专题 36 直线与圆、圆与圆的位置关系

【考点预测】

一．直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系有 3 种，相离，相切和相交

二．直线与圆的位置关系判断

（1）几何法（圆心到直线的距离和半径关系）

圆心 (a,b) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离，则 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$：

$d<r \Leftrightarrow$ 直线与圆相交，交于两点 P,Q，$|PQ|=2\sqrt{r^2-d^2}$；

$d=r \Leftrightarrow$ 直线与圆相切；

$d>r \Leftrightarrow$ 直线与圆相离

（2）代数方法（几何问题转化为代数问题即交点个数问题转化为方程根个数）

由 $\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \end{cases}$，

消元得到一元二次方程 $px^2+qx+t=0$， $px^2+qx+t=0$ 判别式为 Δ，则：

$\Delta>0 \Leftrightarrow$ 直线与圆相交；

$\Delta=0 \Leftrightarrow$ 直线与圆相切；

$\Delta<0 \Leftrightarrow$ 直线与圆相离．

三．两圆位置关系的判断

用两圆的圆心距与两圆半径的和差大小关系确定，具体是：

设两圆 O_1,O_2 的半径分别是 R,r，（不妨设 $R>r$），且两圆的圆心距为 d，则：

$d<R+r \Leftrightarrow$ 两圆相交；

$d=R+r \Leftrightarrow$ 两圆外切；

$R-r<d<R+r \Leftrightarrow$ 两圆相离

$d=R-r \Leftrightarrow$ 两圆内切；

$0 \le d<R-r \Leftrightarrow$ 两圆内含（$d=0$ 时两圆为同心圆）

设两个圆的半径分别为 R，r， $R>r$，圆心距为 d，则两圆的位置关系可用下表来表示：

位置关系	相离	外切	相交	内切	内含
几何特征	$d>R+$	$d=R+r$	$R-r<d<R+$	$d=R-r$	$d<R-r$
代数特征	无实数解	一组实数解	两组实数解	一组实数解	无实数解
公切线条数	4	3	2	1	0

【方法技巧与总结】

关于圆的切线的几个重要结论

（1）过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的圆的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

（2）过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的圆的切线方程为

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

（3）过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的圆的切线方程为

$x_0x+y_0y+D\cdot\dfrac{x+x_0}{2}+E\cdot\dfrac{y+y_0}{2}+F=0$

（4）求过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 的圆的切线方程时，应注意理解：

①所求切线一定有两条；

②设直线方程之前，应对所求直线的斜率是否存在加以讨论．设切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，利用圆心到切线的距离等于半径，列出关于 k 的方程，求出 k 值．若求出的 k 值有两个，则说明斜率不存在的情形不符合题意；若求出的 k 值只有一个，则说明斜率不存在的情形符合题意．

【题型归纳目录】

题型一：直线与圆的相交关系（含弦长、面积问题）

题型二：直线与圆的相切关系、切点弦问题

题型三：直线与圆的相离关系

题型四：圆与圆的位置关系

题型五：两圆的公共弦问题

【典例例题】

题型一：直线与圆的相交关系（含弦长、面积问题）

例 1．（2023·青海玉树·高三阶段练习(理)）已知直线 $x+y-\sqrt{3}a=0$ 与圆 C：$(x+1)^2+(y-1)^2=2a^2-2a+1$ 相交于点 A，B，若 $\vee ABC$ 是正三角形，则实数 $a=$（　　）

A．－2　　B．2　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

例 2．（2023·全国·高三专题练习）已知直线 $y=kx(k>0)$ 与圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 相交于 A，B 两点 $|AB|=2\sqrt{3}$，则 k=（　　）

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{4}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\dfrac{5}{12}$

例 3．（多选题）（2023·山东青岛·二模）已知 $C:x^2+y^2-6x=0$，则下述正确的是（　　）

A．圆 C 的半径 $r=3$　　B．点 $(1,2\sqrt{2})$ 在圆 C 的内部

C．直线 $l:x+\sqrt{3}y+3=0$ 与圆 C 相切　　D．圆 $C':(x+1)^2+y^2=4$ 与圆 C 相交

例 4．（多选题）（**2023 • 全国 • 南京外国语学校模拟预测**）已知圆C：$(x-5)^2+(y-3)^2=2$，直线l：$y=ax+1$，则下列说法正确的是（　　）

A．当$a=0$时，直线l与圆C相离

B．若直线l是圆C的一条对称轴，则$a=\frac{2}{5}$

C．已知点N为圆C上的动点，若直线l上存在点P，使得$\angle NPC=45°$，则a的最大值为$\frac{6}{7}$

D．已知$M\left(5,3+\sqrt{2}\right)$，$A(s,t)$，$N$为圆$C$上不同于$M$的一点，若$\angle MAN=90°$，则$t$的最大值为$\frac{5\sqrt{2}+12}{4}$

例 5．（多选题）（**2023 • 江苏 • 高二单元测试**）设有一组圆$C_k:(x-k)^2+(y-k)^2=4(k\in \mathrm{R})$，下列命题正确的是（　　）

A．不论k如何变化，圆心C_k始终在一条直线上

B．存在圆C_k经过点（3，0）

C．存在定直线始终与圆C_k相切

D．若圆C_k上总存在两点到原点的距离为 1，则$k\in\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

例 6．（多选题）（**2023 • 河北沧州 • 二模**）已知直线$l:ax+by-2=0$，圆$C:(x-a)^2+(y-b)^2=2$，则下列结论正确的有（　　）

A．若$a-b=1$，则直线l恒过定点$(2,-2)$

B．若$a=b$，则圆C可能过点$(0,3)$

C．若$a^2+b^2=2$，则圆C关于直线l对称

D．若$a^2+b^2=1$，则直线l与圆C相交所得的弦长为 2

例 7．（多选题）（**2023 • 河北 • 高三阶段练习**）已知圆$M:(x+1)^2+(y+1)^2=4$，直线$l:x+y-2=0$，P为直线l上的动点，过点P作圆M的切线PA,PB，切点为A，B，则下列说法正确的是（　　）

A．四边形$MAPB$面积的最小值为 4

B．当直线AB的方程为$x+y=0$时，$\angle APB$最小

C．已知圆上有且仅有两点到直线l的距离相等且为d，则$d\in(2\sqrt{2}-2,2\sqrt{2}+2)$

D．若动直线$l_1\perp l$，且l_1交圆M于C、D两点，且弦长$CD\in(2\sqrt{2},2\sqrt{3})$，则直线$l_1$纵截距的取值范围为$(-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},2)$

例 8．（多选题）（**2023 • 全国 • 高三专题练习**）已知圆C的方程为$(x+1)^2+y^2=4$，则（　　）

A．若过点$(0,1)$的直线被圆C截得的弦长为$2\sqrt{3}$，则该直线方程为$y=1$

B．圆C上的点到直线$3x-4y-12=0$的最大距离为5

C．在圆C上存在点D，使得D到点$(-1,1)$的距离为4

D．圆C上的任一点M到两个定点$O(0,0)$、$A(3,0)$的距离之比为$\frac{1}{2}$

例9．（多选题）（2023·全国·模拟预测）（多选）已知圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$，直线$l:(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$．则以下几个命题正确的有（　　）

A．直线l恒过定点$(3,1)$　　B．圆C被y轴截得的弦长为$4\sqrt{6}$

C．直线l与圆C恒相交　　D．直线l被圆C截得最长弦长时，直线l的方程为$2x-y-5=0$

例10．（多选题）（2023·辽宁·一模）已知圆的圆心在直线$x=-2$上，且与$l_1:x+\sqrt{3}y-2=0$相切于点$Q(-1,\sqrt{3})$，过点$D(-1,0)$作圆的两条互相垂直的弦AE、BF．则下列结论正确的是（　　）

A．圆的方程为：$(x+2)^2+y^2=4$

B．弦AE的长度的最大值为$2\sqrt{3}$

C．四边形$ABEF$面积的最大值为$4\sqrt{3}$

D．该线段AE、BF的中点分别为M、N，直线MN恒过定点$\left(-\frac{3}{2},0\right)$

例11．（2023·全国·高二专题练习）若圆$C:x^2+y^2-2x-2y=0$上至少有三个不同点到直线$l:y=kx$的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则k的取值范围__．

例12．（2023·山东烟台·三模）已知动点P到点$A(1,0)$的距离是到点$B(1,3)$的距离的2倍，记P点的轨迹为C，直线$y=kx+1$交C于M，N两点，$Q(1,4)$，若$\triangle QMN$的面积为2，则实数k的值为___________．

例13．（2023·河南·高三阶段练习（文））直线$y=2x+1$与圆C：$x^2+y^2-4x-5=0$相交于M，N两点，则$|MN|=$______．

例14．（2023·天津·高考真题）若直线$x-y+m=0(m>0)$与圆$(x-1)^2+(y-1)^2=3$相交所得的弦长为m，则$m=$_____．

例15．（2023·全国·模拟预测）在平面直角坐标系xOy中，过点$A(0,-3)$的直线l与圆$C:x^2+(y-2)^2=9$相交于M，N两点，若$S_{\triangle AON}=\frac{6}{5}S_{\triangle ACM}$，则直线$l$的斜率为__________．

例16．（2023·全国·高三专题练习(文)）已知曲线$y=\sqrt{-x^2+4x-3}$与直线$kx-y+k-1=0$有两个不同的交点，则实数k的取值范围是_____．

例17．（2023·全国·高三专题练习）已知直线l：$2mx-y-8m-3=0$和圆C：$x^2+y^2-6x+12y+20=0$．

（1）求圆C的圆心、半径

（2）求证：无论m为何值，直线l总与圆C有交点；

（3）m 为何值时，直线 l 被圆 C 截得的弦最短？求出此时的弦长.

例 18．（2023·全国·模拟预测）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $M\left(3,0\right)$，$N\left(\frac{3}{2},0\right)$，直线 $l:\left(2m+1\right)x-(4m$ -1） $y+m-1=0\left(m\neq 0\right)$，动点 P 满足 $\left|PM\right|=2\left|PN\right|$，则动点 P 的轨迹 Γ 的方程为______，若 Γ 的对称中心为 C，l 与 Γ 交于 A，B 两点，则的方程为 $\vee ABC$ 面积的最大值为______.

【方法技巧与总结】

（1）研究直线与圆的相交问题，应牢牢记住三长关系，即半径长 $\frac{l}{2}$ 、弦心距 d 和半径 r 之间形成的数量关系 $(\frac{l}{2})^2+d^2=r^2$.

（2）弦长问题

①利用垂径定理：半径 r ，圆心到直线的距离 d ，弦长 l 具有的关系 $r^2=d^2+(\frac{l}{2})^2$ ，这也是求弦长最常用的方法.

②利用交点坐标：若直线与圆的交点坐标易求出，求出交点坐标后，直接用两点间的距离公式计算弦长.

③利用弦长公式：设直线 $l:y=kx+b$ ，与圆的两交点 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$ ，将直线方程代入圆的方程，消元后利用根与系数关系得弦长：$l=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+k^2)}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$.

题型二：直线与圆的相切关系、切点弦问题

例 19．（2023·湖北·模拟预测）已知圆 O： $x^2+y^2=3$ ，l 为过 $M\left(1,\sqrt{2}\right)$ 的圆的切线，A 为 l 上任一点，过 A 作圆 N ： $\left(x+2\right)^2+y^2=4$ 的切线，则切线长的最小值是__________.

例 20．（2023·天津市第四十七中学模拟预测）过点 $P\left(2,2\right)$ 与圆 $\left(x-1\right)^2+y^2=5$ 相切的直线是_________.

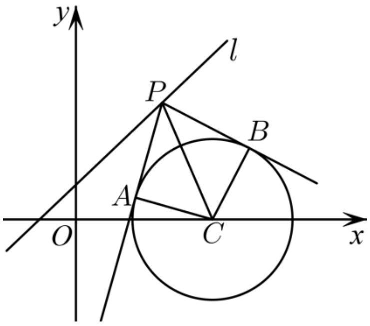
例 21．（2023·全国·高三专题练习）已知圆 O：则 $x^2+y^2=4$ ，过点 $Q\left(2,4\right)$ 作圆的切线，则切线的方程为___________.

例 22．（2023·广东·高三开学考试）过点 $P(2,2)$ 作圆 $x^2+y^2=4$ 的两条切线，切点分别为A 、B ，则直线 AB 的方程为_______.

例 23．（2023·河南·郑州四中高三阶段练习（文））已知圆 $C:x^2+y^2-4x-2y+1=0$ ，点 P 是直线 $y=4$ 上的动点，过 P 作圆的两条切线，切点分别为 A，B，则 $\left|AB\right|$ 的最小值为______.

例 24．（2023·全国·高三专题练习）已知直线 $l:x-y+1=0$，若 P 为 l 上的动点，过点 P 作

e $C:(x-5)^2+y^2=9$ 的切线 PA、PB，切点为 A、B，当 $|PC|\cdot|AB|$ 最小时，直线 AB 的方程为__________.



例 25．（2023 • 全国 • 高三专题练习）已知点 Q 是直线 l：$x-y-4=0$ 上的动点，过点 Q 作圆 O：$x^2+y^2=4$ 的切线，切点分别为 A，B，则切点弦 AB 所在直线恒过定点___________.

例 26．（多选题）（2023 • 江苏省赣榆高级中学模拟预测） 已知点 M 在直线 $l:y-4=k(x-3)$ 上，点 N 在圆 $O:x^2+y^2=9$ 上，则下列说法正确的是（　　）

A．点 N 到 l 的最大距离为 8

B．若 l 被圆 O 所截得的弦长最大，则 $k=\dfrac{4}{3}$

C．若 l 为圆 O 的切线，则 k 的取值范围为 $\left\{0,\dfrac{7}{24}\right\}$

D．若点 M 也在圆 O 上，则 O 到 l 的距离的最大值为 3

例 27．（2023 • 河南 • 温县第一高级中学高三阶段练习（理））设 P 为直线 $3x-4y+11=0$ 上的动点，过点 P 作圆 C：$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则四边形 $PACB$ 面积的最小值为（　　）.

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{6}$　　　　D．2

例 28．（2023 • 全国 • 高三专题练习）已知 $M(3,4)$ 是半径为 1 的动圆 C 上一点，P 为圆 $O:x^2+y^2=1$ 上一动点，过点 P 作圆 C 的切线，切点分别为 A，B，则当 $|AB|$ 取最大值时，△PAB 的外接圆的方程为（　　）

A．$x^2+y^2-3x-4y-6=0$　　　　B．$x^2+y^2-3x-4y+6=0$

C．$x^2+y^2-3x-4y=0$　　　　D．$x^2+y^2-4x-3y=0$

例 29．（多选题）（2023 • 全国 • 模拟预测） 已知直线 $l:x-y+5=0$，过直线上任意一点 M 作圆 $C:(x-3)^2+y^2=4$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则有（　　）

A．四边形 $MACB$ 面积的最小值为 $4\sqrt{7}$　　　　B．$\angle AMB$ 最大度数为 60°

C．直线 AB 过定点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$　　　　D．$|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{14}$

【方法技巧与总结】

（1）圆的切线方程的求法

①点$M(x_0, y_0)$在圆上，

法一：利用切线的斜率k_l与圆心和该点连线的斜率k_{OM}的乘积等于-1，即$k_{OM} \cdot k_l = -1$.

法二：圆心O到直线l的距离等于半径r.

②点$M(x_0, y_0)$在圆外，则设切线方程：$y - y_0 = k(x - x_0)$，变成一般式：$kx - y + y_0 - kx_0 = 0$，因为与圆相切，利用圆心到直线的距离等于半径，解出k.

注意：因为此时点在圆外，所以切线一定有两条，即方程一般是两个根，若方程只有一个根，则还有一条切线的斜率不存在，务必要把这条切线补上.

（2）常见圆的切线方程

过圆$x^2 + y^2 = r^2$上一点$P(x_0, y_0)$的切线方程是$x_0x + y_0y = r^2$；

过圆$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$上一点$P(x_0, y_0)$的切线方程是$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$.

过圆$x^2 + y^2 = r^2$外一点$P(x_0, y_0)$作圆的两条切线，则两切点所在直线方程为$x_0x + y_0y = r^2$

过曲线上$P(x_0, y_0)$，做曲线的切线，只需把x^2替换为x_0x，y^2替换为y_0y，x替换为$\dfrac{x_0 + x}{2}$，y替换为$\dfrac{y_0 + y}{2}$即可，因此可得到上面的结论.

题型三：直线与圆的相离关系

例 30.（2023•荔湾区校级模拟）由直线$y = x + 1$上的点向圆$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$引切线，则切线长的最小值为(　　)

A．$\sqrt{17}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{19}$　　D．$2\sqrt{5}$

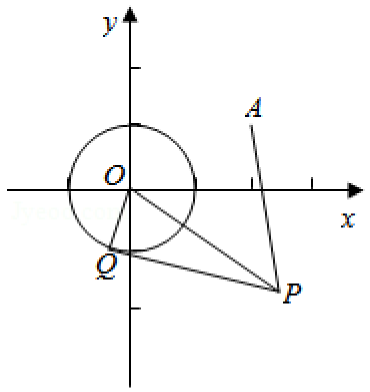
例 31．已知点P为圆$C:(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$上的动点，则P点到直线$l: x - y + 4 = 0$的距离的最小值为__.

例 32．（2023•洛阳二模）已知点$p(x,y)$是直线$kx + y + 4 = 0(k > 0)$上一动点，PA、PB是圆$C: x^2 + y^2 - 2y = 0$的两条切线，A、B是切点，若四边形$PACB$的最小面积是2，则k的值为____.

例 33.（2023春•个旧市校级期末）已知圆$O: x^2 + y^2 = 1$和定点$A(2,1)$，由圆O外一点$P(a,b)$向圆O引切线PQ，切点为Q，且满足$|PQ| = |PA|$.

（1）求实数a、b间满足的等量关系；

（2）求线段PQ长的最小值.



例 34．（多选题）（2023 • 全国 • 模拟预测）已知点 P 在圆 O: $x^2+y^2=4$ 上，点 $A(3,0)$， $B(0,4)$，则（　　）

A．点 P 到直线 AB 的距离最大值为 $\frac{22}{5}$

B．满足 $AP\perp BP$ 的点 P 有 3 个

C．过点 B 作圆 O 的两切线，切点分别为 M、N，则直线 MN 的方程为 $y=1$

D．$2|PA|+|PB|$ 的最小值是 $2\sqrt{10}$

【方法技巧与总结】

关于直线与圆的相离问题的题目大多是最值问题，即直线上的点与圆上的点的最近或最远距离问题，这样的题目往往要转化为直线上的点与圆心距离的最近和最远距离再加减半径长的问题．

题型四：圆与圆的位置关系

例 35．（2023 • 全国 • 高三专题练习）已知圆 $C_1:(x-2)^2+(y-2)^2=r_1^2(r_1>0)$，圆 $C_2:(x+1)^2+(y+1)^2=r_2^2(r_2>0)$，圆 C_1 与圆 C_2 相切，并且两圆的一条外公切线的斜率为 7，则 r_1r_2 为_________．

例 36．（2023 • 全国 • 高考真题）写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程________________．

例 37．（2023 • 黑龙江 • 双鸭山一中高三开学考试（文））若圆 $C_1:x^2+y^2=4$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 外切，则实数 m 的值是（　　）

A．-24　　B．-16　　C．24　　D．16

例 38．（2023 • 广西桂林 • 模拟预测（文））圆 $C_1:x^2+y^2-14x=0$ 与圆 $C_2:(x-3)^2+(y-4)^2=15$ 的位置关系为（　　）

A．相交　　B．内切　　C．外切　　D．相离

例 39．（2023 • 陕西 • 西安中学一模（理））在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C_1：$x^2+y^2+2x-6y+6=0$ 与圆

C_2： $x^2+y^2-4x+2y+4=0$，则两圆的公切线的条数是（　　）

A．4 条　　　B．3 条　　　C．2 条　　　D．1 条

例 40．（2023・全国・高三专题练习）圆 $x^2+\left(y-2\right)^2=4$ 与圆 $x^2+2mx+y^2+m^2-1=0$ 至少有三条公切线，则 m 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,-\sqrt{5}\right]$　　　B．$\left[\sqrt{5},+\infty\right)$

C．$\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$　　　D．$\left(-\infty,-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5},+\infty\right)$

例 41．（2023・云南师大附中高三阶段练习（文））已知圆 O_1： $x^2+y^2=2$，圆 O_2： $x^2+y^2-mx-my-2=0$（$m\in R$ 且 $m\neq 0$），则圆 O_1 与圆 O_2 的公切线有（　　）

A．4 条　　　B．1 条　　　C．2 条　　　D．3 条

例 42．（2023・山东聊城・二模）已知点 P 在圆 O： $x^2+y^2=4$ 上，点 $A\left(-3,0\right)$，$B\left(0,4\right)$，满足 $AP\perp BP$ 的点 P 的个数为（　　）

A．3　　　B．2　　　C．1　　　D．0

例 43．（2023・云南省下关第一中学高三开学考试）若圆 $x^2+y^2=1$ 上总存在两个点到点 $(a,1)$ 的距离为 2，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-2\sqrt{2},0)\cup(0,2\sqrt{2})$　　　B．$(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

C．$(-1,0)\cup(0,1)$　　　D．$(-1,1)$

例 44．（2023・福建・三明一中模拟预测）已知圆 $O:x^2+y^2=\dfrac{9}{4}$，圆 $M:(x-a)^2+(y-1)^2=1$，若圆 M 上存在点 P，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点分别为 A，B，使得 $\angle APB=\dfrac{\pi}{3}$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[-\sqrt{15},\sqrt{15}]$　　　B．$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　　C．$[\sqrt{3},\sqrt{15}]$　　　D．$[-\sqrt{15},-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},\sqrt{15}]$

例 45．（2023・全国・高三专题练习）已知圆 C_1：$x^2+y^2+4ax+4a^2-4=0$ 和圆 C_2：$x^2+y^2-2by+b^2-1=0$ 只有一条公切线，若 a，$b\in R$ 且 $ab\neq 0$，则 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ 的最小值为（　　）

A．3　　　B．8　　　C．4　　　D．9

例 46．（2023・河南・模拟预测（文））下列方程中，圆 $C_1:x^2-2x+y^2=0$ 与圆 $C_2:4x^2+4y^2=9$ 的公切线方程是（　　）

A．$x+\sqrt{3}y+3=0$　　　B．$x+\sqrt{3}y-3=0$

C．$\sqrt{3}x+y+3=0$　　　D．$\sqrt{3}x-y-3=0$

【方法技巧与总结】

已知两圆半径分别为 r_1,r_2，两圆的圆心距为 d，则：

（1）两圆外离 $\Leftrightarrow r_1+r_2<d$；

（2）两圆外切$\Leftrightarrow r_1+r_2=d$；

（3）两圆相交$\Leftrightarrow |r_1-r_2|<d<r_1+r_2$；

（4）两圆内切$\Leftrightarrow |r_1-r_2|=d$；

（5）两圆内含$\Leftrightarrow |r_1-r_2|>d$；

题型五：两圆的公共弦问题

例 47．（2023·全国·高三专题练习）设点 P 为直线$2x+y-2=0$上的点，过点 P 作圆 C：$x^2+y^2+2x+2y-2=0$的两条切线，切点分别为 A，B，当四边形 $PACB$ 的面积取得最小值时，此时直线 AB 的方程为（　　）

A．$2x-y-1=0$　　　　B．$2x+y-1=0$

C．$2x-y+1=0$　　　　D．$2x+y+1=0$

例 48．（2023·河南·二模（文））已知圆$C_1: x^2+y^2-kx+2y=0$与圆$C_2: x^2+y^2+ky-2=0$的公共弦所在直线恒过点 P，则点 P 的坐标为（　　）

A．$(1,-1)$　　B．$(-1,-1)$　　C．$(-1,1)$　　D．$(1,1)$

例 49．（2023·浙江省普陀中学高三阶段练习）圆$O_1:(x-1)^2+(y-1)^2=28$与$O_2:x^2+(y-4)^2=18$的公共弦长为（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{6}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$6\sqrt{2}$

例 50．（2023·全国·高三专题练习）圆$C_1:x^2+y^2-2x-3=0$与圆C_2：$x^2+y^2+4x-2y+1=0$公共弦所在直线的方程为（　　）

A．$3x+y+1=0$　　B．$3x-y+1=0$　　C．$3x+y+2=0$　　D．$3x-y+2=0$

例 51．（2023·全国·高三专题练习）已知圆$C_1:x^2+y^2=r^2$与圆$C_2:(x-a)^2+(y-b)^2=4r^2(r>0)$交于不同的$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，下列结论正确的有（　　）

A．$x_1+x_2=a$　　　　B．$y_1+y_2=2b$

C．$2ax_1+2by_1=a^2+b^2$　　　　D．$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$

例 52．（2023·全国·高三专题练习）已知圆$O_1:x^2+y^2-2x-3=0$与圆$O_2:x^2+y^2-4x+2y+3=0$相交于点A，B，则四边形AO_1BO_2的面积是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【方法技巧与总结】

两圆的公共弦方程为两圆方程相减可得．

【过关测试】

一、单选题

1．不论 k 为何值，直线$kx+y-1+4k=0$都与圆相交，则该圆的方程可以是（　　）

A．$\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=25$　　B．$(x+1)^2+(y+2)^2=25$

C．$\left(x-3\right)^2+\left(y+4\right)^2=25$　　D．$\left(x+1\right)^2+\left(y+3\right)^2=25$

2．已知圆 O：$x^2+y^2=10$，已知直线 l：$ax+by=2a-b\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$与圆 O 的交点分别 M，N，当直线 l 被圆 O 截得的弦长最小时，$\left|MN\right|=$（　　）

A．$\frac{3\sqrt{5}}{2}$　　B．$\frac{5\sqrt{5}}{2}$　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$3\sqrt{5}$

3．过点$\left(2,3\right)$的直线l与圆C：$x^2+y^2+4x+3=0$交于A，B两点，当弦$\left|AB\right|$取最大值时，直线l的方程为（　　）

A．$3x-4y+6=0$　　B．$3x-4y-6=0$　　C．$4x-3y+8=0$　　D．$4x+3y-8=0$

4．若直线$l:3x+4y+a=0\left(a\in\mathrm{R}\right)$与圆$O:x^2+y^2=9$交于不同的两点 A、B，且$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$，则$a=$（　　）

A．$\pm5\sqrt{5}$　　B．$\pm3\sqrt{5}$　　C．$\pm2\sqrt{5}$　　D．±5

5．若点$A(1,0),B(0,3)$到直线l的距离分别为 1 和 4，则这样的直线l共有（　　）条

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

6．已知圆$C:x^2+y^2+2ay=0\left(a>0\right)$截直线$\sqrt{3}x-y=0$所得的弦长为$2\sqrt{3}$，则圆 C 与圆 $C':\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2=1$的位置关系是（　　）

A．相离　　B．外切　　C．相交　　D．内切

7．设$A(-2,0),B(2,0)$，O 为坐标原点，点 P 满足$|PA|^2+|PB|^2\le16$，若直线$\boldsymbol{kx-y+6=0}$上存在点 Q 使得$\angle PQO=\frac{\pi}{4}$，则实数 k 的取值范围为（　　）

A．$\left[-\frac{\sqrt{14}}{2},\frac{\sqrt{14}}{2}\right]$　　B．$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{14}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{14}}{2},+\infty\right)$

C．$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{5}}{2},+\infty\right]$　　D．$\left[-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

8．点 M 为直线 y=-x+4 上一点，过点 M 作圆 O：$x^2+y^2=4$的切线 MP，MQ，切点分别为 P，Q，当四边形 $MPOQ$ 的面积最小时，直线 PQ 的方程为（　　）

A．x＋y－2＝0　　B．$x+y-\sqrt{2}=0$

C．x＋y－1＝0　　D．x＋y＋1＝0

二、多选题

9．已知圆$C:x^2+y^2-4x=0$和直线$l:kx-y+1-2k=0$，则（　　）

A．直线l与圆C的位置关系无法判定

B．当$k=1$时，圆C上的点到直线l的最远距离为$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．当圆C上有且仅有 3 个点到直线l的距离等于 1 时，$k=0$

D．如果直线l与圆C相交于M,N两点，则弦MN的中点的轨迹是一个圆

10．已知圆 C：$x^2+y^2=4$，直线 l 过点$P(-2,4)$，若将圆 C 向上平移 4 个单位长度，再向右平移 3 个单位长度得到圆C'，则下列说法正确的有（　　）

A．若直线 l 与圆 C 相切，则直线 l 的方程为 $3x+4y-10=0$

B．若直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，且$\triangle ABC$ 的面积为 2，则直线 l 的方程为 $x+y-2=0$ 或 $7x+y+10=0$

C．若过点$(2,0)$的直线l'与圆 C 交于 M，N 两点，则当$\triangle CMN$ 面积最大时，直线l'的斜率为 1 或－1

D．若 Q 是 x 轴上的动点，QR，QS 分别切圆C'于 R，S 两点，则直线 RS 恒过一个定点

11．已知点$P(x,y)$是圆$C:(x-1)^2+y^2=4$上的任意一点，直线$l:(1+m)x+(\sqrt{3}m-1)y+\sqrt{3}-3m=0$，则下列结论正确的是（　　）

A．直线l与圆C的位置关系只有相交和相切两种

B．圆C的圆心到直线l距离的最大值为$\sqrt{2}$

C．点P到直线$4x+3y+16=0$距离的最小值为2

D．点P可能在圆$x^2+y^2=1$上

12．若实数 x，y 满足$x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$，则下列说法正确的是（　　）

A．x 的最小值是 4

B．x 的最大值是 20

C．若关于 y 的方程有一解，则 x 的取值范围为$[4,16)\cup\{20\}$

D．若关于 y 的方程有两解，则 x 的取值范围为$[16,20)$

三、填空题

13．已知直线$x-2y+a=0$与圆 O：$x^2+y^2=2$ 相交于 A，B 两点（O 为坐标原点），且$\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，则实数 a 的值为___________.

14．设$\odot O_1:x^2+y^2=1$与$\odot O_2:x^2+(y-2)^2=4$相交于A,B两点，则$|AB|=$________.

15．已知点$A(-2,0)$，$B(0,2)$，动点M满足$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则点$M$到直线$y=x-2$的距离可以是___________.（写出一个符合题意的整数值）

16．已知P点为圆O_1与圆O_2公共点，圆$O_1:(x-a)^2+(y-b)^2=b^2+1$，圆$O_2:(x-c)^2+(y-d)^2=d^2+1$，若$ac=8,\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则点$P$与直线$l$：$3x-4y-25=0$上任意一点$M$之间的距离的最小值为________.

四、解答题

17．试运用数形结合解下列问题：求函数$y=\dfrac{1+\sin x}{2-\cos x}$的值域．

18．已知圆C经过点$A(0,2),B(2,0)$，圆C的圆心在圆$x^2+y^2=2$的内部，且直线$3x+4y-5=0$被圆C所截得的弦长为$2\sqrt{3}$．点P为圆C上异于A，B的任意一点，直线PA与x轴交于点M，直线PB与y轴交于点N．

（1）求圆C的方程；

（2）若直线$y=x+1$与圆C交于A_1，A_2两点，求$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}$．

19．已知圆C：$(x-1)^2+(y-2)^2=4$．

（1）求圆心C的坐标及半径长；

（2）求直线l：$y=x+3$被圆C所截得的弦AB的长．

20．已知动圆E过定点$P(2,0)$，且y轴被圆E所截得的弦长恒为4．

（1）求圆心E的轨迹方程．

（2）过点P的直线l与E的轨迹交于A，B两点，$M(-2,0)$，证明：点P到直线AM，BM的距离相等．

21．已知在平面直角坐标系xOy中，点$A(0,3)$，直线$l:y=2x-4$．设圆C的半径为1，圆心在直线l上．

（1）若圆心C也在直线$y=x-1$上，过点A作圆C的切线，求切线的方程；

（2）若圆C上存在点M，使$|MA|=2|MO|$，求圆心C的横坐标a的取值范围．

22．已知动圆 M 经过定点 $F_1(-1,0)$，且与圆 $F_2:(x-1)^2+y^2=8$ 相内切．

（1）求动圆圆心 M 的轨迹 C 的方程；

（2）设点 T 在 $x=2$ 上，过点 T 的两条直线分别交轨迹 C 于 A，B 和 P，Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率和直线 PQ 的斜率之和．

专题36 直线与圆、圆与圆的位置关系

【考点预测】

一．直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系有3种，相离，相切和相交

二．直线与圆的位置关系判断

（1）几何法（圆心到直线的距离和半径关系）

圆心(a,b)到直线$Ax+By+C=0$的距离，则$d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$：

$d<r\Leftrightarrow$直线与圆相交，交于两点P,Q，$|PQ|=2\sqrt{r^2-d^2}$；

$d=r\Leftrightarrow$直线与圆相切；

$d>r\Leftrightarrow$直线与圆相离

（2）代数方法（几何问题转化为代数问题即交点个数问题转化为方程根个数）

由$\begin{cases}Ax+By+C=0\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\end{cases}$，

消元得到一元二次方程$px^2+qx+t=0$，$px^2+qx+t=0$判别式为Δ，则：

$\Delta>0\Leftrightarrow$直线与圆相交；

$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与圆相切；

$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与圆相离．

三．两圆位置关系的判断

用两圆的圆心距与两圆半径的和差大小关系确定，具体是：

设两圆O_1,O_2的半径分别是R,r，（不妨设$R>r$），且两圆的圆心距为d，则：

$d<R+r\Leftrightarrow$两圆相交；

$d=R+r\Leftrightarrow$两圆外切；

$R-r<d<R+r\Leftrightarrow$两圆相离

$d=R-r\Leftrightarrow$两圆内切；

$0\le d<R-r\Leftrightarrow$两圆内含（$d=0$时两圆为同心圆）

设两个圆的半径分别为R，r，$R>r$，圆心距为d，则两圆的位置关系可用下表来表示：

位置关系	相离	外切	相交	内切	内含
几何特征	$d>R+$	$d=R+r$	$R-r<d<R+$	$d=R-r$	$d<R-r$
代数特征	无实数解	一组实数解	两组实数解	一组实数解	无实数解

公切线条数	4	3	2	1	0

【方法技巧与总结】

关于圆的切线的几个重要结论

（1）过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的圆的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$．

（2）过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的圆的切线方程为

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

（3）过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的圆的切线方程为

$x_0x+y_0y+D\cdot\dfrac{x+x_0}{2}+E\cdot\dfrac{y+y_0}{2}+F=0$

（4）求过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 的圆的切线方程时，应注意理解：

①所求切线一定有两条；

②设直线方程之前，应对所求直线的斜率是否存在加以讨论．设切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，利用圆心到切线的距离等于半径，列出关于 k 的方程，求出 k 值．若求出的 k 值有两个，则说明斜率不存在的情形不符合题意；若求出的 k 值只有一个，则说明斜率不存在的情形符合题意．

【题型归纳目录】

题型一：直线与圆的相交关系（含弦长、面积问题）

题型二：直线与圆的相切关系、切点弦问题

题型三：直线与圆的相离关系

题型四：圆与圆的位置关系

题型五：两圆的公共弦问题

【典例例题】

题型一：直线与圆的相交关系（含弦长、面积问题）

例 1．（2023・青海玉树・高三阶段练习（理））已知直线 $x+y-\sqrt{3}a=0$ 与圆 C：$(x+1)^2+(y-1)^2=2a^2-2a+1$ 相交于点 A，B，若 $\triangle ABC$ 是正三角形，则实数 $a=$（　　）

A．-2　　　　B．2　　　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　　　D．$\dfrac{1}{2}$

答案：D

【解析】设圆 C 的半径为 r，由 $2a^2-2a+1=2\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$ 可得，$r=\sqrt{2a^2-2a+1}$

因为 $\triangle ABC$ 是正三角形，所以点 $C(-1,1)$ 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$

即$\frac{\left|-1+1-\sqrt{3}a\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2a^2-2a+1}$，两边平方得$\frac{3a^2}{2}=\frac{3}{4}\left(2a^2-2a+1\right)$，$a=\frac{1}{2}$

故选：D

例 2．（2023·全国·高三专题练习）已知直线$y=kx(k>0)$与圆$C:(x-2)^2+(y-1)^2=4$相交于 A，B 两点$|AB|=2\sqrt{3}$，则 k=（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{5}{12}$

答案：B

【解析】圆$C:(x-2)^2+(y-1)^2=4$的圆心$C(2,1)$，$r=2$

所以圆心$C(2,1)$到直线$y=kx(k>0)$的距离为d，则$d=\frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}$，

而$d=\sqrt{r^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{4-3}=1$，所以$d=\frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得：$k=\frac{4}{3}$.

故选：B.

例 3．（多选题）（2023·山东青岛·二模）已知$C:x^2+y^2-6x=0$，则下述正确的是（　　）

A．圆 C 的半径$r=3$

B．点$\left(1,2\sqrt{2}\right)$在圆 C 的内部

C．直线$l:x+\sqrt{3}y+3=0$与圆 C 相切

D．圆$C':(x+1)^2+y^2=4$与圆 C 相交

答案：ACD

【解析】由$x^2+y^2-6x=0$，得$(x-3)^2+y^2=9$，则圆心$C(3,0)$，半径$r_1=3$，

所以 A 正确，

对于 B，因为点$\left(1,2\sqrt{2}\right)$到圆心的距离为$\sqrt{(3-1)^2+(0-2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}>3$，所以点$\left(1,2\sqrt{2}\right)$在圆 C 的外部，所以 B 错误，

对于 C，因为圆心$C(3,0)$到直线$l:x+\sqrt{3}y+3=0$的距离为$d=\frac{|3+3|}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=3=r_1$，

所以直线$l:x+\sqrt{3}y+3=0$与圆 C 相切，所以 C 正确，

对于 D，圆$C':(x+1)^2+y^2=4$的圆心为$C'(-1,0)$，半径$r_2=2$，

因为$|CC'|=\sqrt{(3+1)^2}=4$，$r_1-r_2<4<r_1+r_2$，

所以圆$C':(x+1)^2+y^2=4$与圆 C 相交，所以 D 正确，

故选：ACD

例 4．（多选题）（2023·全国·南京外国语学校模拟预测）已知圆C：$(x-5)^2+(y-3)^2=2$，直线l：$y=ax+1$，则下列说法正确的是（　　）

A．当 $a=0$ 时，直线 l 与圆 C 相离

B．若直线 l 是圆 C 的一条对称轴，则 $a=\frac{2}{5}$

C．已知点 N 为圆 C 上的动点，若直线 l 上存在点 P，使得 $\angle NPC=45°$，则 a 的最大值为 $\frac{6}{7}$

D．已知 $M\left(5,3+\sqrt{2}\right)$，$A(s,t)$，$N$ 为圆 C 上不同于 M 的一点，若 $\angle MAN=90°$，则 t 的最大值为 $\frac{5\sqrt{2}+12}{4}$

答案：ABD

【解析】当 $a=0$ 时，直线 l：$y=1$，圆心 $C(5,3)$，半径 $\sqrt{2}$，圆心 C 到直线 l 的距离 $d=2>\sqrt{2}$，所以直线 l 与圆心 C 相离，故 A 正确；

若直线 l 是圆 C 的一条对称轴，则直线过圆 C 的圆心，即 $3=5a+1$，解得 $a=\frac{2}{5}$，故 B 正确；

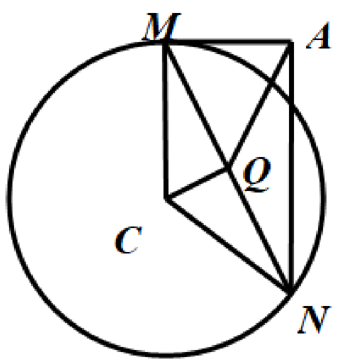
当 PN 与圆 C 相切时，$\angle NPC$ 取得最大值，只需此时 $\angle NPC\geq 45°$，即 $|PC|\leq 2$ 时，故圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|5a+1-3|}{\sqrt{a^2+1}}\leq 2$，解得 $0\leq a\leq\frac{20}{21}$，故 C 错误；

设 MN 的中点为 $Q(x_0,y_0)$，$\angle QMC=\alpha$，则 $t\leq y_0+|QA|=y_0+|QM|=y_0+\sqrt{2}\cos\alpha$，

$y_0=3+|CQ|\sin\alpha=3+\sqrt{2}\sin^2\alpha$，故

$t\leq 3+\sqrt{2}\sin^2\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha=-\sqrt{2}\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{12+5\sqrt{2}}{4}\leq\frac{12+5\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $\alpha=60°$ 且点 A 在点 Q 正上方时，等号成立，故 D 正确．

故选：ABD．



例 5．（多选题）（2023 • 江苏 • 高二单元测试）设有一组圆 $C_k:(x-k)^2+(y-k)^2=4(k\in\mathrm{R})$，下列命题正确的是（　　）

A．不论 k 如何变化，圆心 C_k 始终在一条直线上

B．存在圆 C_k 经过点（3，0）

C．存在定直线始终与圆C_k相切

D．若圆C_k上总存在两点到原点的距离为 1，则$k\in\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

答案：ACD

【解析】根据题意，圆$C_k:(x-k)^2+(y-k)^2=4(k\in\mathrm{R})$，其圆心为$(k,k)$，半径为 2，

依次分析选项：

对于 A，圆心为(k,k)，其圆心在直线$y=x$上，A 正确；

对于 B，圆$C_k:(x-k)^2+(y-k)^2=4$，

将$(3,0)$代入圆的方程可得$(3-k)^2+(0-k)^2=4$，

化简得$2k^2-6k+5=0$，$\Delta=36-40=-4<0$，方程无解，

所以不存在圆C_k经过点$(3,0)$，B 错误；

对于 C，存在直线$y=x\pm2\sqrt{2}x$，即$x-y+2\sqrt{2}=0$或$x-y-2\sqrt{2}=0$，

圆心(k,k)到直线$x-y+2\sqrt{2}=0$或$x-y-2\sqrt{2}=0$的距离$d=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$，

这两条直线始终与圆C_k相切，C 正确，

对于 D，若圆C_k上总存在两点到原点的距离为 1，

问题转化为圆$x^2+y^2=1$与圆C_k有两个交点，

圆心距为$\sqrt{k^2+k^2}=\sqrt{2}|k|$，

则有$1<\sqrt{2}|k|<3$，

解可得：$-\frac{3\sqrt{2}}{2}<k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\frac{\sqrt{2}}{2}<k<\frac{3\sqrt{2}}{2}$，D 正确.

故选：ACD.

例 6．（多选题）（2023·河北沧州·二模）已知直线$l:ax+by-2=0$，圆$C:(x-a)^2+(y-b)^2=2$，则下列结论正确的有（　　）

A．若$a-b=1$，则直线l恒过定点$(2,-2)$

B．若$a=b$，则圆C可能过点$(0,3)$

C．若$a^2+b^2=2$，则圆C关于直线l对称

D．若$a^2+b^2=1$，则直线l与圆C相交所得的弦长为 2

答案：ACD

【解析】当$a-b=1$时，点$(2,-2)$恒在l上，故选项 A 正确；

当$a=b$时，将点$(0,3)$代入$(x-a)^2+(y-a)^2=2$，得$2a^2-6a+7=0$，该方程无解，故选项 B 错误；

当 $a^2+b^2=2$ 时，直线 l 恒过圆 C 的圆心，故选项 C 正确；

当 $a^2+b^2=1$ 时，l 与 C 相交所得的弦长为 $2\sqrt{2-\left(\frac{|a^2+b^2-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}=2$，故选项 D 正确.

故选：ACD

例 7．（多选题）（2023·河北·高三阶段练习） 已知圆 $M:(x+1)^2+(y+1)^2=4$，直线 $l:x+y-2=0$，P 为直线 l 上的动点，过点 P 作圆 M 的切线 PA,PB，切点为 A，B，则下列说法正确的是（　　）

A．四边形 $MAPB$ 面积的最小值为 4

B．当直线 AB 的方程为 $x+y=0$ 时，$\angle APB$ 最小

C．已知圆上有且仅有两点到直线 l 的距离相等且为 d，则 $d\in(2\sqrt{2}-2,2\sqrt{2}+2)$

D．若动直线 $l_1\perp l$，且 l_1 交圆 M 于 C、D 两点，且弦长 $CD\in(2\sqrt{2},2\sqrt{3})$，则直线 l_1 纵截距的取值范围为 $(-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},2)$

答案：ACD

【解析】四边形 $MAPB$ 面积的最小值即为 $PM\perp l$ 时，而 $|PM|_{\min}=\frac{|-1-1-2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

$|PA|=\sqrt{|PM|^2-R^2}=2$，所以 $S_{\min}=2\times\frac{1}{2}\times|PA|\times R=4$，A 正确；

当直线 AB 的方程为 $x+y=0$ 时，此时 $|PM|$ 最小，$\angle APB$ 最大，且为 $90°$，B 错误；

圆上点到直线 l 的距离取值范围为 $[2\sqrt{2}-2,2\sqrt{2}+2]$，除去最远以及最近距离外均有两点到直线的距离相等，即为 $(2\sqrt{2}-2,2\sqrt{2}+2)$，C 正确；

设 M 到直线 l_1 的距离为 d，因为 $|CD|\in(2\sqrt{2},2\sqrt{3})$，且 $\frac{1}{4}|CD|^2=r^2-d^2$，所以 $d^2=r^2-\frac{1}{4}|CD|^2$，则 $d\in(1,\sqrt{2})$，

设 $l_1:x-y+m=0,1<\frac{|-1-(-1)+m|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$，即 $\sqrt{2}<|m|<2$，所以 $m\in(-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},2)$，D 正确，

故选：ACD.

例 8．（多选题）（2023·全国·高三专题练习） 已知圆 C 的方程为 $(x+1)^2+y^2=4$，则（　　）

A．若过点 $(0,1)$ 的直线被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，则该直线方程为 $y=1$

B．圆 C 上的点到直线 $3x-4y-12=0$ 的最大距离为 5

C．在圆 C 上存在点 D，使得 D 到点 $(-1,1)$ 的距离为 4

D．圆 C 上的任一点 M 到两个定点 $O(0,0)$、$A(3,0)$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$

答案：BD

【解析】圆 C 的圆心为 $C(-1,0)$，半径为 $r=2$.

对于 A 选项，若过点 $(0,1)$ 的直线的斜率不存在，则该直线的方程为 $x=0$，

由勾股定理可知，圆心 C 到直线 $x=0$ 的距离为 $\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$，

而圆心 C 到直线 $x=0$ 的距离为 1，合乎题意.

若所求直线的斜率存在，设直线的方程为 $y=kx+1$，

则圆心 C 到直线 $y=kx+1$ 的距离为 $d=\frac{|1-k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=0$，

此时直线的方程为 $y=1$.

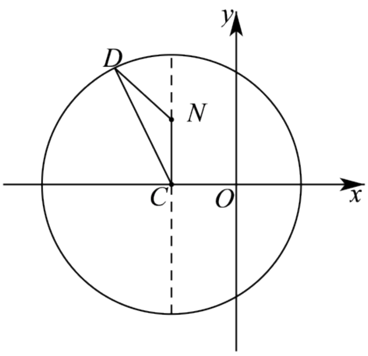
综上所述，满足条件的直线的方程为 $x=0$ 或 $y=1$，A 错；

对于 B 选项，圆心 C 到直线 $3x-4y-12=0$ 的距离为 $\frac{|-3-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$，

因此，圆 C 上的点到直线 $3x-4y-12=0$ 的最大距离为 $3+2=5$，B 对；

对于 C 选项，记点 $N(-1,1)$，Q $(-1+1)^2+1^2<4$，即点 N 在圆 C 内，

且 $|NC|=\sqrt{(-1+1)^2+1^2}=1$，如下图所示：



当 D、C、N 三点不共线时，根据三角形三边关系可得 $\left||DC|-|CN|\right|<|DN|<|DC|+|CN|$，即 $1<|DN|<3$，

当 D、C、N 三点共线且当点 N 在线段 DC 上时，$|DN|=|DC|-|CN|=1$，

当 D、C、N 三点共线且当点 C 在线段 DN 上时，$|DN|=|DC|+|CN|=3$.

综上所述，$1\le|DN|\le3$，C 错；

对于 D 选项，设点 $M(x,y)$，则 $|MA|=2|MO|$，即 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，

整理可得 $(x+1)^2+y^2=1$，即点 M 的轨迹为圆 C，D 对.

故选：BD.

例 9．（多选题）（2023·全国·模拟预测）（多选）已知圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$，直线$l:(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$.则以下几个命题正确的有（　　）

A．直线l恒过定点$(3,1)$

B．圆C被y轴截得的弦长为$4\sqrt{6}$

C．直线l与圆C恒相交

D．直线l被圆C截得最长弦长时，直线l的方程为$2x-y-5=0$

答案：ABC

【解析】直线l方程整理得$m(2x+y-7)+x+y-4=0$，由$\begin{cases}2x+y-7=0\\x+y-4=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$，∴直线$l$过定点$P(3,1)$，A 正确；

在圆方程中令$x=0$，得$1+(y-2)^2=25$，$y=2\pm2\sqrt{6}$，∴y轴上的弦长为$4\sqrt{6}$，B 正确；

$(3-1)^2+(1-2)^2=5<25$，∴$P(3,1)$在圆内，直线与圆一定相交，C 正确；

直线l被圆C截得弦最长时，直线过圆心$(1,2)$，则$(2m+1)+2(m+1)-7m-4=0$，$m=-\frac{1}{3}$，直线方程为$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{5}{3}=0$，即$x+2y-5=0$．D 错．

故选：ABC．

例 10．（多选题）（2023·辽宁·一模）已知圆的圆心在直线$x=-2$上，且与$l_1:x+\sqrt{3}y-2=0$相切于点$Q(-1,\sqrt{3})$，过点$D(-1,0)$作圆的两条互相垂直的弦AE、BF．则下列结论正确的是(　　)

A．圆的方程为：$(x+2)^2+y^2=4$

B．弦AE的长度的最大值为$2\sqrt{3}$

C．四边形$ABEF$面积的最大值为$4\sqrt{3}$

D．该线段AE、BF的中点分别为M、N，直线MN恒过定点$\left(-\frac{3}{2},0\right)$

答案：AD

【解析】设圆心为$C(-2,b)$，圆的半径为r，

由题可知$\frac{|-2+\sqrt{3}b-2|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\sqrt{(-2+1)^2+(b-\sqrt{3})^2}\Rightarrow b=0$，$r=\sqrt{(-2+1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$，

∴圆的方程为：$(x+2)^2+y^2=4$，故 A 正确；

当AE过圆心C时，AE长度最长为圆的直径 4，故 B 错误；

如图，

线段 AE、BF 的中点分别为 M、N，设 $|CN|=d$， $0\le d\le 1$.

则 $|CM|=|ND|=\sqrt{|CD|^2-|CN|^2}=\sqrt{1-d^2}$，

$|BF|=2\sqrt{4-d^2}$， $|AE|=2\sqrt{4-|CM|^2}=2\sqrt{4-1+d^2}=2\sqrt{3+d^2}$，

$S_{ABEF}=\frac{1}{2}\cdot|BF|\cdot|AE|=2\sqrt{(4-d^2)(3+d^2)}=2\sqrt{-(d^2)^2+d^2+12}$，

$\therefore d^2=\frac{1}{2}$时，四边形 ABEF 面积有最大值$2\sqrt{-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+12}=7$，故 C 错误；

$\because$四边形 $MDNC$ 为矩形，则 MN 与 CD 互相平分，即 MN 过 CD 中点$(-\frac{3}{2},0)$，故 D 正确.

故选：AD.

例 11．（2023 • 全国 • 高二专题练习）若圆$C:x^2+y^2-2x-2y=0$上至少有三个不同点到直线$l:y=kx$的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 k 的取值范围__.

答案：$[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$

【解析】由圆$C:x^2+y^2-2x-2y=0$的标准方程$C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$，

可得圆心坐标为$C(1,1)$，半径为$r=\sqrt{2}$，

圆上至少有三个不同的点到直线$l:y=kx$的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

则圆心到直线的距离应不大于等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$\frac{|1-k|}{\sqrt{1+k^2}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，

整理得$k^2-4k+1\le 0$，解得$2-\sqrt{3}\le k\le 2+\sqrt{3}$，

即实数 k 的取值范围是$[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$.

故答案为：$[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$.

例 12．（2023 • 山东烟台 • 三模）已知动点 P 到点 $A(1,0)$的距离是到点 $B(1,3)$ 的距离的 2 倍，记 P 点的轨迹为C，直线 $y=kx+1$交 C 于 M， N 两点，$Q(1,4)$，若$\triangle QMN$ 的面积为 2，则实数 k 的值为____________.

答案：-7 或 1

【解析】设 $P(x,y)$，则有$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$

整理得$(x-1)^2+(y-4)^2=4$，即 P 点的轨迹 C 为以$(1,4)$为圆心以 2 为半径的圆

点 $Q(1,4)$ 到直线 $y=kx+1$ 的距离$\frac{|k+1-4|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|k-3|}{\sqrt{1+k^2}}$

直线 $y=kx+1$ 交 C 于 M， N 两点，则 $|MN|=2\sqrt{4-\left(\frac{|k-3|}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2}$

则 $VQMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{4-\left(\frac{|k-3|}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2}\times\frac{|k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=2$

解之得 $k=-7$ 或 $k=1$

故答案为： -7 或 1

例 13．（2023 • 河南 • 高三阶段练习（文））直线 $y=2x+1$ 与圆 C： $x^2+y^2-4x-5=0$ 相交于 M，N 两点，则 $|MN|=$______.

答案：4

【解析】圆 C： $(x-2)^2+y^2=9$，其圆心坐标为 $(2,0)$，半径为 3.

圆心 $(2,0)$ 到直线 $2x-y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|2\times 2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$，

则 $|MN|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{9-5}=4$．

故答案为:4.

例 14．（2023 • 天津 • 高考真题）若直线 $x-y+m=0(m>0)$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 相交所得的弦长为 m，则 $m=$_____.

答案： 2

【解析】圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 的圆心坐标为 $(1,1)$，半径为 $\sqrt{3}$，

圆心到直线 $x-y+m=0(m>0)$ 的距离为 $\frac{|1-1+m|}{\sqrt{2}}=\frac{m}{\sqrt{2}}$，

由勾股定理可得 $\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2=3$，因为 $m>0$，解得 $m=2$．

故答案为： 2．

例 15．（2023 • 全国 • 模拟预测）在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $A(0,-3)$ 的直线 l 与圆 $C:x^2+(y-2)^2=9$ 相交于 M，N 两点，若 $S_{\triangle AON}=\frac{6}{5}S_{\triangle ACM}$，则直线 l 的斜率为__________.

答案： $\pm\frac{3\sqrt{14}}{7}$

【解析】由题意得 $C(0,2)$，直线 MN 的斜率存在，设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$，直线 MN 的方程为 $y=kx-3$，与 $x^2+(y-2)^2=9$ 联立，得 $(k^2+1)x^2-10kx+16=0$，

$\Delta=100k^2-64(k^2+1)=36k^2-64>0$，得 $k^2>\frac{16}{9}$， $x_1+x_2=\frac{10k}{k^2+1}$， $x_1x_2=\frac{16}{k^2+1}$.因为

$S_{\triangle AON}=\frac{6}{5}S_{\triangle ACM}$，所以$\frac{1}{2}\times3\times|x_2|=\frac{6}{5}\times\frac{1}{2}\times5\times|x_1|$，则$|x_2|=2|x_1|$，于是$x_2=2x_1$，（由点 A 及 C 在 y 轴上可判断出 x_1，x_2 同号）

所以$\begin{cases}3x_1=\frac{10k}{k^2+1}\\2x_1^2=\frac{16}{k^2+1}\end{cases}$，两式消去 x_1，得 $k^2=\frac{18}{7}$，满足$\Delta>0$，所以$k=\pm\frac{3\sqrt{14}}{7}$.

故答案为：$\pm\frac{3\sqrt{14}}{7}$

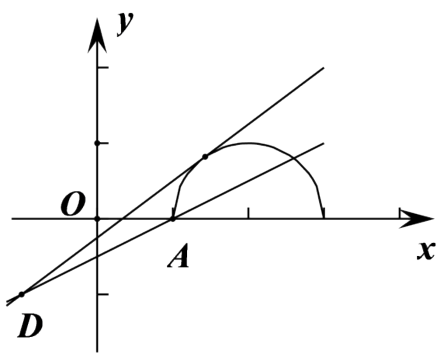
例 16．（2023·全国·高三专题练习（文））已知曲线 $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 与直线 $kx-y+k-1=0$ 有两个不同的交点，则实数 k 的取值范围是_____.

答案：$[\frac{1}{2},\frac{3}{4})$

【解析】由曲线 $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 可得 $(x-2)^2+y^2=1(y\geq0)$

为以 $(2,0)$ 为圆心，半径为 1 的上半圆

直线 $kx-y+k-1=0\Leftrightarrow k(x+1)-(y+1)=0$ 过点 $D(-1,-1)$，如图



过 $D(-1,-1)$ 和 $A(1,0)$ 两点的直线斜率 $k=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$；

设过 $D(-1,-1)$ 的直线 $y+1=k(x+1)$ 与半圆 $(x-2)^2+y^2=1(y\geq0)$ 相切，结合图像可知，显然斜率存在，故圆心到直线的距离等于半径，即 $\frac{|2k+k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$

解得 $k=\frac{3}{4}$ 或 $k=0$（舍去，与下半圆相切）

结合图像，故要使曲线 $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 与直线 $kx-y+k-1=0$ 有两个不同的交点，则实数 k 的取值范围是$[\frac{1}{2},\frac{3}{4})$

故答案为：$[\frac{1}{2},\frac{3}{4})$

例 17．（2023·全国·高三专题练习）已知直线 l：$2mx-y-8m-3=0$ 和圆 C：

$x^2+y^2-6x+12y+20=0$.

（1）求圆C的圆心、半径

（2）求证：无论m为何值，直线l总与圆C有交点；

（3）m为何值时，直线l被圆C截得的弦最短？求出此时的弦长.

【解析】（1）因为$D=-6,E=12,F=20$

所以$-\frac{D}{2}=-\frac{-6}{2}=3$，$-\frac{E}{2}=-\frac{12}{2}=-6$，所以$C(3,-6)$，

所以半径$R=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\frac{1}{2}\sqrt{36+144-80}=5$.

（2）由$2mx-y-8m-3=0$得$(2x-8)m-(y+3)=0$，

由$\begin{cases}2x-8=0\\ y+3=0\end{cases}$得$x=4,y=-3$，所以直线$l$经过定点$M$ $(4,-3)$，

因为$\sqrt{(4-3)^2+(-3+6)^2}=\sqrt{10}<5$，所以定点$M$ $(4,-3)$在圆C内，

所以无论m为何值，直线l总与圆C有交点.

（3）设圆心C到直线l的距离为d，直线l被圆C截得的弦为AB，

则$|AB|=2\sqrt{R^2-d^2}$，则当d最大值时，弦长$|AB|$最小，

因为$d\le|CM|=\sqrt{(4-3)^2+(-3+6)^2}=\sqrt{10}$，当且仅当$CM\perp l$时，$d$取最大值$\sqrt{10}$，

$|AB|$取最小值$2\sqrt{25-10}=2\sqrt{15}$，此时$2m=-\frac{1}{k_{CM}}=-\frac{1}{\frac{-3+6}{4-3}}=-\frac{1}{3}$，所以$m=-\frac{1}{6}$.

所以$m=-\frac{1}{6}$时，直线l被圆C截得的弦最短，弦长为$2\sqrt{15}$.

例 18.（2023·全国·模拟预测）在平面直角坐标系xOy中，点$M(3,0)$，$N\left(\frac{3}{2},0\right)$，直线$l:(2m+1)x-(4m-1)\ y+m-1=0(m\ne0)$，动点$P$满足$|PM|=2|PN|$，则动点$P$的轨迹$\Gamma$的方程为______，若$\Gamma$的对称中心为$C$，$l$与$\Gamma$交于$A$，$B$两点，则的方程为$\triangledown ABC$面积的最大值为______.

答案：$(x-1)^2+y^2=1$　　$\frac{1}{2}$

【解析】设$P(x,y)$，由题意得$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2}$，

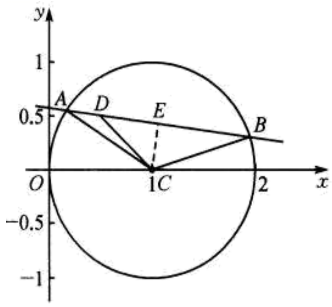
化简得Γ的方程为$(x-1)^2+y^2=1$，$C(1,0)$；

直线l的方程可化为$(x+y-1)+m(2x-4y+1)=0$，由$\begin{cases}x+y-1=0\\ 2x-4y+1=0\end{cases}$

解得$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$，所以直线$l$过定点$D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

又 $DC^2=\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}<1$，所以点 $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 在圆 C 的内部；

作直线 $CE\perp l$，垂足为 E，



设 $\angle DCE=\theta\left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，易求 $|DC|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $|CE|=|DC|\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$，

所以 $|AB|=2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)^2}=2\sqrt{1-\frac{\cos^2\theta}{2}}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\cos^2\theta-1\right)^2+\frac{1}{2}}$，

所以当 $\cos^2\theta=1$，即 $\theta=0$ 时，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{1}{2}$；

故答案为：$(x-1)^2+y^2=1$，$\frac{1}{2}$.

【方法技巧与总结】

（1）研究直线与圆的相交问题，应牢牢记住三长关系，即半径长 $\frac{l}{2}$、弦心距 d 和半径 r 之间形成的数量关系 $(\frac{l}{2})^2+d^2=r^2$.

（2）弦长问题

①利用垂径定理：半径 r，圆心到直线的距离 d，弦长 l 具有的关系 $r^2=d^2+(\frac{l}{2})^2$，这也是求弦长最常用的方法.

②利用交点坐标：若直线与圆的交点坐标易求出，求出交点坐标后，直接用两点间的距离公式计算弦长.

③利用弦长公式：设直线 $l:y=kx+b$，与圆的两交点 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，将直线方程代入圆的方程，消元后利用根与系数关系得弦长：$l=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+k^2)}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$.

题型二：直线与圆的相切关系、切点弦问题