

2024 届高三数学冲刺模拟卷 17 (A 卷)

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -x^2 + 4x > 0\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$ 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(-4, 1]$ B. $(-4, 0)$ C. $[1, 4)$ D. $(0, 4)$

【答案】C

【解析】求解一元二次不等式求得集合 A, 求函数的定义域求得集合 B, 之后找出两集合的交集即可。

【详解】一元二次不等式 $-x^2 + 4x > 0$ 得 $0 < x < 4$,

所以可得 $A = (0, 4)$, 又 $B = [1, +\infty)$, 故 $A \cap B = [1, 4)$,

故选: C.

【点睛】该题考查的是有关集合的问题, 涉及到的知识点有一元二次不等式的解法, 函数的定义域, 集合的运算, 属于基础题目。

2. 若 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 5)$, $(2\vec{a} - \vec{b}) \parallel (3\vec{a} + m\vec{b})$, 则 $m =$ ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【答案】C

【分析】根据向量线性运算的坐标表示求得 $2\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a} + m\vec{b}$, 再利用共线向量的坐标表示求解。

【详解】解： $2\vec{a}-\vec{b}=(8,-3)$ ， $3\vec{a}+m\vec{b}=(9-2m,3+5m)$ ，

因为 $(2\vec{a}-\vec{b})\parallel(3\vec{a}+m\vec{b})$ ，

所以 $8(3+5m)+3(9-2m)=0$ ，

解得 $m=-\frac{3}{2}$ 。

故选：C。

3. 已知复数 $3+2i$ 是方程 $x^2+ax+13=0$ 的一个根，则实数 $a=(\quad)$

A. -5

B. 5

C. -6

D. 6

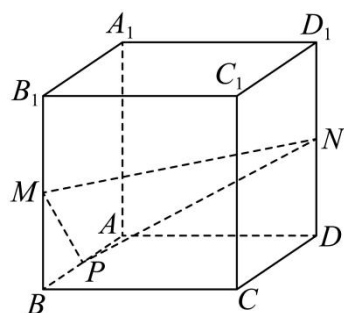
【答案】C

【分析】将复数代入方程即可求得 a 的值。

【详解】由题意可得 $(3+2i)^2+a(3+2i)+13=0$ ，即 $3a+18+2(a+6)i=0$ ，解得 $a=-6$ 。

故选：C。

4. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P,M,N 分别为 AB,BB_1,DD_1 的中点，则与平面 MNP 垂直的直线可以是 $(\quad)$



A. A_1B

B. A_1D

C. AC_1

D. A_1C

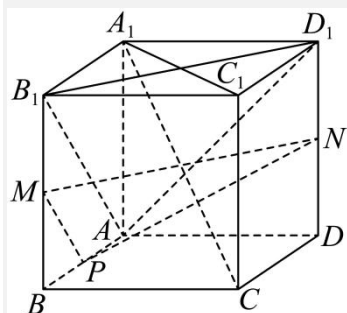
【答案】D

【分析】

作出与平面 MNP 平行的平面 AB_1D_1 ，证明 $A_1C \perp$ 面 AB_1D_1 即可.

【详解】

连接 $AB_1, B_1D_1, AD_1, A_1C_1, AC$ ，如下图所示：



因为 P, M, N 分别为 AB, BB_1, DD_1 的中点，故 $MP \parallel AB_1$ ， $B_1D_1 \parallel MN$ ，

又 $MP \not\subset$ 面 $AB_1D_1, AB_1 \subset$ 面 AB_1D_1 ，故 $MP \parallel$ 面 AB_1D_1 ；

又 $MN \not\subset$ 面 $AB_1D_1, B_1D_1 \subset$ 面 AB_1D_1 ，故 $MN \parallel$ 面 AB_1D_1 ；

又 $MP \cap MN = M, MP, MN \subset$ 面 MNP ，故面 $MNP \parallel$ 面 AB_1D_1 ；

则垂直于平面 MNP 的直线一定垂直于面 AB_1D_1 ；

显然 $CC_1 \perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1, B_1D_1 \subset$ 面 $A_1B_1C_1D_1$ ，故 $B_1D_1 \perp CC_1$ ，

又 $B_1D_1 \perp A_1C_1$ ， $A_1C_1 \cap CC_1 = C_1, A_1C_1, CC_1 \subset$ 面 A_1C_1C ，

故 $B_1D_1 \perp$ 面 A_1C_1C ，又 $A_1C \subset$ 面 A_1C_1C ，故 $A_1C \perp B_1D_1$ ；

同理可得 $A_1C \perp AB_1$ ，又 $AB_1 \cap B_1D_1 = B_1, AB_1, B_1D_1 \subset$ 面 AB_1D_1 ，

故 $A_1C \perp$ 面 AB_1D_1 ，也即 $A_1C \perp$ 面 MNP ；

若其它选项的直线垂直于平面 MNP ，则要与 A_1C 平行，显然都不平行.

故选：D.

5. 今天是星期三, 经过 7 天后还是星期三, 那么经过 8^{2021} 天后是 ()

- A. 星期二 B. 星期三 C. 星期四 D. 星期五

【答案】C

【分析】运用二项式展开式 $8^{2021} = (1+7)^{2021} = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 7 + C_{2021}^2 7^2 + \dots + C_{2021}^{2021} 7^{2021}$ 可得被 7 除得余数为 1, 即可得结果.

【详解】 $8^{2021} = (1+7)^{2021} = C_{2021}^0 + C_{2021}^1 7 + C_{2021}^2 7^2 + \dots + C_{2021}^{2021} 7^{2021}$

所以 8^{2021} 被 7 除得余数为 1, 故经过 8^{2021} 天后是星期四

故选: C

6. 若斜率为 1 的直线 l 与曲线 $y = \ln(x+a)$ 和圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 都相切, 则实数 a 的值为 ()

- A. 0 或 2 B. 0 或 -1 C. 2 D. -1

【答案】A

【分析】设直线 l 与曲线 $y = \ln(x+a)$ 的切点为 $P(x_0, y_0)$, 先根据导数的几何意义求出 $y = \ln(x+a)$ 在切点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程, 再根据直线与圆相切和圆心到直线的距离关系列式求解即可.

【详解】

设直线 l 与曲线 $y = \ln(x+a)$ 的切点为 $P(x_0, y_0)$, 由 $y' = [\ln(x+a)]' = \frac{1}{x+a}$, 则 $\frac{1}{x_0+a} = 1$,

则 $x_0 = 1-a, y_0 = 0$, 即切点为 $P(1-a, 0)$, 所以直线 l 为 $y = x - 1 + a$,

又直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 都相切,

则有 $\frac{|-1+a|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $a = 2$ 或 $a = 0$.

故选: A

7. 直角三角形的三个内角的正弦值成等比. 则该三角形的最小角等于.

$$A. \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$B. \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$C. \arcsin \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$D. \arccos \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

【答案】A

【详解】设三边为1、 x 、 x^2 ($0 < x < 1$). 则该三角形的最小角的正弦值就是 x^2 .

由 $1^2 = x^2 + (x^2)^2$, 解得 $x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 选 A.

8. 设直线 $l: x + y - 1 = 0$, 一束光线从原点 O 出发沿射线 $y = kx$ ($x \geq 0$) 向直线 l 射出, 经 l 反射后与 x 轴交于点 M , 再次经 x 轴反射后与 y 轴交于点 N . 若 $|\overline{MN}| = \frac{\sqrt{13}}{6}$, 则 k 的值为 ()

$$A. \frac{3}{2}$$

$$B. \frac{2}{3}$$

$$C. \frac{1}{2}$$

$$D. 2$$

【答案】B

【分析】

根据光学的性质, 根据对称性可先求 O 关于直线 l 的对称点 A , 后求直线 AP , 可得 M 、 N 两点坐标, 进而由 $|\overline{MN}| = \frac{\sqrt{13}}{6}$ 可得 k .

【详解】

如图, 设点 O 关于直线 l 的对称点为 $A(x_1, y_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2} - 1 = 0 \\ \frac{y_1}{x_1} \times (-1) = -1 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \text{即} A(1, 1),$$

由题意知 $y = kx$ ($x \geq 0$) 与直线 l 不平行, 故 $k \neq -1$,

$$\text{由} \begin{cases} y = kx \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = \frac{1}{k+1} \\ y = \frac{k}{k+1} \end{cases}, \text{即} P\left(\frac{1}{k+1}, \frac{k}{k+1}\right),$$

故直线 AP 的斜率为 $k_{AP} = \frac{\frac{k}{k+1}-1}{\frac{1}{k+1}-1} = \frac{1}{k}$,

直线 AP 的直线方程为: $y-1 = \frac{1}{k}(x-1)$,

令 $y=0$ 得 $x=1-k$, 故 $M(1-k, 0)$,

令 $x=0$ 得 $y=1-\frac{1}{k}$, 故由对称性可得 $N\left(0, \frac{1}{k}-1\right)$,

由 $|MN| = \frac{\sqrt{13}}{6}$ 得 $(1-k)^2 + \left(\frac{1}{k}-1\right)^2 = \frac{13}{36}$, 即 $\left(k+\frac{1}{k}\right)^2 - 2\left(k+\frac{1}{k}\right) = \frac{13}{36}$,

解得 $k+\frac{1}{k} = \frac{13}{6}$, 得 $k = \frac{2}{3}$ 或 $k = \frac{3}{2}$,

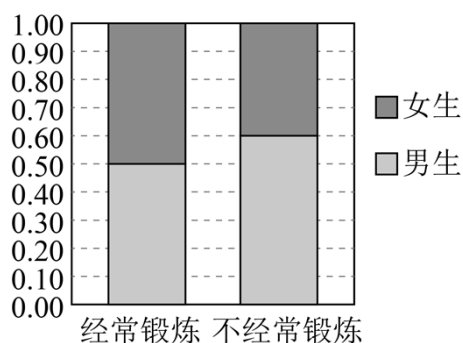
若 $k = \frac{3}{2}$, 则第二次反射后光线不会与 y 轴相交, 故不符合条件.

故 $k = \frac{2}{3}$,

故选: B

二、多选题

9. 为了有针对性地提高学生体育锻炼的积极性, 哈尔滨市某中学需要了解性别因素是否对本校学生体育锻炼的经常性有影响, 随机抽取了 300 名学生, 对他们是否经常锻炼的情况进行了调查, 调查发现经常锻炼人数是不经常锻炼人数的 2 倍, 绘制其等高堆积条形图, 如图所示, 则下列说法不正确的是 ()



参考公式： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$

χ^2 独立性检验中常用的小概率值和相应的临界值：

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
χ^2	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

- A. 参与调查的男生中经常锻炼的人数比不经常锻炼的人数多
- B. 从参与调查的学生中任取一人，已知该生为女生，则该生经常锻炼的概率为 $\frac{4}{7}$
- C. 依据 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验，认为性别因素影响学生体育锻炼的经常性，该推断犯错误的概率不超过 0.1
- D. 若经常锻炼人数与不经常锻炼人数的比例不变，统计得到的等高堆积条形图也不变，则无论参与调查的男生、女生人数为多少，依据 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验，都可以认为性别因素与学生体育锻炼的经常性无关

【答案】BCD

【分析】根据数表计算人数判断 A 选项，根据古典概型公式判断 B 选项，根据 χ^2 的值及独立性检验判断 C,D 选项.

【详解】对于 A，由题意知经常锻炼人数是不经常锻炼人数的 2 倍，

故经常锻炼人数为 200 人，不经常锻炼人数为 100 人，

故男生中经常锻炼的人数为 $200 \times 0.5 = 100$ 人，不经常锻炼的人数为 $100 \times 0.6 = 60$ 人，

故男生中经常锻炼的人数比不经常锻炼的人数多，A 正确；

对于 B，经常锻炼的女生人数为 $200 \times 0.5 = 100$ 人，不经常锻炼的人数为 $100 \times 0.4 = 40$ 人，

故从参与调查的学生中任取一人，已知该生为女生，则该生经常锻炼的概率为 $\frac{100}{100+40} = \frac{5}{7}$ ，B 错误；

对于 C，由题意结合男女生中经常锻炼和不经常锻炼的人数，可得列联表：

	经常锻炼	不经常锻炼	合计
男	100	60	160
女	100	40	140
合计	200	100	300

$$\text{则 } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{300 \times (100 \times 60 - 40 \times 100)^2}{140 \times 160 \times 200 \times 100} \approx 2.679 < 2.706,$$

故依据 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验，认为性别因素与学生体育锻炼的经常性无关，该推断犯错误的概率不超过 0.1，C 错误；

对于 D，假设抽取 600 名学生，由题意可得：

	经常锻炼	不经常锻炼	合计
男	200	120	320
女	200	80	280
合计	400	200	600

$$\text{则此时 } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{600 \times (200 \times 80 - 200 \times 120)^2}{400 \times 320 \times 200 \times 280} \approx 5.357 > 3.841,$$

故依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验，认为性别因素影响学生体育锻炼的经常性，该推断犯错误的概率不超过 0.05，D 错误，

故选：BCD

10. 某数学兴趣小组的同学经研究发现，反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象是双曲线，设其焦点为 M, N ，若 P 为其图象上任意一点，则（ ）

A. $y = -x$ 是它的一条对称轴

B. 它的离心率为 $\sqrt{2}$

C. 点 $(2, 2)$ 是它的一个焦点

D. $\|PM\| - \|PN\| = 2\sqrt{2}$

【答案】ABD

【分析】由题意可知反比例函数的图象为等轴双曲线，进一步分别计算出离心率以及 a, c 即可逐一判断求解.

【详解】反比例函数的图象为等轴双曲线，故离心率为 $\sqrt{2}$ ，

容易知道 $y = x$ 是实轴， $y = -x$ 是虚轴，坐标原点对称中心，

联立实轴方程 $y = x$ 与反比例函数表达式 $y = \frac{1}{x}$ 得实轴顶点 $(1, 1), (-1, -1)$ ，

所以 $a = \sqrt{2}, c = 2$ ，其中一个焦点坐标应为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 而不是 $(2, 2)$ ，

由双曲线定义可知 $\|PM\| - \|PN\| = 2a = 2\sqrt{2}$ 。

故选：ABD.

11. 关于函数 $f(x) = mx^2 - x \ln x$ ， m 为常数，则 ()

A. 若 $m = \frac{1}{2} \ln 2$ ，则 $f(2) = f(4) = 0$

B. 若 $x_1 > x_2 > 0$ ，总有 $f(x_1) > f(x_2)$ 恒成立，则 $m \geq \frac{1}{2}$

C. 当 $m > 1$ 时，方程 $f(x) = x^2$ 恰好只有一个实数根

D. 若函数 $f(x)$ 有两个极值点，则实数 $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

【答案】ABD

【分析】直接代入数值可判断 A；利用函数单调性的定义，将问题转化为 $2m \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 恒成立，由此判断 B；

将问题转化为 $g(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ 与 $y = m$ 的图象只有一个交点，从而判断 C；将问题转化为 $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ 与

$y = 2m$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上有两个交点，从而判断 D.

【详解】对于 A，当 $m = \frac{1}{2} \ln 2$ 时， $f(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln 2 - x \ln x$ ，

则 $f(2) = \frac{1}{2} \times 2^2 \ln 2 - 2 \ln 2 = 0$ ， $f(4) = \frac{1}{2} \times 4^2 \ln 2 - 4 \ln 4 = 0$ ，故 A 正确；

对于 B，因为当 $x_1 > x_2 > 0$ 时，总有 $f(x_1) > f(x_2)$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，即 $f'(x) \geq 0$ 恒成立，

因为 $f(x) = mx^2 - x \ln x$ ，所以 $f'(x) = 2mx - 1 - \ln x$ ，

由 $f'(x) \geq 0$ 恒成立，得 $2m \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ ，则 $h'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ ，

令 $h'(x) > 0$ ，得 $0 < x < 1$ ；令 $h'(x) < 0$ ，得 $x > 1$ ；

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，

则 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$ ，所以 $2m \geq 1$ ，即 $m \geq \frac{1}{2}$ ，故 B 正确；

对于 C，由 $f(x) = x^2$ ，得 $mx^2 - x \ln x = x^2$ ，即 $m = 1 + \frac{\ln x}{x}$ ，

令 $g(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ ，则 $x > 0$ ， $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，

当 $0 < x < e$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增；

当 $x > e$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减；

则 $g(x)_{\max} = g(e) = 1 + \frac{1}{e}$ ，且 $g\left(\frac{1}{e}\right) < 0$ ，当 $x > e$ 时， $g(x) > 0$ 恒成立，

所以 $g(x)$ 与 $y = m$ 的大致图象如下：

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/128123007121006055>