专题 4.2 向量四心及补充定理综合归类

目录

题型 01 “奔驰定理”......1
题型 02 极化恒等式......3
题型 03 极化恒等式求最值范围......4
.题型 04 等和线题型：基础......6
题型 05 等和线题型：$m\lambda+t\mu$ 型......6
题型 06 等和线题型：$m\lambda-t\mu$ 型......7
题型 07 等和线题型：分数型......8
题型 08 等和线题型：与数列......9
题型 09 奔驰定理与重心型轨迹......10
题型 10 三角形四心向量：内心......11
题型 11 三角形四心向量：外心......12
题型 12 三角形四心向量：重心......12
题型 13 三角形四心向量：垂心......13
题型 14 向量点域综合......14
高考练场......15

热点题型归纳

题型 01 “奔驰定理”

【解题攻略】

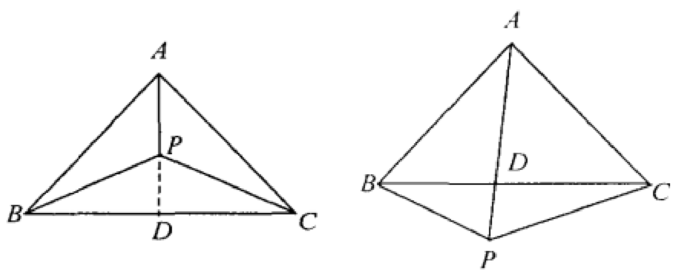
奔驰定理：

P 为 ΔABC 内一点，$a\times\overrightarrow{PA}+b\times\overrightarrow{PB}+c\times\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，则 $S_{\Delta PBC}$：$S_{\Delta PAC}$：$S_{\Delta PAB}=a$：b：c。

重要结论：$\frac{S_{\Delta PBC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{a}{a+b+c}$，$\frac{S_{\Delta PAC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{b}{a+b+c}$，$\frac{S_{\Delta PAB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{c}{a+b+c}$.

结论 1：对于 ΔABC 内的任意一点 P， 若 ΔPBC、ΔPCA、ΔPAB 的面积分别为 S_A、S_B、S_C，则：$S_A\cdot\overrightarrow{PA}+S_B\cdot\overrightarrow{PB}+S_C\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

即三角形内共点向量的线性加权和为零，权系数分别为向量所对的三角形的面积.



结论 2：对于 ΔABC 平面内的任意一点 P，若点 P 在 ΔABC 的外部，并且在 $\angle BAC$ 的内部或其对顶角的内部所在区域时，则有 $-S_{\Delta PBC}\cdot\overrightarrow{PA}+S_{\Delta PAC}\cdot\overrightarrow{PB}+S_{PAB}\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

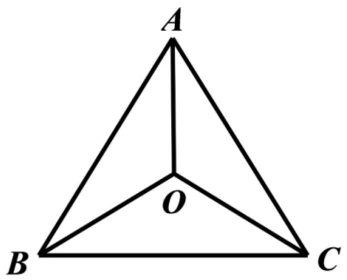
结论 3：对于 ΔABC 内的任意一点 P， 若 $\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，则 ΔPBC、ΔPCA、ΔPAB 的面积之比为 λ_1：λ_2：λ_3.

即若三角形内共点向量的线性加权和为零，则各向量所对的三角形面积之比等于权系数之比.

结论 4： 对于 ΔABC 所在平面内不在三角形边上的任一点 P，$\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，则 ΔPBC、ΔPCA、ΔPAB 的面积分别为 $|\lambda_1|:|\lambda_2|:|\lambda_3|$.

即若三角形平面内共点向量的线性加权和为零，则各向量所对应的三角形面积之比等于权系数的绝对值之比.各向量所对应的三角形是指另外两个向量所在的三角形.

【典例 1-1】（2022 春·全国·高三模拟）奔驰定理：已知 O 是 $\triangle ABC$ 内的一点，$\triangle BOC$，$\triangle AOC$，$\triangle AOB$ 的面积分别为 S_A，S_B，S_C，则 $S_A\cdot\overrightarrow{OA}+S_B\cdot\overrightarrow{OB}+S_C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.“奔驰定理”是平面向量中一个非常优美的结论，因为这个定理对应的图形与“奔驰”轿车的 logo 很相似，故形象地称其为“奔驰定理”.设 O 为三角形 ABC 内一点，且满足：$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$，则 $\dfrac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}=$（　）



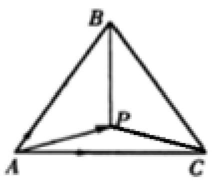
A．$\dfrac{2}{5}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{6}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

【典例 1-2】已知点 P 为 ABC 内一点，$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，则△$APB$，△$APC$，△$BPC$ 的面积之比为（　　）

A． $9:4:1$　　**B．** $1:4:9$　　**C．** $1:2:3$　　**D．** $3:2:1$

四川省三台中学 2021-2022 学年高三 4 月质量检测数学试题

【变式 1-1】 如图所示，设 P 为 ΔABC 所在平面内的一点，并且 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，则 ΔBPC 与 ΔABC 的面积之比等于（　　）



A． $\dfrac{2}{5}$　　**B．** $\dfrac{3}{5}$　　**C．** $\dfrac{3}{4}$　　**D．** $\dfrac{1}{4}$

【变式 1-2】 已知 ΔABD 是等边三角形，且 $\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC},|\overrightarrow{CD}|=3$,那么四边形 **ABCD** 的面积为(　　　)