

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题【答案】后，用铅笔把答题卡上对应题目的【答案】标号涂黑。如需改动用橡皮擦干净后，再选涂其他【答案】标号。回答非选择题时，将【答案】写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：湘教版选择性必修第一册（数列、【解析】几何、计数原理）占30%。选择性必修第二册第一意（导数）、第二章（空间向量）占70%。

- 又 α 与 β 所成角为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

高级中学名校试卷

\ \alpha 与 \beta 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

故选：B

4. 甲游客盘中有肉灌汤包、龙井肉包、虾仁肉包、御膳肉包、胡萝卜素包、韭菜素包各一个，甲游客每次吃一个，全部吃完，若要求甲游客吃两个素包的顺序不相邻，则不同的吃法共有（ ）

- A. 480 种 B. 360 种 C. 240 种 D. 600 种

【答案】A

【解析】先排四个肉包的顺序，再插入两个素包，则不同的吃法共有 $A_4^4 A_5^2 = 480$ 种.

故选：A

5. 若圆 C 与 x 轴相切且与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 外切，则圆 C 的圆心的轨迹方程为（ ）

- A. $x^2 = 4y + 4$ B. $x^2 = -4y + 4$
C. $x^2 = 4|y| + 4$ D. $x^2 = 4y - 4$

【答案】C

【解析】设圆心坐标为 (x, y) ，依题意可得 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 + |y|$ ，化简得 $x^2 = 4|y| + 4$ ，

即圆 C 的圆心的轨迹方程为 $x^2 = 4|y| + 4$.

故选：C

6. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 ADD_1A_1 的周长为 12, $CD = 2AD = 2x (x > 0)$ ，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V(x)$. 若 $V(m) = 6m^2$ ，则 $V(x)$ 在 $x = m$ 处的瞬时变化率为（ ）

- A. 18 B. 20 C. 24 D. 26

【答案】A

【解析】因为四边形 ADD_1A_1 的周长为 12，

所以 $2AD + 2AA_1 = 2x + 2AA_1 = 12$ ，所以 $AA_1 = 6 - x$ ，

因为 $AA_1 = 6 - x > 0, x > 0$ ，所以 $0 < x < 6$ ，

所以 $V(x) = 2x \cdot x \cdot (6 - x) = 12x^2 - 2x^3 (0 < x < 6)$ ，

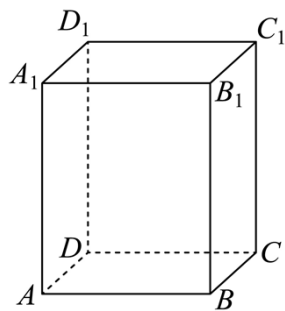
由 $V(m) = 6m^2$ 得， $12m^2 - 2m^3 = 6m^2 (0 < m < 6)$ ，

解得 $m = 3$ ，

$V'(x) = 24x - 6x^2$ ，则 $V'(3) = 24 \times 3 - 6 \times 9 = 18$ ，

所以在 $V(x)$ 在 $x = m$ 处的瞬时变化率为 18，

故选：A.



7. 设等比数列的前 7 项和、前 14 项和分别为 2, 8, 则该等比数列的前 28 项和为 ()

- A. 64 B. 72 C. 76 D. 80

【答案】D

【解析】设 S_n 是该等比数列的前 n 项和, 依题意可知 $S_7 = 2 \neq 0, S_{14} = 8$,

则 $S_7, S_{14} - S_7, S_{21} - S_{14}, S_{28} - S_{21}$ 成等比数列, 即 $2, 6, S_{21} - 8, S_{28} - S_{21}$ 成等比数列,

则 $S_{21} - 8 = 18, S_{28} - S_{21} = 18 \times 3$, 解得 $S_{21} = 26, S_{28} = 54 + 26 = 80$.

故选：D.

8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数,

当 $x > 0$ 时, $3f(x) + xf'(x) > 0$, 且 $f(2) = 2$, 则不等式 $(x+1)^3 f(x+1) > 16$ 的解集为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

【答案】B

【解析】令 $g(x) = x^3 f(x)$,

则 $g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^2 [3f(x) + xf'(x)]$,

因为当 $x > 0$ 时, $3f(x) + xf'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $f(x)$ 为奇函数, 且图象连续不断,

所以 $g(x)$ 为偶函数,

由 $(x+1)^3 f(x+1) > 2^3 f(2)$, 得 $|x+1| > 2$,

解得 $x < -3$ 或 $x > 1$.

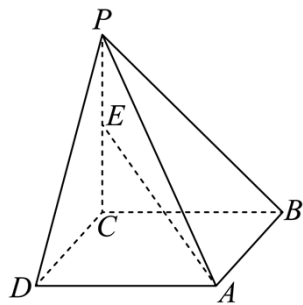
故选：B.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合

高级中学名校试卷

题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 如图, 在底面为平行四边形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, E 为 PC 的中点, 则 ()



A. $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC}$

B. $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE}$

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AE}$

【答案】AD

【解析】在四棱锥 $P-ABCD$ 中, E 为 PC 的中点, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC}$, A 正确, B 错误;

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AE}$, D 正确, C 错误.

故选: AD

10. 若 $(2-x)^9 = a_0 + a_1x + \dots + a_9x^9$, 则 ()

A. $a_0 = 256$

B. $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = -511$

C. $a_1 = -2304$

D. $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = \frac{1+3^9}{2}$

【答案】BCD

【解析】对 A: 令 $x=0$, 得 $a_0 = 2^9 = 512$, 故 A 错误;

对 B: 令 $x=1$, 得 $a_0 + a_1 + \dots + a_9 = 1$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 1 - 512 = -511$, 故 B 正确.

对 C: 由题可得 $T_{r+1} = C_9^r 2^{9-r} (-x)^r$, 则 $a_1 = C_9^1 \times 2^8 \times (-1) = -2304$, 故 C 正确.

对 D: 令 $x=-1$, 得 $a_0 - a_1 + \dots + a_8 - a_9 = 3^9$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = \frac{1+3^9}{2}$, 故 D 正确.

故选: BCD.

11. 设 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 若 $f'(x)$ 在 D 上单调递增, 则称 $f(x)$ 为 D 上的凹函数; 若 $f'(x)$ 在 D 上单调递减, 则称 $f(x)$ 为 D 上的凸函数. 下列结论正确的是 ()

A. 函数 $f(x) = x^2 - 100x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凹函数

B. 函数 $g(x) = x \sin x$ 为 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上的凸函数

C. 函数 $h(x) = \frac{x}{2^x} + 1$ 为 $(0, 4)$ 上的凸函数

D. 函数 $k(x) = (x+1)e^{2x} + e^{-5}x^2$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凹函数

【答案】ABD

【解析】对于选项 A: 因为 $f'(x) = 2x - 100$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

所以 $f(x) = x^2 - 100x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凹函数, 故 A 正确;

对于选项 B: 因为 $g'(x) = \sin x + x \cos x$, 设 $G(x) = g'(x)$,

则 $G'(x) = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $G'(x) < 0$, 可知 $G(x)$ 为 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上的减函数,

即 $g'(x)$ 为 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上的减函数, 所以 $g(x) = x \sin x$ 为 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上的凸函数, 故 B 正确;

对于选项 C: 因为 $h'(x) = \frac{1 - x \ln 2}{2^x}$, 设 $H(x) = h'(x)$,

则 $H'(x) = \frac{\ln 2 (x \ln 2 - 2)}{2^x}$, 注意到 $H'(3) = \frac{\ln 2 (3 \ln 2 - 2)}{2} > 0$,

可知 $H(x)$ 在 $(0, 4)$ 内不是单调递减函数, 即 $h'(x)$ 在 $(0, 4)$ 内不是单调递减函数,

所以函数 $h(x) = \frac{x}{2^x} + 1$ 在 $(0, 4)$ 上不为凸函数, 故 C 错误;

对于选项 D: 因为 $k'(x) = (2x+3)e^{2x} + 2e^{-5}x$, 令 $K(x) = k'(x)$,

则 $K'(x) = (4x+8)e^{2x} + 2e^{-5}$,

设 $m(x) = K'(x)$, 则 $m'(x) = (8x+20)e^{2x}$,

当 $x < -\frac{5}{2}$ 时, $m'(x) < 0$, 当 $x > -\frac{5}{2}$ 时, $m'(x) > 0$,

可知 $m(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$ 内单调递减, 在 $\left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$ 内单调递增,

则 $m(x) \geq m\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$, 即 $K'(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

可知 $K(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调递增, 所以 $k(x) = (x+1)e^{2x} + e^{-5}x^2$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凹函数, 故 D

高级中学名校试卷

正确.

故选: ABD.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 某城市今年空气质量为“优”的天数为 54, 力争 3 年后使空气质量为“优”的天数达到 128, 则这个城市空气质量为“优”的天数的年平均增长率为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 设这个城市空气质量为“优”的天数的年平均增长率为 q ,

则 $128 = 54(1+q)^3$, 解得: $q = \frac{1}{3}$.

故【答案】 为: $\frac{1}{3}$.

13. 若函数 $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax$ 存在极值, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$

【解析】 $f'(x) = 6x^2 - 2x + a$, 则 $\Delta = 4 - 24a > 0$,

解得 $a \in \left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$.

故【答案】 为: $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$.

14. 已知曲线 $mx^2 - (8m-1)x - 3y + 16m + 8 = 0$ 恒过 M 点, 且 M 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 上. 若 P 是 C 上的一点, 点 $N(6, 3)$, 则点 P 到 C 的焦点与到点 N 的距离之和的最小值为_____.

【答案】 7

【解析】 曲线 $mx^2 - (8m-1)x - 3y + 16m + 8 = 0$ 可变形为 $m(x-4)^2 + x - 3y + 8 = 0$,

令 $\begin{cases} (x-4)^2 = 0 \\ x - 3y + 8 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$,

可知曲线 $mx^2 - (8m-1)x - 3y + 16m + 8 = 0$ 恒过点 $M(4, 4)$,

因为 M 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 上,

则 $16 = 8p$,

解得 $p = 2$,

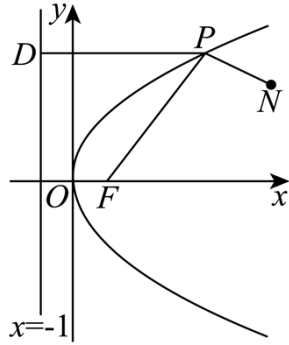
高级中学名校试卷

所以 C 的方程为 $y^2 = 4x$ ，可知 C 的焦点为 $F(1, 0)$ ，准线为 $l: x = -1$ ，

又因为 $3^2 = 9 < 24$ ，可知点 N 在抛物线内，

设点 P 在准线 l 上的投影为 D ，

则 $|PD| = |PF|$ ，



因为 $|PF| + |PN| = |PD| + |PN| \leq 6 + 1 = 7$ ，

当且仅当 PN 与 C 的准线垂直时，等号成立，

所以点 P 到 C 的焦点与到点 N 的距离之和的最小值为 7.

故【答案】为：7.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $a_1 = 1, S_5 = 35$ ．

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = 2^{a_n - 2n + 2} + \frac{3}{a_n a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ．

解：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则 $S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 5a_3 = 5(1 + 2d) = 35$ ，解得 $d = 3$ ，

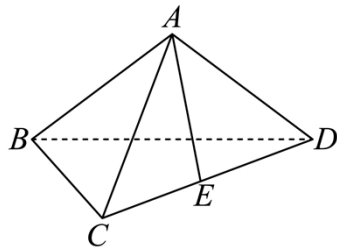
所以 $a_n = 1 + 3(n - 1) = 3n - 2$ ．

(2) 由 (1) 知 $b_n = 2^n + \frac{3}{(3n - 2)(3n + 1)} = 2^n + \frac{1}{3n - 2} - \frac{1}{3n + 1}$ ，

则 $T_n = \frac{2 - 2^{n+1}}{1 - 2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n - 2} - \frac{1}{3n + 1}$

$= 2^{n+1} - 2 + 1 - \frac{1}{3n + 1} = 2^{n+1} - 1 - \frac{1}{3n + 1}$ ．

16. 如图，在三棱锥 $A - BCD$ 中，平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ， $AB = AD = 3, BC = CD = 4$ ．



(1) 证明: $AC \perp BD$.

(2) 若 $BD = 4\sqrt{2}$, E 为 CD 的中点, 求直线 AE 与平面 ABC 所成角的正弦值.

解: (1) 取 BD 的中点 O , 连接 AO, CO ,

因为 $AB = AD = 3, BC = CD = 4$, 所以 $AO \perp BD, CO \perp BD$,

又 $AO \cap CO = O$, $AO, CO \subset$ 面 AOC ,

所以 $BD \perp$ 平面 AOC ,

因为 $AC \subset$ 平面 AOC , 所以 $AC \perp BD$;

(2) 因为平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$, $AO \perp BD$,

$AO \subset$ 平面 ABD ,

所以 $AO \perp$ 平面 BCD , 又 $CO \perp OD$,

所以以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OC}$ 的方向为 x 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系,

因为 $BO = \frac{1}{2}BD = 2\sqrt{2}$, 所以 $AO = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$, $CO = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$,

则 $A(0, 0, 1), C(2\sqrt{2}, 0, 0), E(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), B(0, -2\sqrt{2}, 0)$,

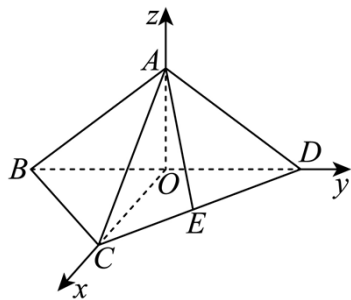
则 $\overrightarrow{AB} = (0, -2\sqrt{2}, -1), \overrightarrow{AC} = (2\sqrt{2}, 0, -1), \overrightarrow{AE} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1)$,

设平面 ABC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

则 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 即 $\begin{cases} -2\sqrt{2}y - z = 0 \\ 2\sqrt{2}x - z = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$ 得 $\vec{n} = (1, -1, 2\sqrt{2})$.

所以 $|\cos \langle \overrightarrow{AE}, \vec{n} \rangle| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{2}{5}$,

所以直线 AE 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{2}{5}$.



17. 已知 3 是函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3a^2x + b - 1$ 的极小值点.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $a > 0$, 且 $f(x)$ 有 3 个零点, 求 b 的取值范围.

解: (1) 因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3a^2x + b - 1$,

所以 $f'(x) = x^2 - 2ax - 3a^2 = (x - 3a)(x + a)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 3a$ 或 $x = -a$.

当 $a > 0$, 则当 $x \in (-\infty, -a) \cup (3a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (-a, 3a)$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -a)$ 和 $(3a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-a, 3a)$ 上单调递减.

因为 3 是 $f(x)$ 的极小值点, 所以 $3a = 3$,

即 $a = 1$, 符合题意.

当 $a = 0$, 则 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 无极值点, 不符合题意.

当 $a < 0$, 则当 $x \in (-\infty, 3a) \cup (-a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (3a, -a)$ 时,

$f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 3a)$ 和 $(-a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(3a, -a)$ 上单调递减.

因为 3 是 $f(x)$ 的极小值点, 所以 $-a = 3$, 即 $a = -3$, 符合题意. 综上所述, $a = 1$ 或 $a = -3$.

(2) 因为 $a > 0$, 所以 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + b - 1$, $f'(x) = (x - 3)(x + 1)$,

当 $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (-1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 3)$ 上单调递减.

显然当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

因为 $f(x)$ 有 3 个零点, 所以当且仅当
$$\begin{cases} f(-1) = b + \frac{2}{3} > 0 \\ f(3) = b - 10 < 0 \end{cases},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/135004321243011230>