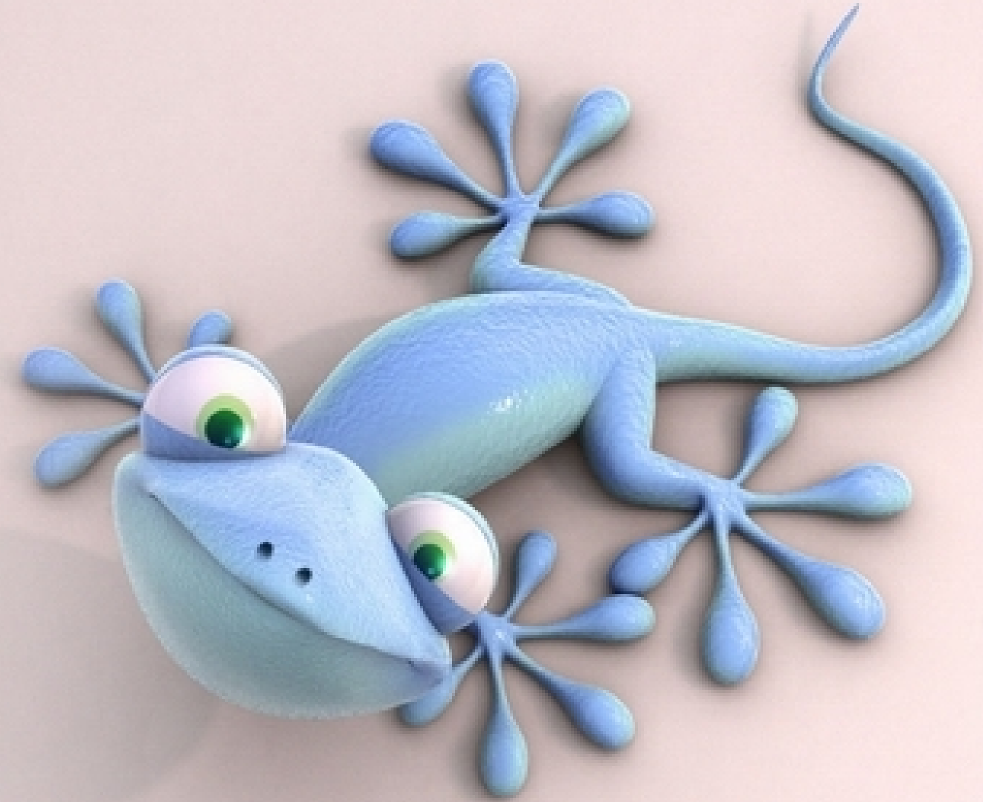


傅立叶Fourier变换方法-资料

反之， 中等间隔 离散函数 的傅立叶变换为

可见： ， n为任意整数,

即 $g(k)$为 k 空间中以$\frac{2\pi}{\Delta x}$为周期的函数。

其逆变换为

离散函数 f_i的谱是周期谱

在 k 空间中以 为间隔可划分无限多个周期带。我们称不同周期带中的模 互为重影 (aliasing)。

重影的产生源于离散化过程中丢失了信息，虚线所含信息超出了f能提供的信息，应舍弃，通常取 $|k| \leq \frac{\pi}{\Delta x}$

截止波长为 $2\Delta x$

称为本带，之外所有周期带称为短波带。

$\frac{\pi}{2\Delta x}$ 模和 $\frac{5\pi}{2\Delta x}$ 模互为重影，两个模在离散点上具有相同行为，无法由离散采样加以区分

注意：无限区间的离散函数的谱为本带中的连续谱。

若f_i以N为周期，即 $f_i = f_{i+N}$，则谱在本带中为离散值。

其中

相应地，

即为定义在有限空间（或周期）离散函数 的傅立叶变换

由于$g_m = g_{m+N}$，可见g_m既具有离散性，也具有周期性。其离散性是由f_i的周期性决定，其周期性是由f_i的离散性决定。

傅立叶变换：

逆变换：

可推广到多维（如2D）

求和上下限的变化利用了其周期性

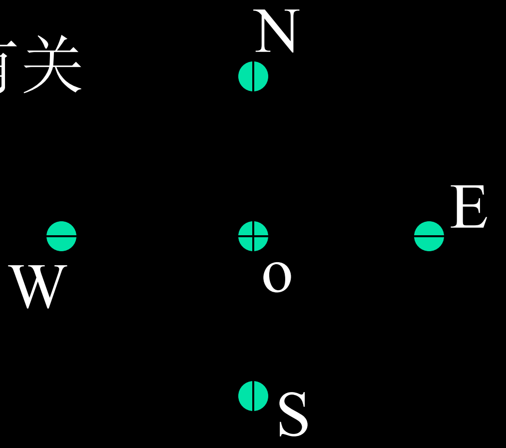
对一维，其计算量约N^2个复运算，采用FFT， 则降为$N\log_2 N$。故$N=2^m$。

（二）傅立叶方法

若系数是均匀的，则可对上式快速直接求解

均匀问题：所有系数与 j, l 无关

半均匀问题：所有系数仅与 j 或仅与 l 有关



1 均匀问题

如矩形解域、均匀网格下常系数线性椭圆型方程

例：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=s(x,y)$ 若采用正方形网格

则

边界条件

(1)固定边界：

(2)自由边界：

(3)周期边界：

分为单周期和双周期边界条件

或

当 φ_B和 ψ_B不为0，则称为非齐次边界条件，否则为齐次边界条件。

非齐次问题很容易化为齐次边界条件，方法如下：

任取一离散函数，φ 它在边界上的取值为 φ_B

令 ，则 满足齐次方程及如下差分方程

其中

特别地，若 很小，可简单地取 的内点值为0

非边界邻点处 ，边界邻点处

1.1 双周期边界条件

在其两边分别乘 ，再对下标 $j\,(1 \quad M)$ 及 $l\,(1 \quad N)$ 求和

其中
$$\tilde{f}_{m,n} = \sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} f_{j,l}\, e^{i\frac{2\pi mj}{M}} e^{i\frac{2\pi nl}{N}}$$
$$\tilde{s}_{m,n} = \sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} s_{j,l}\, e^{i\frac{2\pi mj}{M}} e^{i\frac{2\pi nl}{N}}$$

其反变换为

计算步骤

1　通过快速傅立叶变换由 $s_{j,l}$ 求 $\tilde{s}_{m,n}$

2　利用 $A_{m,n}\tilde{f}_{m,n}=\tilde{s}_{m,n}$ 求 $\tilde{f}_{m,n}$

3　通过快速傅立叶反变换由 $\tilde{f}_{m,n}$ 求 $f_{j,l}$

计算量为

当　　　　时，