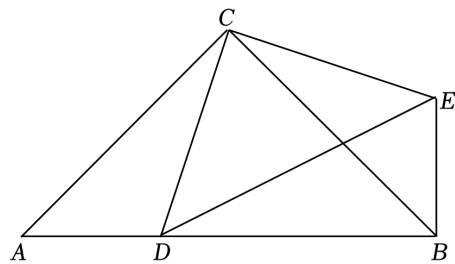
$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle CBE(SAS);$$

(2) 解: $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore \angle CAB = \angle CBA = 45^\circ, AB = \sqrt{2}AC = 6,$$

$$\therefore BD = AB - AD = 6 - 2 = 4.$$

$\because \triangle CAD \cong \triangle CBE(SAS),$
 $\therefore BE = AD = 2, \angle CBE = \angle CAD = 45^\circ,$
 $\therefore \angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = 90^\circ.$
 $\therefore DE = \sqrt{BD^2 + BE^2} = 2\sqrt{5},$
 $\therefore \text{在 } Rt\triangle CDE \text{ 中}, CE = CD = \frac{DE}{\sqrt{2}} = \sqrt{10};$



(3) 解: 存在, 理由:

由(2)可知, $AD^2 + BD^2 = BE^2 + BD^2 = DE^2 = 2CD^2,$
 $\therefore$ 当 CD 最小时, 有 $AD^2 + BD^2$ 的值最小, 此时 $CD \perp AB.$
 $\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,
 $\therefore CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$
 $\therefore AD^2 + BD^2 = 2CD^2 \geq 2 \times 3^2 = 18.$
 即 $AD^2 + BD^2$ 的最小值为 18.

【点评】本题主要考查了图形的几何变换, 涉及到等腰直角三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 勾股定理等知识, 有一定的综合性, 难度适中.

题目 5 (2023·攀枝花) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = 2AC = 8$, $\triangle ABC$ 沿 BC 方向向左平移得到 $\triangle DCE$, A 、 C 对应点分别是 D 、 E . 点 F 是线段 BE 上的一个动点, 连接 AF , 将线段 AF 绕点 A 逆时针旋转至线段 AG , 使得 $\angle BAD = \angle FAG$, 连接 FG .

- (1) 当点 F 与点 C 重合时, 求 FG 的长;
- (2) 如图 2, 连接 BG 、 DF . 在点 F 的运动过程中:
 - ① BG 和 DF 是否总是相等? 若是, 请你证明; 若不是, 请说明理由;
 - ② 当 BF 的长为多少时, $\triangle ABG$ 能构成等腰三角形?

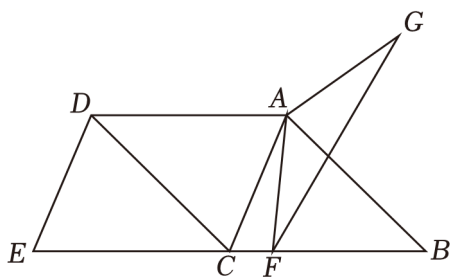


图 1

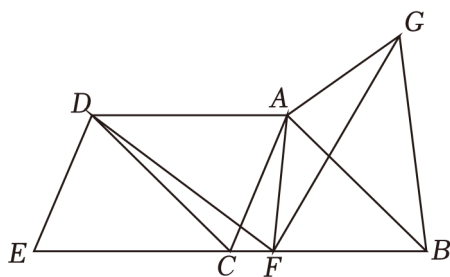


图 2

【分析】(1) 根据平移的性质可得四边形 $ABCD$ 、四边形 $ACED$ 是平行四边形, 再由已知推导出 AB 是 $\angle CAG$ 的平分线, 由等腰三角形的性质可得 $AB \perp CG$, 过 B 点作 $BH \perp AC$ 交于 H 点, 求出 $BH = 2\sqrt{15}$,

再由 $\sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{15}}{8} = \frac{\frac{1}{2}CG}{4}$, 所以 $CG = FG = 2\sqrt{15}$;

(2) ① 证明 $\triangle ABG \cong \triangle ADF(SAS)$, 则 $DF = BG$;

② 过点 A 作 $AN \perp BC$ 交于 N , 由等积法可得 $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{15} = \frac{1}{2} \times 8AN$, 求出 $AN = \sqrt{15}$, 分三种情况讨论: 当 $AG = AB$ 时, $AG = AF = 8$; 当 F 点与 B 点重合时, $AF = 8$, 此时 $BF = 0$, 当 $BF = 2BN$ 时, $AF = 8$, 在 $Rt\triangle ABN$ 中, $BN = 7$, 可得 $BF = 14$; 当 $AG = BG$ 时, $DF = AF$, 过点 F 作 $FM \perp AD$ 交于 M , 所以 $AM = FN = 4$, 能求出 $CN = 1$, $CF = 3$, 则 $BF = 11$; 当 $BA = BG$ 时, $DC = DF$, 当 F 点在 BE 上时, $CD = DF$, 此时 C 点与 F 点重合, 此时 $BF = BC = 8$.

【解答】(1) 当 F 点与 C 点重合时, $AF = AC$,
 由平移可知, $CD = AB$, $CD \parallel AB$,

∴ 四边形 $ABCD$ 、四边形 $ACED$ 是平行四边形,

∴ $AD = BC$, $AD \parallel BC$,

∴ $\angle BAD = \angle FAG$,

∴ $\angle DAF = \angle FAG$,

∴ $AB = BC$,

∴ $\angle BAC = \angle ACB$,

∴ $\angle DAC = \angle ACB$,

∴ $\angle DAC = \angle BAC = \angle BAG$,

∴ AB 是 $\angle CAG$ 的平分线,

∴ $AC = AG$,

∴ $AB \perp CG$,

如图 1, 过 B 点作 $BH \perp AC$ 交于 H 点,

∴ $AB = BC = 2AC = 8$,

∴ $AH = 2$,

∴ $BH = 2\sqrt{15}$,

∴ $\sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{15}}{8} = \frac{\frac{1}{2}CG}{4}$,

∴ $CG = FG = 2\sqrt{15}$;

(2) ① $DF = BG$, 理由如下:

如图 2, ∵ $AG = AF$, $\angle DAF = \angle BAG$, $AB = AD$,

∴ $\triangle ABG \cong \triangle ADF (SAS)$,

∴ $DF = BG$;

② 如图 2, 过点 A 作 $AN \perp BC$ 交于 N ,

由 ① 可知 $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{15} = \frac{1}{2} \times 8AN$,

∴ $AN = \sqrt{15}$,

当 $AG = AB$ 时,

∴ $AB = BC = 8$,

∴ $AG = 8$,

∴ $AG = AF$,

∴ $AF = 8$,

当 F 点与 B 点重合时, $AF = 8$, 此时 $BF = 0$,

当 $BF = 2BN$ 时, $AF = 8$, 在 $Rt\triangle ABN$ 中, $BN = \sqrt{64 - 15} = 7$,

∴ $BF = 14$;

当 $AG = BG$ 时, $AF = BG$,

∴ $DF = BG$,

∴ $DF = AF$,

过点 F 作 $FM \perp AD$ 交于 M ,

∴ $AM = DM = 4$,

∴ $FM \perp AD$, $AN \perp BC$,

∴ $AM = FN = 4$,

∴ $BN = 7$,

∴ $CN = 1$,

$\therefore CF = 3$,
 $\therefore BF = 11$;
 当 $BA = BG$ 时,
 $\therefore DF = BG$,
 $\therefore AB = DF$,
 $\therefore AB = CD = BC = AD$,
 $\therefore DC = DF$,
 当 F 点在 BE 上时, $CD = DF$, 此时 C 点与 F 点重合,
 $\therefore BF = BC = 8$;
 综上所述: BF 的长为 14 或 11 或 8 或 0.

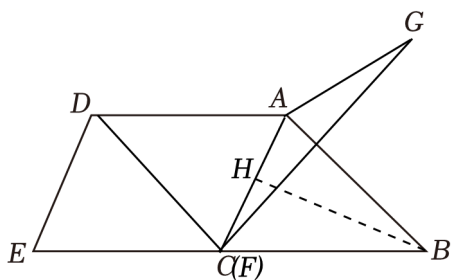


图 1

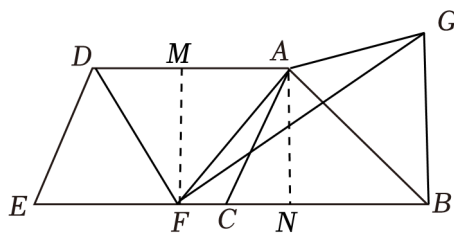


图 2

【点评】本题考查几何变换的综合应用, 熟练掌握三角形平移的性质, 旋转的性质, 三角形全等的判定及性质, 等腰三角形的性质, 分类讨论是解题的关键.

题目 6 (2023·重庆) 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$ 于点 D , E 为线段 AD 上一动点 (不与 A, D 重合), 连接 BE, CE , 将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到线段 CF , 连接 AF .

- (1) 如图 1, 求证: $\angle CBE = \angle CAF$;
- (2) 如图 2, 连接 BF 交 AC 于点 G , 连接 DG, EF , EF 与 DG 所在直线交于点 H , 求证: $EH = FH$;
- (3) 如图 3, 连接 BF 交 AC 于点 G , 连接 DG, EG , 将 $\triangle AEG$ 沿 AG 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内, 得到 $\triangle APG$, 将 $\triangle DEG$ 沿 DG 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内, 得到 $\triangle DQG$, 连接 PQ, QF . 若 $AB = 4$, 直接写出 $PQ + QF$ 的最小值.

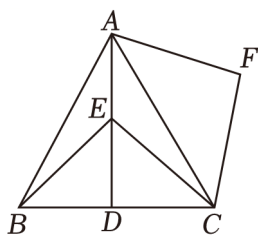


图1

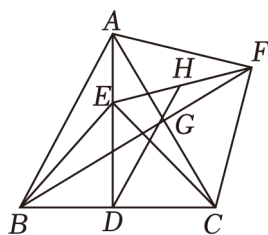


图2

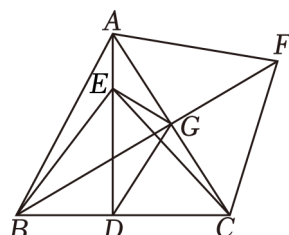


图3

【分析】(1) 根据旋转的性质得出 $CE = CF$, $\angle ECF = 60^\circ$, 进而证明 $\triangle BCE \cong \triangle ACF$ (SAS), 即可得证;
 (2) 过点 F 作 $FK \parallel AD$, 交 DH 点的延长线于点 K , 连接 EK, FD , 证明四边形 $EDFK$ 是平行四边形, 即可得证;
 (3) 如图所示, 延长 AP, DQ 交于点 R , 由 (2) 可知 $\triangle DCG$ 是等边三角形, 根据折叠的性质可得 $\angle PAG = \angle EAG = 30^\circ$, $\angle QDG = \angle EDG = 30^\circ$, 进而得出 $\triangle ADR$ 是等边三角形, 由 (2) 可得 $Rt\triangle CED \cong Rt\triangle CFG$, 得出四边形 $GDQF$ 是平行四边形, 则 $QF = DC = \frac{1}{2}AC = 2$, 进而得出 $\angle PGQ = 360^\circ - 2\angle AGD = 120^\circ$, 则 $PQ = \sqrt{3}PG = \sqrt{3}GQ$, 当 GQ 取得最小值时, 即 $GQ \perp DR$ 时, PQ 取得最小值, 即可求解.

【解答】(1) 证明: $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore \angle ACB = 60^\circ, AC = BC,$
 $\therefore$ 将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到线段 $CF,$
 $\therefore CE = CF, \angle ECF = 60^\circ,$
 $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle BCA = \angle ECF,$
 $\therefore \angle BCE = \angle ACF,$
 $\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACF (SAS),$
 $\therefore \angle CBE = \angle CAF;$

(2) 证明: 如图所示, 过点 F 作 $FK \parallel AD$, 交 DH 点的延长线于点 K , 连接 EK, FD ,

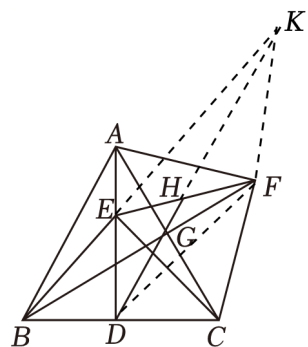
$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,
 $\therefore AB = AC = BC,$
 $\therefore AD \perp BC,$
 $\therefore BD = CD,$
 $\therefore AD$ 垂直平分 $BC,$
 $\therefore EB = EC,$
 又 $\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACF,$
 $\therefore AF = BE, CF = CE,$
 $\therefore AF = CF,$
 $\therefore F$ 在 AC 的垂直平分线上,
 $\therefore AB = BC,$
 $\therefore B$ 在 AC 的垂直平分线上,
 $\therefore BF$ 垂直平分 $AC,$
 $\therefore AC \perp BF, AG = CG = \frac{1}{2}AC,$

$\therefore \angle AGF = 90^\circ,$
 又 $\therefore DG = \frac{1}{2}AC = CG, \angle ACD = 60^\circ,$
 $\therefore \triangle DCG$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle CGD = \angle CDG = 60^\circ,$
 $\therefore \angle AGH = \angle DGC = 60^\circ,$
 $\therefore \angle KGF = \angle AGF - \angle AGH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$
 又 $\therefore \angle ADK = \angle ADC - \angle GDC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, KF \parallel AD,$
 $\therefore \angle HKF = \angle ADK = 30^\circ,$
 $\therefore \angle FKG = \angle KGF = 30^\circ,$
 $\therefore FG = FK,$

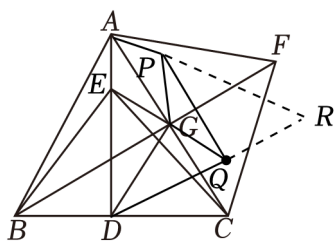
在 $Rt\triangle CED$ 与 $Rt\triangle CGF$ 中, $\begin{cases} CF = CE \\ CD = CG \end{cases},$

$\therefore Rt\triangle CED \cong Rt\triangle CFG,$
 $\therefore GF = ED,$
 $\therefore ED = FK,$
 $\therefore$ 四边形 $EDFK$ 是平行四边形,
 $\therefore EH = HF;$

解法二: 连接 CH , 证明 $\angle CHE = 90^\circ$, 可得结论.



(3) 解:依题意,如图所示,延长 AP , DQ 交于点 R ,



由(2)可知 $\triangle DCG$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle EDG = 30^\circ,$$

$\therefore$ 将 $\triangle AEG$ 沿 AG 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内,得到 $\triangle APG$,将 $\triangle DEG$ 沿 DG 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内,得到 $\triangle DQG$,

$$\therefore \angle PAG = \angle EAG = 30^\circ, \angle QDG = \angle EDG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle PAE = \angle QDE = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ADR$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle QDC = \angle ADC - \angle ADQ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

由(2)可得 $Rt\triangle CED \cong Rt\triangle CFG$,

$$\therefore DE = GF,$$

$$\therefore DE = DQ,$$

$$\therefore GF = DQ,$$

$$\therefore \angle GBC = \angle QDC = 30^\circ,$$

$$\therefore GF \parallel DQ,$$

$\therefore$ 四边形 $GDQF$ 是平行四边形,

$$\therefore QF = DG = \frac{1}{2}AC = 2,$$

由(2)可知 G 是 AC 的中点,则 $GA = GD$,

$$\therefore \angle GAD = \angle GDA = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AGD = 120^\circ,$$

$\therefore$ 折叠,

$$\therefore \angle AGP + \angle DGQ = \angle AGE + \angle DGE = \angle AGD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle PGQ = 360^\circ - 2\angle AGD = 120^\circ,$$

又 $PG = GE = GQ$,

$$\therefore PQ = \sqrt{3}PG = \sqrt{3}GQ,$$

$\therefore$ 当 GQ 取得最小值时,即 $GQ \perp DR$ 时, PQ 取得最小值,此时如图所示,

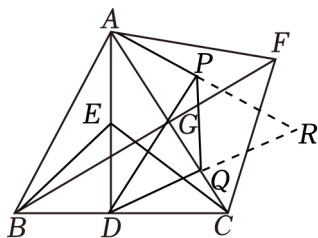


图3

$$\therefore GQ = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}DC = 1,$$

$$\therefore PQ = \sqrt{3},$$

$$\therefore PQ + QF = \sqrt{3} + 2.$$

12

【解答】(1) 解: $\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 4$,

$$\therefore BC = 4\sqrt{2},$$

$$\because AH \perp BC, AB = AC,$$

$$\therefore BH = CH = 2\sqrt{2} = AH,$$

$\because$ 点 D 为 CH 中点,

$$\therefore DH = CD = \sqrt{2},$$

$$\therefore AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{8 + 2} = \sqrt{10},$$

$\because$ 将 AD 绕着 D 点逆时针方向旋转 90° 得到 DE ,

$$\therefore AD = DE, \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = \sqrt{2}AD = 2\sqrt{5};$$

(2) 证明: 如图 2, 过点 D 作 $DH \perp BC$ 交 AB 于点 H ,

$$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ, BC = \sqrt{2}AC,$$

$$\because DH \perp BC,$$

$$\therefore \angle BHD = \angle DBH = 45^\circ, \angle BDH = 90^\circ,$$

$$\therefore BD = DH, \angle AHD = 135^\circ,$$

$$\therefore BH = \sqrt{2}BD,$$

$\because$ 将 AD 绕着 D 点逆时针方向旋转 90° 得到 DE ,

$$\therefore AD = DE, \angle ADE = 90^\circ = \angle BDH,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle EDB,$$

$$\therefore \triangle ADH \cong \triangle EDB (SAS),$$

$$\therefore AH = BE, \angle DBE = \angle DHA = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = 90^\circ = \angle CAP,$$

$$\text{又} \because AB = AC, \angle BAE = \angle ACP,$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle ACP (ASA),$$

$$\therefore AP = BE,$$

$$\therefore AP = BE = AH,$$

$$\therefore AB = AP + \sqrt{2}BD;$$

(3) 解: 如图 3, 在 AE 上截取 $AN' = AN$, 连接 MN' ,

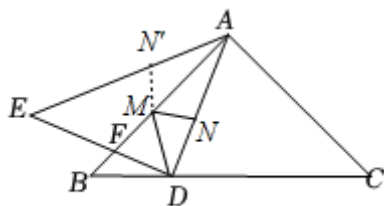


图3

$$\because AB \text{ 平分 } \angle EAD,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle BAE = 22.5^\circ,$$

$$\text{又} \because AM = AM,$$

$$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AMN' (SAS),$$

$$\therefore MN = MN',$$

$$\therefore DM + MN = DM + MN',$$

$\therefore$ 当点 M , 点 N' , 点 D 三点共线, 且 $DM \perp AE$ 时, $DM + MN$ 有最小值,

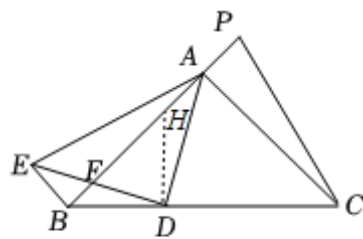


图2

如图4,

$$\because DM \perp AE, DE = AD,$$

$$\therefore \angle ADM = \angle EDM = 45^\circ,$$

$\because$ 折叠,

$$\therefore DQ \perp BK, \angle BKD = \angle BKQ,$$

$$\therefore \angle DKQ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BKD = \angle BKQ = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle AMK = \angle ADM + \angle BAD = \angle BKD + \angle KBA,$$

$$\therefore \angle KBA = \angle ADM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle KBD = \angle ABK + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore KB \perp BD,$$

$$\text{又} \because DQ \perp BK,$$

$$\therefore \text{点 } B, \text{点 } Q, \text{点 } D \text{ 三点共线},$$

$\because$ 折叠,

$$\therefore DQ = 2BD,$$

$$\therefore \angle BAD = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = 67.5^\circ, \angle ADC = \angle ABC + \angle BAD = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ADC,$$

$$\therefore AC = DC,$$

$$\therefore BD = BC - CD = \sqrt{2}AC - AC,$$

$$\therefore DQ = 2BD = 2\sqrt{2}AC - 2AC,$$

$$\therefore \frac{DQ}{BC} = \frac{2\sqrt{2}AC - 2AC}{\sqrt{2}AC} = 2 - \sqrt{2}.$$

【点评】本题是几何变换综合题,考查了全等三角形的判定和性质,等腰直角三角形的性质,旋转的性质,勾股定理等知识,添加恰当辅助线构造全等三角形是解题的关键.

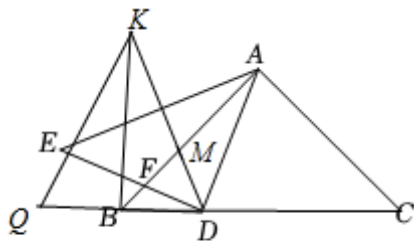


图4

题目 8 (2023·邹城市校级二模) $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 是等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, $AC = BC$, $CD = CE$.

【观察猜想】当 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 按如图1所示的位置摆放,连接 BD 、 AE ,延长 BD 交 AE 于点 F ,猜想线段 BD 和 AE 有怎样的数量关系和位置关系.

【探究证明】如图2,将 $\triangle DCE$ 绕着点 C 顺时针旋转一定角度 $\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$,线段 BD 和线段 AE 的数量关系和位置关系是否仍然成立? 如果成立,请证明;如果不成立,请说明理由.

【拓展应用】如图3,在 $\triangle ACD$ 中, $\angle ADC = 45^\circ$, $CD = \sqrt{2}$, $AD = 4$,将 AC 绕着点 C 逆时针旋转 90° 至 BC ,连接 BD ,求 BD 的长.

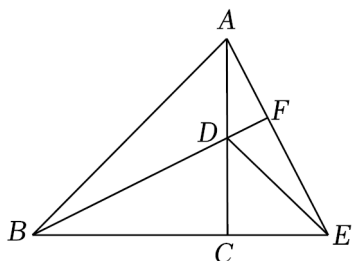


图1

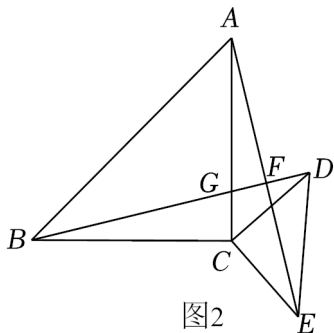


图2

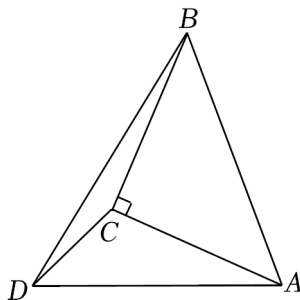


图3

【分析】【观察猜想】根据 SAS 推出 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$, 根据全等三角形的性质得出 $\angle CAE = \angle CBD$, 根据

$\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ 求出 $\angle CAE + \angle AEC = 90^\circ$, 求出 $\angle DBC + \angle BEF = 90^\circ$, 根据三角形内角和定理求出 $\angle BFE = 90^\circ$ 即可;

【探究证明】根据 SAS 推出 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$, 根据全等三角形的性质得出 $\angle CAE = \angle CBD$, 根据 $\angle ACB = 90^\circ$ 求出 $\angle CBD + \angle CGB = 90^\circ$, 求出 $\angle CAE + \angle AGF = 90^\circ$, 根据三角形内角和定理求出 $\angle BFA = 90^\circ$ 即可;

【拓展应用】在 CD 的左侧以 C 为直角顶点作等腰直角 $\triangle CDE$, 连接 AE , 则 $\angle DCE = 90^\circ$, $CE = CD = \sqrt{2}$, $\angle CDE = 45^\circ$, 可得 $\angle ADE = \angle ADC + \angle CDE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, 由勾股定理可得 $DE = \sqrt{CD^2 + CE^2} = 2$, $AE = \sqrt{DE^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, 由旋转得 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 由【探究证明】知 $BD = AE$, 即可得 BD 的长.

【解答】解:【观察猜想】 $AE \perp BD$, $AE = BD$,

证明: 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中, $\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACE = \angle BCD \\ CE = CD \end{cases}$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD (SAS)$,

$\therefore AE = BD$, $\angle CAE = \angle CBD$,

$\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAE + \angle AEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAE = \angle CBD$, $\angle AEC = \angle BEF$,

$\therefore \angle DBC + \angle BEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BFE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,

$\therefore AE \perp BD$;

【探究证明】线段 BD 和线段 AE 的数量关系和位置关系仍然成立,

证明: $\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACB + \angle ACD = \angle DCE + \angle ACD$,

即 $\angle ACE = \angle BCD$,

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中, $\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACE = \angle BCD \\ CE = CD \end{cases}$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD (SAS)$,

$\therefore AE = BD$, $\angle CAE = \angle CBD$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBD + \angle CGB = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAE = \angle CBD$, $\angle AGF = \angle CGB$,

$\therefore \angle CAE + \angle AGF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BFA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,

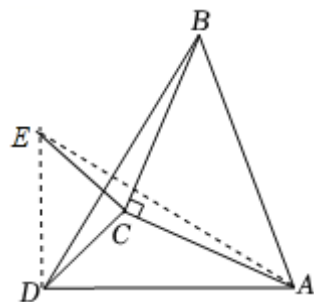
$\therefore AE \perp BD$;

【拓展应用】如图, 在 CD 的左侧以 C 为直角顶点作等腰直角 $\triangle CDE$, 连接 AE ,

$\therefore \angle DCE = 90^\circ$, $CE = CD = \sqrt{2}$, $\angle CDE = 45^\circ$,

$\therefore DE = \sqrt{CD^2 + CE^2} = 2$,

$\therefore \angle ADC = 45^\circ$,



$$\therefore \angle ADE = \angle ADC + \angle CDE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = \sqrt{DE^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$\therefore$ 将 AC 绕着点 C 逆时针旋转 90° 至 BC ,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, AC = BC,$$

由【探究证明】知 $BD = AE$,

$$\therefore BD = 2\sqrt{5}.$$

【点评】本题是几何变换综合题,考查了等腰直角三角形的性质,旋转的性质,全等三角形的判定和性质,勾股定理,证明 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ 是本题的关键.

题目 9 (2023·随州)1643年,法国数学家费马曾提出一个著名的几何问题:给定不在同一条直线上的三个点 A, B, C ,求平面上到这三个点的距离之和最小的点的位置,意大利数学家和物理学家托里拆利给出了分析和证明,该点也被称为“费马点”或“托里拆利点”,该问题也被称为“将军巡营”问题.

(1)下面是该问题的一种常见的解决方法,请补充以下推理过程:(其中①处从“直角”和“等边”中选择填空,②处从“两点之间线段最短”和“三角形两边之和大于第三边”中选择填空,③处填写角度数,④处填写该三角形的某个顶点)

当 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 120° 时,

如图1,将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'C$,连接 PP' ,

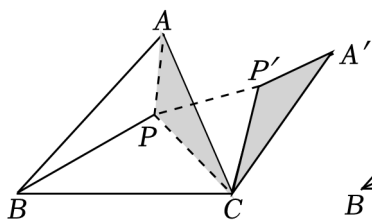
由 $PC = P'C$, $\angle PCP' = 60^\circ$,可知 $\triangle PCP'$ 为 等边 三角形,故 $PP' = PC$,又 $P'A' = PA$,故 $PA + PB + PC = P'A' + PB + PP' \geq A'B$,

由 两点之间线段最短 可知,当 B, P, P', A' 在同一条直线上时, $PA + PB + PC$ 取最小值,如图2,最小值为 $A'B$,此时的 P 点为该三角形的“费马点”,

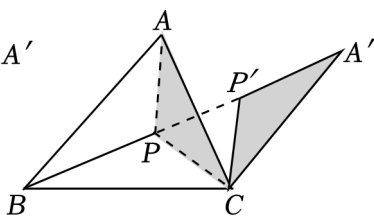
且有 $\angle APC = \angle BPC = \angle APB =$ 120° ;

已知当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 120° 时,“费马点”为该三角形的某个顶点.如图3,若 $\angle BAC \geq 120^\circ$,则该三角形的“费马点”为 A 点.

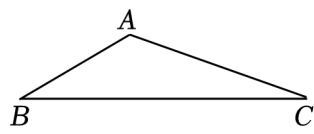
(2)如图4,在 $\triangle ABC$ 中,三个内角均小于 120° ,且 $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle ACB = 30^\circ$,已知点 P 为 $\triangle ABC$ 的“费马点”,求 $PA + PB + PC$ 的值;



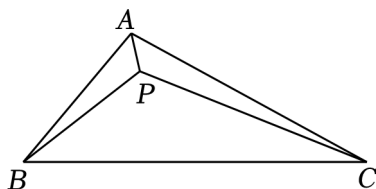
(图1)



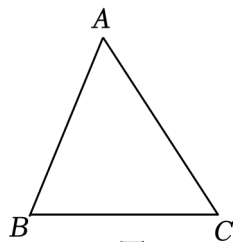
(图2)



(图3)



(图4)



(图5)

(3)如图5,设村庄 A, B, C 的连线构成一个三角形,且已知 $AC = 4\text{km}$, $BC = 2\sqrt{3}\text{km}$, $\angle ACB = 60^\circ$. 现欲建一中转站 P 沿直线向 A, B, C 三个村庄铺设电缆,已知由中转站 P 到村庄 A, B, C 的铺设成本分别为 a

元/km, a 元/km, $\sqrt{2}a$ 元/km, 选取合适的 P 的位置, 可以使总的铺设成本最低为 _____ 元. (结果用含 a 的式子表示)

【分析】(1) 根据旋转的性质和两点之间线段最短进行推理分析后即可得出结论, 然后填空即可;

(2) 根据 (1) 的方法将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'C$, 即可得出可知当 B, P, P', A' 在同一条直线上时, $PA + PB + PC$ 取最小值, 最小值为 $A'B$, 再根据 $\angle ACB = 30^\circ$ 可证明 $\angle BCA' = 90^\circ$, 根据勾股定理即可求出 $A'B$;

(3) 根据总铺设成本 $= a(PA + PB + \sqrt{2}PC)$, 将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'P'C$, 得到等腰直角 $\triangle PP'C$, 推出 $PP' = \sqrt{2}PC$, 即可得出当 B, P, P', A' 在同一条直线上时, $P'A' + PB + PP'$ 取最小值, 即 $PA + PB + \sqrt{2}PC$ 取最小值为 $A'B$ 的长, 然后根据已知条件和旋转的性质求出 $A'B$ 即可.

【解答】解: (1) $\because PC = P'C, \angle PCP' = 60^\circ$,

$\therefore \triangle PCP'$ 为等边三角形,

$\therefore PP' = PC, \angle P'PC = \angle PP'C = 60^\circ$,

又 $\because P'A' = PA$,

$\therefore PA + PB + PC = PA' + PB + PP' \geq A'B$,

根据两点之间线段最短可知, 当 B, P, P', A' 在同一条直线上时, $PA + PB + PC$ 取最小值, 最小值为 $A'B$, 此时的 P 点为该三角形的“费马点”,

$\therefore \angle BPC + \angle P'PC = 180^\circ, \angle A'PC + \angle PP'C = 180^\circ$,

$\therefore \angle BPC = 120^\circ, \angle A'PC = 120^\circ$,

$\therefore$ 将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'C$,

$\therefore \triangle APC \cong \triangle A'P'C$,

$\therefore \angle APC = \angle A'P'C = 120^\circ$,

$\therefore \angle APB = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$,

$\therefore \angle APC = \angle BPC = \angle APB = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAC \geq 120^\circ$,

$\therefore BC > AC, BC > AB$,

$\therefore BC + AB > AC + AB, BC + AC > AB + AC$,

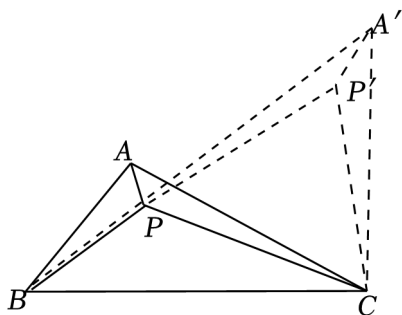
$\therefore$ 三个顶点中顶点 A 到另外两个顶点的距离和最小,

又 $\because$ 已知当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 120° 时, “费马点”为该三角形的某个顶点,

$\therefore$ 该三角形的“费马点”为点 A .

故答案为: 等边; 两点之间线段最短; 120° ; A ;

(2) 如图 4, 将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'C$, 连接 PP' ,



(图4)

由 (1) 可知当 B, P, P', A' 在同一条直线上时, $PA + PB + PC$ 取最小值, 最小值为 $A'B$,

$\therefore \angle ACP = \angle A'CP'$,

$$\therefore \angle ACP + \angle BCP = \angle A'CP' + \angle BCP = \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle PCP' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCA' = 90^\circ,$$

根据旋转的性质可知: $AC = A'C = 3$,

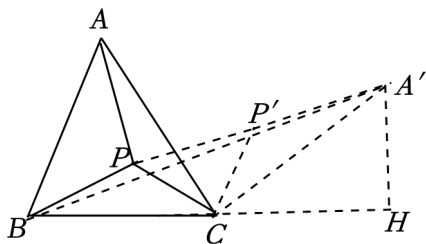
$$\therefore A'B = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

即 $PA + PB + PC$ 的最小值为 5;

$$(3) \because \text{总铺设成本} = PA \times a + PB \times a + PC \times \sqrt{2}a = a(PA + PB + \sqrt{2}PC),$$

$\therefore$ 当 $PA + PB + \sqrt{2}PC$ 最小时, 总铺设成本最低,

将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'P'C$, 连接 PP' , $A'B$,



(图5)

由旋转性质可知: $P'C = PC$, $\angle PCP' = \angle ACA' = 90^\circ$, $P'A' = PA$, $A'C = AC = 4\text{km}$,

$$\therefore PP' = \sqrt{2}PC,$$

$$\therefore PA + PB + \sqrt{2}PC = P'A' + PB + PP',$$

当 B, P, P', A' 在同一条直线上时, $P'A' + PB + PP'$ 取最小值,

即 $PA + PB + \sqrt{2}PC$ 取最小值为 $A'B$,

过点 A' 作 $A'H \perp BC$ 于 H ,

$$\because \angle ACB = 60^\circ, \angle ACA' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A'CH = 30^\circ,$$

$$\therefore A'H = \frac{1}{2}A'C = 2\text{km},$$

$$\therefore HC = \sqrt{A'C^2 - A'H^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}(\text{km}),$$

$$\therefore BH = BC + CH = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}(\text{km}),$$

$$\therefore A'B = \sqrt{A'H^2 + BH^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2\sqrt{13}(\text{km}),$$

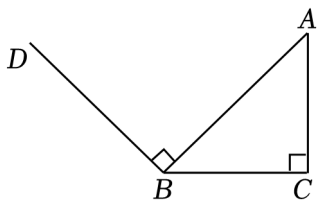
即 $PA + PB + \sqrt{2}PC$ 的最小值为 $2\sqrt{13}\text{km}$,

总铺设成本为: 总铺设成本 $= a(PA + PB + \sqrt{2}PC) = 2\sqrt{13}a(\text{元})$.

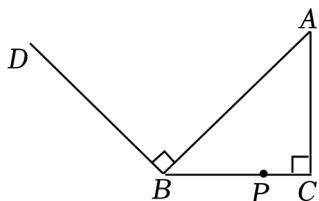
故答案为: $2\sqrt{13}a$.

【点评】本题是几何变换综合题, 主要考查旋转的性质, 全等三角形的判定和性质, 两点之间线段最短以及等边三角形的性质, 深入理解题意是解决问题的关键.

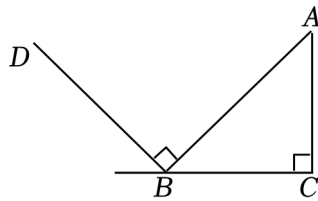
题目 10 (2023·贵州) 如图①, 小红在学习了三角形相关知识后, 对等腰直角三角形进行了探究, 在等腰直角三角形 ABC 中, $CA = CB$, $\angle C = 90^\circ$, 过点 B 作射线 $BD \perp AB$, 垂足为 B , 点 P 在 CB 上.



图①



图②



图③

(1)【动手操作】

如图②,若点 P 在线段 CB 上,画出射线 PA ,并将射线 PA 绕点 P 逆时针旋转 90° 与 BD 交于点 E ,根据题意在图中画出图形,图中 $\angle PBE$ 的度数为 135 度;

(2)【问题探究】

根据(1)所画图形,探究线段 PA 与 PE 的数量关系,并说明理由;

(3)【拓展延伸】

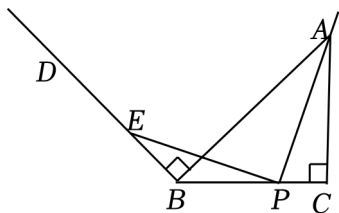
如图③,若点 P 在射线 CB 上移动,将射线 PA 绕点 P 逆时针旋转 90° 与 BD 交于点 E ,探究线段 BA , BP , BE 之间的数量关系,并说明理由.

【分析】(1) 根据题意画出图形,由 $CA = CB$, $\angle C = 90^\circ$, 得 $\angle ABC = 45^\circ$, 而 $BD \perp AB$, 即得 $\angle PBE = \angle ABC + \angle ABD = 135^\circ$;

(2) 过 P 作 $PM \parallel AB$ 交 AC 于 M , 证明 $\triangle PCM$ 是等腰直角三角形, 得 $CP = CM$, $\angle PMC = 45^\circ$, 即可证 $\triangle APM \cong \triangle PEB(ASA)$, 故 $PA = PE$;

(3) 当 P 在线段 BC 上时, 过 P 作 $PM \parallel AB$ 交 AC 于 M , 结合(2)可得 $AB = \sqrt{2}BP + BE$; 当 P 在线段 CB 的延长线上时, 过 P 作 $PN \perp BC$ 交 BE 于 N , 证明 $\triangle BPN$ 是等腰直角三角形, 可得 $\angle ABP = 135^\circ$, $BP = NP$, $BN = \sqrt{2}BP$, $\angle PNB = 45^\circ$, 即可证 $\triangle EPN \cong \triangle APB(ASA)$, $EN = BA$, 根据 $BE = EN + BN$, 即得 $BE = BA + \sqrt{2}BP$.

【解答】解: (1) 画出图形如下:



$$\because CA = CB, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\because BD \perp AB,$$

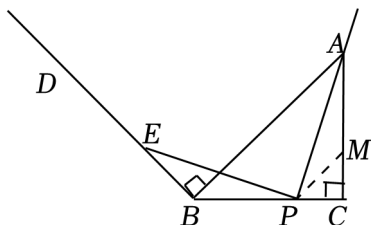
$$\therefore \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PBE = \angle ABC + \angle ABD = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ;$$

故答案为: 135;

(2) $PA = PE$, 理由如下:

过 P 作 $PM \parallel AB$ 交 AC 于 M , 如图:



$$\therefore \angle MPC = \angle ABC = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle PCM$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CP = CM, \angle PMC = 45^\circ,$$

$$\therefore CA - CM = CB - CP, \text{ 即 } AM = BP, \angle AMP = 135^\circ = \angle PBE,$$

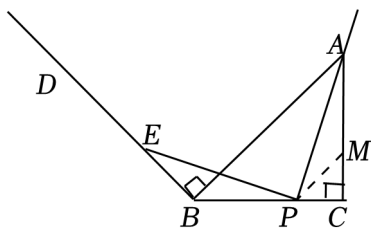
$$\because \angle APE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPB = 90^\circ - \angle APC = \angle PAC,$$

$$\therefore \triangle APM \cong \triangle PEB(ASA),$$

$$\therefore PA = PE;$$

(3) 当 P 在线段 BC 上时, 过 P 作 $PM \parallel AB$ 交 AC 于 M , 如图:



由 (2) 可知, $BE = PM$, $BP = AM$,

$$\therefore AB = \sqrt{2}(AM + CM),$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}BP + \sqrt{2}CM,$$

$$\therefore PM = \sqrt{2}CM,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}BP + BE;$$

当 P 在线段 CB 的延长线上时, 过 P 作 $PN \perp BC$ 交 BE 于 N , 如图:

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ, \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PBN = 180^\circ - \angle ABC - \angle ABD = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle BPN \text{ 是等腰直角三角形, } \angle ABP = 135^\circ,$$

$$\therefore BP = NP, BN = \sqrt{2}BP, \angle PNB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PNE = 135^\circ = \angle ABP,$$

$$\therefore \angle APE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPN = 90^\circ - \angle APN = \angle APB,$$

$$\therefore \triangle EPN \cong \triangle APB(ASA),$$

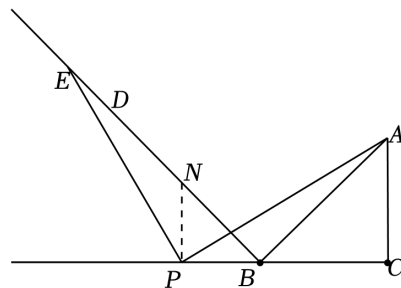
$$\therefore EN = BA,$$

$$\therefore BE = EN + BN,$$

$$\therefore BE = BA + \sqrt{2}BP;$$

综上所述, 当 P 在线段 BC 上时, $AB = \sqrt{2}BP + BE$; 当 P 在线段 CB 的延长线上时, $BE = BA + \sqrt{2}BP$.

【点评】本题考查几何变换综合应用, 涉及等腰直角三角形, 旋转变换, 全等三角形的判定与性质等知识, 解题的关键是作辅助线, 构造全等三角形解决问题.



题目 11 (2023·辽宁) $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 E 是射线 BC 上的一点 (不与点 B, C 重合), 连接 AE , 在 AE 的左侧作等边三角形 AED , 将线段 EC 绕点 E 逆时针旋转 120° , 得到线段 EF , 连接 BF , 交 DE 于点 M .

(1) 如图 1, 当点 E 为 BC 中点时, 请直接写出线段 DM 与 EM 的数量关系;

(2) 如图 2, 当点 E 在线段 BC 的延长线上时, 请判断 (1) 中的结论是否成立? 若成立, 请写出证明过程; 若不成立, 请说明理由;

(3) 当 $BC = 6$, $CE = 2$ 时, 请直接写出 AM 的长.

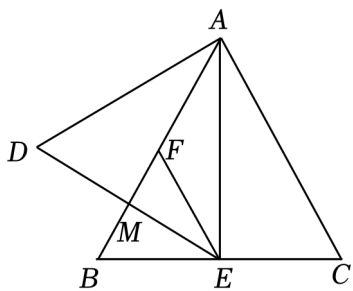


图1

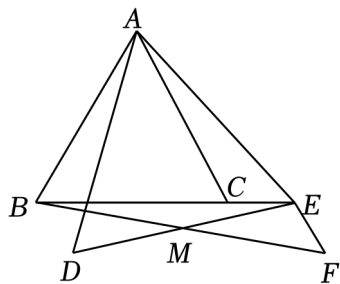
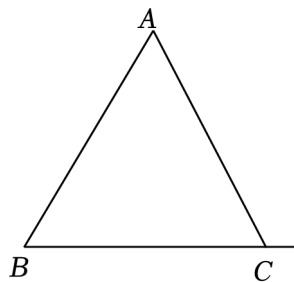


图2



备用图 ?

【分析】(1) 可证得 $\angle BAD = \angle BAE = 30^\circ$, 进一步得出结果;

(2) 连接 BD , 可证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$, 从而 $\angle ABD = \angle ACE = 120^\circ$, $BD = CE$, 进而得出 $\angle DBE = 60^\circ$, 从而得出 $\angle DBE + \angle BEF = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, 从而 $BD \parallel EF$, 结合 $BD = EF$ 得出四边形 $BDFE$ 是平行四边形, 从而得出 $DM = EM$;

(3) 分为两种情形: 当点 E 在 BC 的延长线上时, 作 $AG \perp BC$ 于 G , 可得出 $CG = 3$, $AG = 3\sqrt{3}$, 从而 $EG = CG + CE = 3 + 2 = 5$, 进而得出 $AE = 2\sqrt{13}$, 进一步得出结果; 当点 E 在 BC 上时, 作 $AG \perp BC$ 于 G , 可得出 $EG = 1$, $AE = 2\sqrt{7}$, 进一步得出结果.

【解答】解: (1) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, 点 E 是 BC 的中点,

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ, \angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAE = 30^\circ,$$

$\because \triangle ADE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle DAE - \angle BAE = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE,$$

$$\therefore DM = EM;$$

(2) 如图 1,

$DM = EM$ 仍然成立, 理由如下:

连接 BD ,

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = \angle DAE = \angle ACB = 60^\circ, AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (SAS),$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ, BD = CE,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle ABD - \angle ABC = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE + \angle BEF = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore BD \parallel EF,$$

$$\therefore CE = EF,$$

$$\therefore BD = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $BDFE$ 是平行四边形,

$$\therefore DM = EM;$$

(3) 如图 2,

当点 E 在 BC 的延长线上时,

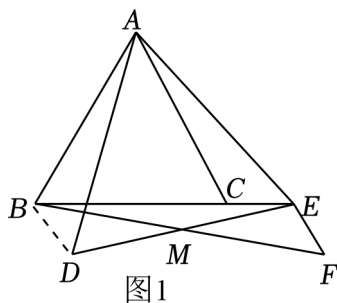


图1

作 $AG \perp BC$ 于 G ,

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore CG = AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}AC = 3,$$

$$AG = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore EG = CG + CE = 3 + 2 = 5,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AG^2 + EG^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 5^2} = 2\sqrt{13},$$

由 (2) 知: $DM = EM$,

$$\therefore AM \perp DE,$$

$$\therefore \angle AME = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = 60^\circ,$$

$$\therefore AM = AE \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{13} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{39},$$

如图 3,

当点 E 在 BC 上时,

作 $AG \perp BC$ 于 G ,

$$\text{由上知: } AG = 3\sqrt{3}, CG = 3,$$

$$\therefore EG = CG - CE = 3 - 2 = 1,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AG^2 + EG^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore AM = 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{21},$$

综上所述: $AM = \sqrt{39}$ 或 $\sqrt{21}$.

【点评】本题考查了等边三角形的性质,全等三角形的判定和性质,平行四边形的判定和性质,直角三角形的性质等知识,解决问题的关键是熟练掌握“手拉手”等模型.

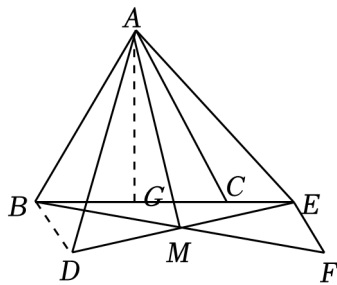


图2

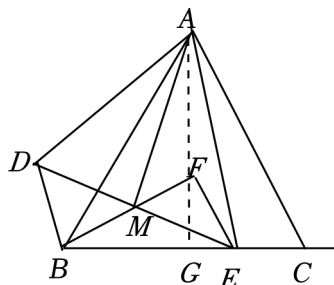


图3

题目 12 (2023·辽宁) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$, 点 O 为 AB 的中点, 点 D 在直线 AB 上 (不与点 A, B 重合), 连接 CD , 线段 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° , 得到线段 CE , 过点 B 作直线 $l \perp BC$, 过点 E 作 $EF \perp l$, 垂足为点 F , 直线 EF 交直线 OC 于点 G .

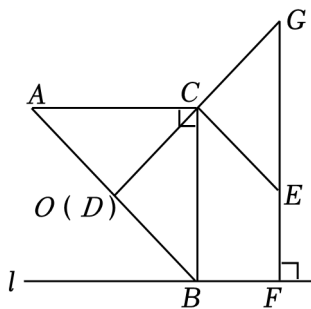


图1

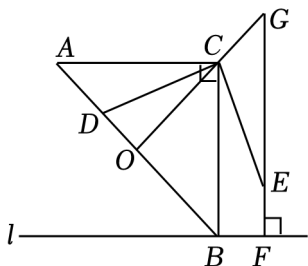
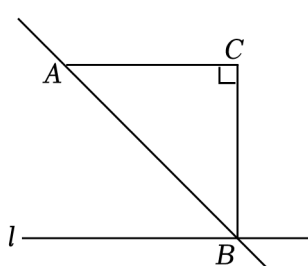


图2



备用图

(1) 如图 1, 当点 D 与点 O 重合时, 请直接写出线段 AD 与线段 EF 的数量关系;

(2) 如图 2, 当点 D 在线段 AB 上时, 求证: $CG + BD = \sqrt{2}BC$;

(3) 连接 DE , $\triangle CDE$ 的面积记为 S_1 , $\triangle ABC$ 的面积记为 S_2 , 当 $EF:BC = 1:3$ 时, 请直接写出 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值.

【分析】(1) 连接 BE , 由 $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$, 得 $\angle A = 45^\circ$, 根据线段 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° , 得到线段 CE , 有 $CD = CE$, $\angle DCE = 90^\circ$, 可得 $\triangle BCE \cong \triangle ACD (SAS)$, 从而 $BE = AD$, $\angle A = \angle CBE = 45^\circ$, 知 $\triangle BEF$ 是等腰直角三角形, $BE = \sqrt{2}EF$, 故 $AD = \sqrt{2}EF$;

(2) 由 $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$, O 为 AB 的中点, 得 $\angle COB = 90^\circ$, $AB = \sqrt{2}BC$, 证明 $\triangle CEG \cong \triangle DCA$ (AAS), 得 $CG = AD$, 根据 $AD + BD = AB$, 即得 $CG + BD = \sqrt{2}BC$;

(3) 由 $EF:BC = 1:3$, 设 $EF = m$, 则 $BC = AC = 3m$, 分两种情况: 当 D 在线段 AB 上时, 延长 AC 交 GF 于 K , 由 $\triangle CEG \cong \triangle DCA$, 得 $GE = AC = 3m$, 而四边形 $BCKF$ 是矩形, 有 $KF = BC = 3m$, $\angle CKG = 90^\circ$, 根据勾股定理可得 $CE^2 = CK^2 + KE^2 = m^2 + (2m)^2 = 5m^2$, 故 $S_1 = \frac{1}{2}CD \cdot CE = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{5m^2}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{9m^2}{2}$, 即得 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{9}$; 当 D 在射线 BA 上时, 延长 EG 交 AC 于 T , 同理可得 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{17}{9}$.

【解答】(1) 解: $AD = \sqrt{2}EF$, 理由如下:

连接 BE , 如图:

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$,

$\therefore \angle A = 45^\circ$,

$\because$ 线段 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° , 得到线段 CE ,

$\therefore CD = CE$, $\angle DCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCE = 90^\circ - \angle BCD = \angle ACD$,

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD$ (SAS),

$\therefore BE = AD$, $\angle A = \angle CBE = 45^\circ$,

$\because$ 直线 $l \perp BC$,

$\therefore \angle EBF = 45^\circ$,

$\therefore \triangle BEF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore BE = \sqrt{2}EF$,

$\therefore AD = \sqrt{2}EF$;

(2) 证明: 如图,

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$, O 为 AB 的中点,

$\therefore \angle COB = 90^\circ$, $AB = \sqrt{2}BC$,

$\because \angle BFG = 90^\circ$,

$\therefore \angle G = 360^\circ - \angle COB - \angle OBF - \angle BFG = 45^\circ = \angle A$,

$\because BC \perp$ 直线 l , $EF \perp$ 直线 l ,

$\therefore BC \parallel GF$,

$\therefore \angle CEG = \angle BCE$,

$\because \angle BCE = 90^\circ - \angle BCD = \angle ACD$,

$\therefore \angle CEG = \angle ACD$,

$\because CE = CD$,

$\therefore \triangle CEG \cong \triangle DCA$ (AAS),

$\therefore CG = AD$,

$\because AD + BD = AB$,

$\therefore CG + BD = \sqrt{2}BC$;

(3) 解: 由 $EF:BC = 1:3$, 设 $EF = m$, 则 $BC = AC = 3m$,

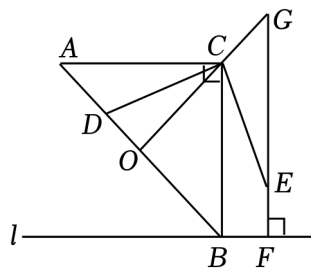
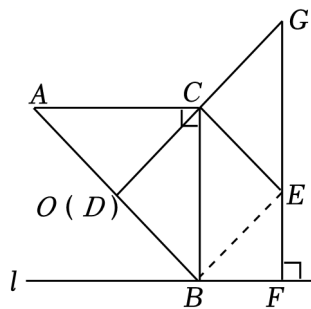
当 D 在线段 AB 上时, 延长 AC 交 GF 于 K , 如图:

由 (2) 知 $\triangle CEG \cong \triangle DCA$,

$\therefore GE = AC = 3m$,

$\because \angle CBF = \angle BFE = \angle BCK = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $BCKF$ 是矩形,



$$\begin{aligned}
&\therefore KF = BC = 3m, \angle CKG = 90^\circ, \\
&\therefore KE = KF - EF = 2m, \\
&\therefore GK = GE - KE = m, \\
&\therefore \angle G = 45^\circ, \\
&\therefore CK = GK = m, \\
&\therefore CE^2 = CK^2 + KE^2 = m^2 + (2m)^2 = 5m^2, \\
&\therefore S_1 = \frac{1}{2} CD \cdot CE = \frac{1}{2} CE^2 = \frac{5m^2}{2}, \\
&\therefore AC = BC = 3m, \\
&\therefore S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{9m^2}{2}, \\
&\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{9};
\end{aligned}$$

当 D 在射线 BA 上时, 延长 EG 交 AC 于 T , 如图:

$$\begin{aligned}
&\text{同理可得 } BC = AC = EG = 3m, \\
&\therefore FG = EG - EF = 2m, \\
&\therefore TF = BC = 3m, \\
&\therefore TG = TF - FG = m, \\
&\therefore \angle ACB = 90^\circ, CA = CB, O \text{ 为 } AB \text{ 的中点}, \\
&\therefore \angle AOC = 45^\circ, \\
&\therefore BC \parallel EF, \\
&\therefore \angle ETC = 90^\circ, \\
&\therefore CT = TG = m, \\
&\therefore CE^2 = CT^2 + TE^2 = m^2 + (m + 3m)^2 = 17m^2, \\
&\therefore S_1 = \frac{17m^2}{2}, \\
&\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{17}{9};
\end{aligned}$$

综上所述, $\frac{S_1}{S_2}$ 的值为 $\frac{5}{9}$ 或 $\frac{17}{9}$.

【点评】本题考查等腰直角三角形中的旋转问题, 涉及三角形全等的判定性质, 矩形的判定与性质, 三角形面积等知识, 解题的关键是分类讨论思想的应用.

题型二: 旋转之相似特性

将一个几何图形绕着它的一个顶点作旋转相似变换时, 一定会出现新的相似. 利用新的相似图形的性质解决有关线段与角的计算问题, 这是行之有效的常用方法.

题目 13 (2023·锦州) 【问题情境】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle ACB = \alpha$, 点 D 在边 BC 上. 将线段 DB 绕点 D 顺时针旋转得到线段 DE (旋转角小于 180°), 连接 BE , CE , 以 CE 为底边在其上方作等腰三角形 FEC , 使 $\angle FCE = \alpha$, 连接 AF .

【尝试探究】

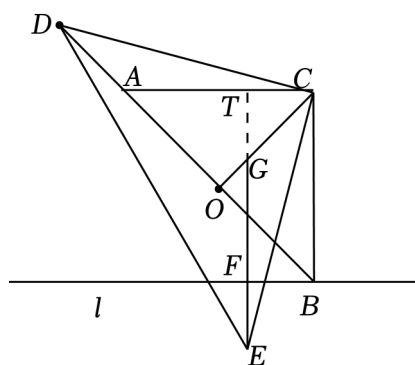
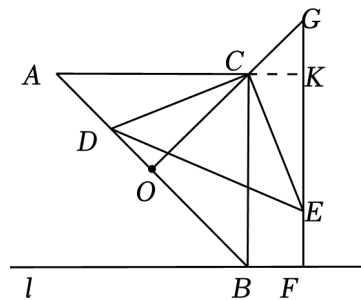
(1) 如图 1, 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 易知 $AF = BE$;

如图 2, 当 $\alpha = 45^\circ$ 时, 则 AF 与 BE 的数量关系为 $BE = \sqrt{2}AF$;

(2) 如图 3, 写出 AF 与 BE 的数量关系 (用含 α 的三角函数表示), 并说明理由;

【拓展应用】

(3) 如图 4, 当 $\alpha = 30^\circ$ 且点 B, E, F 三点共线时. 若 $BC = 4\sqrt{7}$, $BD = \frac{1}{5}BC$, 请直接写出 AF 的长.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/128061036077006044>