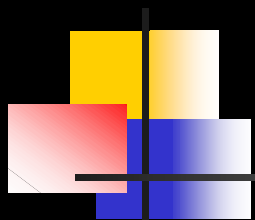


傅立叶Fourier变换方 法-资料



反之，中等间隔 Δx 离散函数 f 的傅立叶变换为

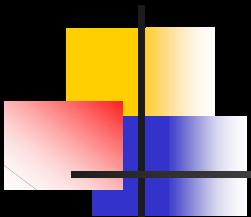
$$g(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j e^{ikx_j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j e^{ij\Delta x}$$

可见： $g(k) = g(k + \frac{2n\pi}{\Delta x})$ ， n 为任意整数，

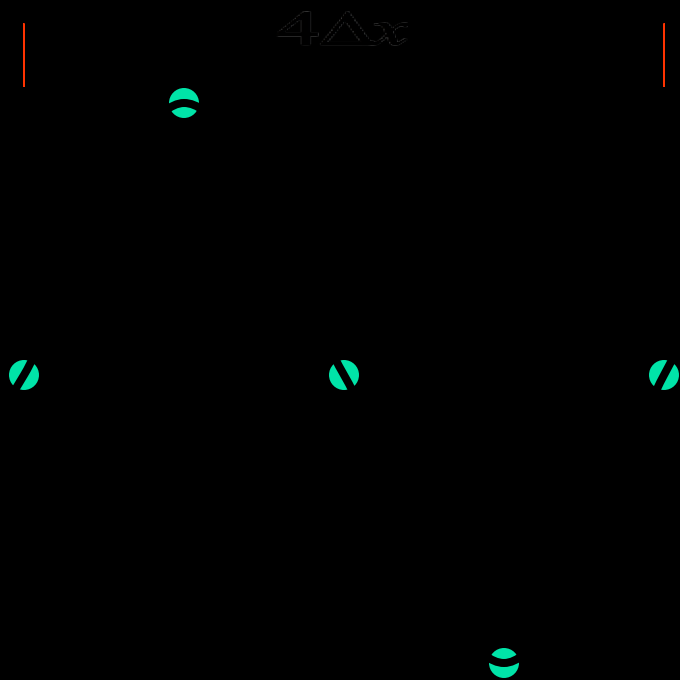
即 $g(k)$ 为 k 空间中以 $\frac{2\pi}{\Delta x}$ 为周期的函数。

其逆变换为 $f_i = \frac{\Delta x}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Delta x}} g(k) e^{-ikx_i} dk$

离散函数 f_i 的谱是周期谱



在 k 空间中以 $\frac{\pi}{\Delta x}$ 为间隔可划分无限多个周期带。我们称不同周期带中的模 $g(k)$ 互为重影 (aliasing)。



重影的产生源于离散化过程中丢失了信息，虚线所含信息超出了 f 能提供的信息，应舍弃，通常取 $|k| \leq \frac{\pi}{\Delta x}$

截止波长为 $2\Delta x$

称为本带，之外所有周期带称为短波带。

$\frac{\pi}{2\Delta x}$ 模和
 $\frac{5\pi}{2\Delta x}$ 模
样加以区分

模互为重影，两个模在离散点上具有相同行为，无法由离散采



注意：无限区间的离散函数的谱为本带中的连续谱。

若 f 以 N 为周期，即 $f_i = f_{i+N}$ ，则谱在本带中为离散值。

$$k_m = \frac{2\pi m}{N\Delta x} \quad \text{其中} \quad -\left[\frac{N+1}{2}\right] + 1 \leq m \leq \left[\frac{N}{2}\right]$$

相应地，

$$g_m = \sum_{j=1}^N f_j e^{ik_m j \Delta x} = \sum_{j=1}^N f_j e^{j \frac{2\pi m j}{N}}$$

即为定义在有限空间（或周期）离散函数 f 的傅立叶变换

由于 $g_m = g_{m+N}$ ，可见 g_m 既具有离散性，也具有周期性。其离散性是由 f 的周期性决定，其周期性是由 f 的离散性决定。 4

傅立叶变换:

$$g_m = \sum_{j=1}^N f_j e^{i \frac{2\pi m j}{N}}$$

逆变换:

$$f_j = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} g_m e^{-i \frac{2\pi m j}{N}}$$

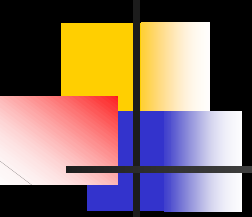
可推广到多维 (如2D)

$$g_{m,n} = \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^N f_{j,l} e^{i \frac{2\pi m j}{M}} e^{i \frac{2\pi n l}{N}}$$

$$f_{j,l} = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N g_{m,n} e^{-i \frac{2\pi m j}{M}} e^{-i \frac{2\pi n l}{N}}$$

求和上下限的变化利用了其周期性

对一维, 其计算量约 N^2 个复运算, 采用FFT, 则降为 $N \log_2 N$ 。故 $N=2^m$ 。



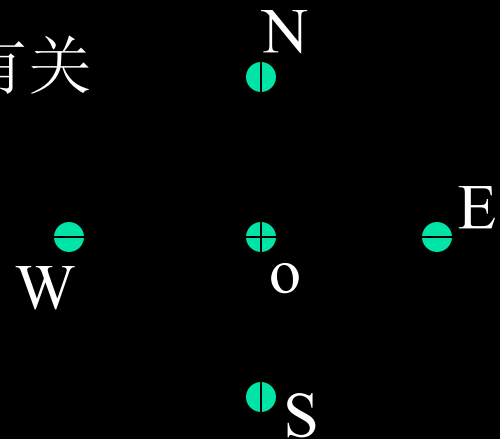
(二) 傅立叶方法

$$a_{jl}f_{jl} + b_{jl}f_{j+1,l} + c_{jl}f_{j-1,l} + d_{jl}f_{j,l+1} + e_{jl}f_{j,l-1} = s_{jl}$$

若系数是均匀的，则可对上式快速直接求解

均匀问题：所有系数与 j, l 无关

半均匀问题：所有系数仅与 j 或仅与 l 有关



1 均匀问题

$$af_{j,j} + bf_{j+1,j} + cf_{j-1,j} + df_{j,j+1} + ef_{j,j-1} = s_{j,j}$$

如矩形解域、均匀网格下常系数线性椭圆型方程

例: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = s(x,y)$ 若采用正方形网格

则 $a = -4, b = c = d = e = 1$

边界条件

(1) 固定边界: $f_B = \phi_B$ (2) 自由边界: $f_B - f_I = \psi_B$

(3) 周期边界: $f_{1,j} = f_{M+1,j}, f_{0,j} = f_{M,j}$ 分为单周期和双周期边界条件

或

$f_{j,1} = f_{j,N+1}, f_{j,0} = f_{j,N}$



当 φ_B 和 ψ_B 不为0, 则称为非齐次边界条件, 否则为齐次边界条件。

非齐次问题很容易化为齐次边界条件, 方法如下:

任取一离散函数, φ 它在边界上的取值为 φ_B

令 $f^* = f - \varphi$, 则 f^* 满足齐次方程及如下差分方程

$$af_{j,j}^* + bf_{j,j+1}^* + cf_{j,j-1}^* + df_{j,j+1}^* + ef_{j,j-1}^* = s_{j,j}^*$$

其中 $s_{j,j}^* = s_{j,j} - (a\varphi_{j,j} + b\varphi_{j,j+1} + c\varphi_{j,j-1} + d\varphi_{j,j+1} + e\varphi_{j,j-1})$

特别地, 若 φ_B 很小, 可简单地取 φ 的内点值为0

→ 非边界邻点处 $s_{j,j}^* = s_{j,j}$, 边界邻点处 $s_{j,j}^* = s_{j,j} - \lambda_B \varphi_B$

λ_B 为 b, c, d, e 之

1.1 双周期边界条件

$$af_{j,j} + bf_{j+1,j} + cf_{j-1,j} + df_{j,j+1} + ef_{j,j-1} = s_{j,j}$$

在其两边分别乘 $e^{j\frac{2\pi m}{M}} e^{l\frac{2\pi n}{N}}$ ，再对下标 j ($1 \sim M$) 及 l ($1 \sim N$) 求和

$$\rightarrow A_{m,n} \tilde{f}_{m,n} = \tilde{s}_{m,n} \quad A_{m,n} = a + be^{-i\theta_m} + ce^{i\theta_m} + de^{-i\theta_n} + ee^{i\theta_n}$$

$$\theta_m = \frac{2\pi m}{M}, \quad \theta_n = \frac{2\pi n}{N}$$

其中

$$\tilde{f}_{m,n} = \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^N f_{j,l} e^{j\frac{2\pi m}{M}} e^{l\frac{2\pi n}{N}}$$

$$\tilde{s}_{m,n} = \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^N s_{j,l} e^{j\frac{2\pi m}{M}} e^{l\frac{2\pi n}{N}}$$

其反变换为

$$f_{j,l} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_{m,n} e^{-i\frac{2\pi mj}{M}} e^{-i\frac{2\pi nl}{N}}$$



计算步骤

- 1 通过快速傅立叶变换由 $S_{j,l}$ 求 $\tilde{S}_{m,n}$
- 2 利用 $A_{m,n} \tilde{f}_{m,n} = \tilde{S}_{m,n}$ 求 $\tilde{f}_{m,n}$
- 3 通过快速傅立叶反变换由 $\tilde{f}_{m,n}$ 求 $f_{j,l}$

计算量为

当

时,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/128067062116006050>