专题 1.3　乘法公式【十大题型】

【北师大版】

题型梳理

举一反三

【知识点　乘法公式】

平方差公式：(a+b)(a-b)=a²-b²。两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差。这个公式叫做平方差公式。

完全平方公式：(a+b)²=a²+2ab+b²，(a-b)²=a²-2ab+b²。两个数的和(或差)的平方，等于它们的平方和，加上(或减去)它们积的 2 倍。这两个公式叫做完全平方公式。

【题型 1　判断运用乘法公式计算的正误】

【例 1】（2023 春·贵州毕节·七年级统考期末）计算$(x-y+3)(x+y-3)$时，下列变形正确的是（　）

A．$[(x-y)+3][(x+y)-3]$　　B．$[(x+3)-y][(x-3)+y]$

C．$[x-(y+3)][x+(y-3)]$　　D．$[x-(y-3)][x+(y-3)]$

【答案】D

【分析】将$(y-3)$看做一个整体，则x是相同项，互为相反项的是$(y-3)$，对照平方差公式变形即可求解．

【详解】解：$(x-y+3)(x+y-3)=[x-(y-3)][x+(y-3)]$，

故选：D．

【点睛】本题考查了平方差公式，解题的关键是找出相同项和相反项．

【变式 1-1】（2023 春·浙江杭州·七年级校考期中）下列运算正确的是（　）

A．$(x+y)(-y+x)=x^2-y^2$　　　　B．$(-x+y)^2=-x^2+2xy+y^2$

C．$(-x-y)^2=-x^2-2xy-y^2$　　　　D．$(x+y)(y-x)=x^2-y^2$

【答案】A

【分析】根据平方差公式和完全平方公式，逐个进行判断即可．

【详解】解：A、$(x+y)(-y+x)=x^2-y^2$，故 A 正确，符合题意；

B、$(-x+y)^2=x^2-2xy+y^2$，故 B 不正确，不符合题意；

C、$(-x-y)^2=x^2+2xy+y^2$，故 C 不正确，不符合题意；

D、$(x+y)(y-x)=y^2-x^2$，故 D 不正确，不符合题意；

故选：A．

【点睛】本题主要考查根据平方差公式和完全平方公式，解题的关键是掌握平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$和完全平方公式$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$．

【变式 1-2】（2023 春·天津滨海新·七年级统考期末）在下列多项式的乘法中，不可以用平方差公式计算的是（　）

A．$(x+y)(x-y)$　　　　B．$(-x+y)(x+y)$

C．$(-x-y)(-x+y)$　　　　D．$(x-y)(-x+y)$

【答案】D

【分析】根据平方差公式是两个数的和与这两个数的差相乘等于这两个数的平方差，由此进行判断即可．

【详解】A、B、C 选项都是两个数的和与这两个数的差相乘，可以使用平方差公式，

D 选项变形后为$-(x-y)^2$，不能使用平方差公式；

故选：D．

【点睛】此题考查了平方差公式，熟练掌握平方差公式是解本题的关键．

【变式 1-3】（2023 春·广东茂名·七年级统考期中）下列多项式不是完全平方式的是(　)．

A．x^2-4x-4　　B．$\frac{1}{4}+m^2+m$　　C．$a^2+2ab+b^2$　　D．t^2+4t+4

【答案】A

【分析】根据$a^2\pm 2ab+b^2$的形式判断即可；

【详解】x^2-4x-4不是完全平方公式，故 A 符合题意；

$\frac{1}{4}+m^2+m=\left(\frac{1}{2}+m\right)^2$，故 B 不符合题意；

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，故 C 不符合题意；

$t^2+4t+4=(t+2)^2$，故 D 不符合题意；

故选：A．

【点睛】本题主要考查了完全平方公式的判断，准确分析是解题的关键．

【题型 2　利用完全平方式确定系数】

【例 2】（2023 春·江苏扬州·七年级统考期末）若将多项式$4a^2-2a+1$加上一个单项式成为一个完全平方式，则这个单项式可以是________．（只要写出符合条件的一个）

【答案】$-2a$，$6a$，$-\frac{3}{4}$，$-3a^2$．

【分析】根据完全平方公式的特点分情况讨论：若把$4a^2$和 1 看成两个平方项，则该完全平方式可以；是$(2a-1)^2$或$(2a+1)^2$；②若把$4a^2$看成一个平方项，把$-2a$看成二倍两项积，则该完全平方式可以是$\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2$；③若把 1 看成一个平方项，把$-2a$看成二倍两项积，则该完全平方式可以是$(a-1)^2$．分别算出所需添加的单项式即可．

【详解】①若把$4a^2$和 1 看成两个平方项，则该完全平方式可以是$(2a-1)^2$或$(2a+1)^2$，

$\because(2a-1)^2=4a^2-4a+1=4a^2-2a+1+(-2a)$，

$\therefore$这个单项式可以是$-2a$；

$\because(2a+1)^2=4a^2+4a+1=4a^2-2a+1+6a$，

$\therefore$这个单项式可以是$6a$；

②若把$4a^2$成一个平方项，把$-2a$看成二倍两项积，则该完全平方式可以是$\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2$，

$\because\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2=4a^2-2a+\frac{1}{4}=4a^2-2a+1+\left(-\frac{3}{4}\right)$，

$\therefore$这个单项式可以是$-\frac{3}{4}$；

③若把 1 成一个平方项，把$-2a$看成二倍两项积，则该完全平方式可以是$(a-1)^2$，

$\because(a-1)^2=a^2-2a+1=4a^2-2a+1+(-3a^2)$，

$\therefore$这个单项式可以是$-3a^2$．

综上，添加的这个单项式可以是$-2a$，$6a$，$-\frac{3}{4}$，$-3a^2$．

故答案为：$-2a$，$6a$，$-\frac{3}{4}$，$-3a^2$．

【点睛】本题主要考查了完全平方公式，熟练掌握完全平方公式的特点，进行分类讨论是解题的关键．

【变式 2-1】（2023 春·四川达州·七年级校考期中）若$x^2+2(m-3)x+1$是完全平方式，$x+n$与$x+2$的乘积中不含 x 的一次项，则n^m的值为________．

【答案】4 或 16

【分析】利用完全平方公式，以及多项式乘以多项式法则确定出 m 与 n 的值，代入原式计算即可求出值．

【详解】解：$\because x^2+2(m-3)x+1$是完全平方式，

$\therefore m-3=\pm 1$，

$\therefore m=4$或$m=2$，

$\because x+n$与$x+2$的乘积中不含 x 的一次项，$(x+n)(x+2)=x^2+(n+2)x+2n$，

$\therefore n+2=0$，

$\therefore n=-2$，

当$m=4$，$n=-2$时，$n^m=(-2)^4=16$；

当$m=2$，$n=-2$时，$n^m=(-2)^2=4$，

则$n^m=4$或 16，

故答案为：4 或 16．

【点睛】本题考查了完全平方式，以及多项式乘多项式，熟练掌握公式及法则是解本题的关键．

【变式 2-2】（2023 春·七年级课时练习）若$9x^2-(k-1)xy+25y^2$是关于x的完全平方式，则

$k=$__________．

【答案】31或-29/-29或31

【分析】由$9x^2-(k-1)xy+25y^2$是关于x的完全平方式，得出$9x^2-(k-1)xy+25y^2=(3x\pm 5y)^2$，进而得出$-(k-1)=\pm 30$，即可求出$k$的值．

【详解】解：$\because 9x^2-(k-1)xy+25y^2$是关于$x$的完全平方式，

$\therefore 9x^2-(k-1)xy+25y^2=(3x\pm 5y)^2$，

$\therefore -(k-1)=\pm 30$，

解得：$k=31$或-29，

故答案为：31或-29

【点睛】本题考查了完全平方式，掌握完全平方式的特点，考虑两种情况是解决问题的关键．

【变式 2-3】 2023 春·福建泉州·七年级晋江市季延中学校考期中）已知 B 是含字母 x 的单项式，要使$x^2+B+\frac{1}{4}$是完全平方式，那么$B=$______．

【答案】 $\pm x$或x^4．

【分析】分类讨论：①当$x^2+B+\frac{1}{4}$是完全平方式时和当$B+x^2+\frac{1}{4}$是完全平方式时，再根据完全平方式的特

点即可得出答案.

【详解】解：分类讨论：①当$x^2+B+\frac{1}{4}$是完全平方式时.

$\because x^2+B+\frac{1}{4}=x^2+B+\left(\frac{1}{2}\right)^2$，

$\therefore B=\pm 2\times x\times\frac{1}{2}=\pm x$；

②当$B+x^2+\frac{1}{4}$是完全平方式时.

$\because B+x^2+\frac{1}{4}=B+2\times x^2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$，

$\therefore B=x^4$.

综上可知，$B=\pm x$或x^4.

故答案为：$\pm x$或x^4.

【点睛】本题考查完全平方式．掌握完全平方式的结构特征和利用分类讨论的思想是解题关键.

【题型 3　乘法公式的计算】

【例 3】（2023 春·云南昭通·七年级校考期末）计算：

(1)$(2m-n+3p)(2m+3p+n)$；

(2)化简求值：$(x-3)(x+3)-(x^2-2x+1)$，其中$x=\frac{1}{2}$.

【答案】(1)$4m^2+12mp+9p^2-n^2$

(2)$2x-10$，-9

【分析】（1）先把原式化为$[(2m+3p)-n][(2m+3p)+n]$，再利用平方差公式和完全平方公式计算即可；

（2）先利用平方差公式和去括号法则展开，再合并同类项，最后求值即可.

【详解】（1）解：原式$=[(2m+3p)-n][(2m+3p)+n]$

$=(2m+3p)^2-n^2$

$=4m^2+12mp+9p^2-n^2$；

（2）原式$=x^2-9-x^2+2x-1$

$=2x-10$，

当$x=\frac{1}{2}$时，

原式$=1-10$

$=-9$.

【点睛】本题考查了整式的混合运算以及平方差公式，熟练掌握整式的混合运算法则是解本题的关键.

【变式3-1】（2023春·山东东营·六年级统考期末）利用整式乘法公式计算.

(1)$100^2-98\times 102$；

(2)$(a+b+3)(a+b-3)$；

(3)$(-2m+3)(-2m-3)$；

(4)$\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^2$.

【答案】(1)4

(2)$a^2+2ab+b^2-9$

(3)$4m^2-9$

(4)$\frac{1}{4}x^2-2xy+4y^2$

【分析】（1）首先把98×102转化为$(100-2)\times(100+2)$，然后再根据平方差公式计算即可；

（2）利用平方差公式变形，然后再根据完全平方公式计算即可；

（3）根据平方差公式计算即可；

（4）根据完全平方公式计算即可.

【详解】（1）解：$100^2-98\times 102$

$=100^2-(100-2)\times(100+2)$

$=100^2-(100^2-2^2)$

$=100^2-100^2+2^2$

$=4$；

（2）解：$(a+b+3)(a+b-3)$

$=[(a+b)+3][(a+b)-3]$

$=(a+b)^2-3^2$

$=a^2+2ab+b^2-9$；

（3）解：$(-2m+3)(-2m-3)$

$=(-2m)^2-3^2$

$=4m^2-9$；

（4）解：$\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^2$

$=\frac{1}{4}x^2-2xy+4y^2$.

【点睛】本题考查了平方差公式和完全平方公式，解本题的关键在熟练掌握整式的乘法公式进行计算.

【变式 3-2】（2023 春·湖南永州·七年级校联考期中）$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{14^2}\right)=$____.

【答案】$\frac{15}{28}$

【分析】根据平方差公式得，$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{14^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{14}\right)\left(1+\frac{1}{14}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\ldots\times\frac{13}{14}\times\frac{15}{14}$，然后计算求解即可.

【详解】解：$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{14^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{14}\right)\left(1+\frac{1}{14}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\ldots\times\frac{13}{14}\times\frac{15}{14}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{15}{14}$

$=\frac{15}{28}$，

故答案为：$\frac{15}{28}$.

【点睛】本题考查了平方差公式的应用．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

【变式 3-3】（2023 春·江西抚州·七年级校联考期中）运用乘法公式计算：

(1)$(2m-3n)(-2m-3n)-(2m-3n)^2$

(2)$100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2$.

【答案】(1)$-8m^2+12mn$

(2)5050

【分析】(1)原式第一项利用平方差是化简，第二项利用完全平方公式展开，去括号合并即可得到结果；

(2)原式结合后，利用平方差公式化简，计算即可得到结果.

【详解】（1）原式$=9n^2-4m^2-4m^2+12mn-9n^2$

$=-8m^2+12mn$；

（2）原式$=(100+99)\times(100-99)+(98+97)\times(98-97)+\ldots+(2+1)\times(2-1)$

$=100+99+98+97+96+\ldots\ldots+1$

$=5050$．

【点睛】本题考查了平方差公式和完全平方公式的应用，熟练掌握运算法则是解题的关键．

【题型4　利用乘法公式求值】

【例4】（2023春·山东济南·七年级统考期末）设 $a=x-2022$，$b=x-2024$，$c=x-2023$．若$a^2+b^2=16$，则c^2的值是(　　)

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【答案】C

【分析】根据完全平方公式得出$ab=6$，$a-b=2$，进而根据已知条件得出$c^2=(a-1)(b+1)$，进而即可求解．

【详解】∵$a=x-2022$，$b=x-2024$，$c=x-2023$，

∴$a-1=x-2023=c=b+1$，$a-b=2$，

∵ $a^2+b^2=16$，

∴ $(a-b)^2+2ab=16$，

∴ $ab=6$，

∴ $c^2=(a-1)(b+1)$

$=ab+a-b-1$

$=6+2-1$

$=7$，

故选：C．

【点睛】本题考查了完全平方公式变形求值，根据题意得出$c^2=(a-1)(b+1)$是解题的关键．

【变式4-1】（2023春·广西贵港·七年级校考期末）若$x-y-7=0$，则代数式x^2-y^2-14y的值为_____．

【答案】49

【分析】先计算$x-y$的值，再将所求代数式利用平方差公式分解前两项后，将$x-y$的值代入化简计算，然后再代入计算即可求解．

【详解】解：∵$x-y-7=0$，

∴$x-y=7$，

∴x^2-y^2-14y

$=(x+y)(x-y)-14y$

$=7(x+y)-14y$

$=7x+7y-14y$

$=7(x-y)$

$=49$.

故答案为：49．

【点睛】本题主要考查因式分解的应用，通过平方差公式分解因式后整体代入是解题的关键．

【变式 4-2】（2023 春·湖南永州·七年级校考期中）（1）已知$a+\frac{1}{a}=3$，求$a^2+\frac{1}{a^2}$的值；

（2）已知$(a-b)^2=9$，$ab=18$，求a^2+b^2的值．

【答案】（1）7；（2）45

【分析】（1）根据完全平方和公式恒等变形后，代值求解即可得到答案；

（2）根据完全平方差公式，代值求解即可得到答案．

【详解】解：（1）$\because$ $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$，$a+\frac{1}{a}=3$，

$\therefore$ 原式$=3^2-2$

$=9-2$

$=7$；

（2）$\because (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，$(a-b)^2=9$，$ab=18$，

$\therefore$ $9=a^2-2\times18+b^2$，解得$a^2+b^2=9+2\times18=45$．

【点睛】本题考查代数式求值，涉及完全平方公式，熟记完全平方和与完全平方差公式是解决问题的关键．

【变式 4-3】（2023 春·陕西西安·七年级校考期中）已知 m 满足$(3m-2015)^2+(2014-3m)^2=5$．

(1)求$(2015-3m)(2014-3m)$的值．

(2)求$6m-4029$的值．

【答案】(1)-2

(2)±3

【分析】（1）原式利用完全平方公式化简，计算即可确定出原式的值；

（2）原式利用完全平方公式变形，计算即可得到结果．

【详解】（1）解：设$a=3m-2015$，$b=2014-3m$，

可得$a+b=-1$，$a^2+b^2=5$，

$\because$（$a+b$）$^2=a^2+b^2+2ab$，

$\therefore 1=5+2ab$，即$ab=-2$，

则$(2015-3m)(2014-3m)=(3m-2015)(2014-3m)=-ab=2$；

（2）解：设$a=3m-2015$，$b=2014-3m$，可得$6m-4029=(3m-2015)-(2014-3m)=a-b$，

$\because (a-b)^2=a^2+b^2-2ab$，

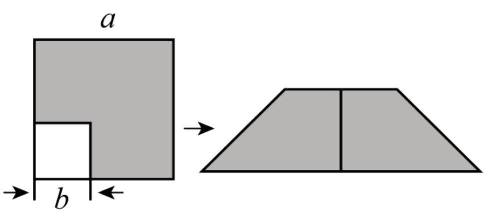
$\therefore (6m-4029)^2=(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=5+4=9$，

则$6m-4029=\pm 3$．

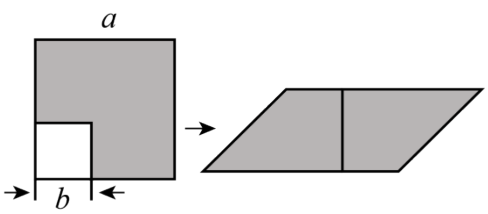
【点睛】此题考查了完全平方公式，熟练掌握公式及运算法则是解本题的关键．

【题型 5　利用面积法验证乘法公式】

【例 5】（2023 春·七年级课时练习）如图，阴影部分是在边长为 a 的大正方形中剪去一个边长为 b 的小正方形后所得到的图形，将阴影部分通过割、拼，形成新的图形．给出下列 2 种割拼方法，其中能够验证平方差公式的是（　）



图①



图②

A．①　　B．②　　C．①②　　D．①②都不能

【答案】C

【分析】分别在两个图形中表示出阴影部分的面积，继而可得出验证公式，即可得到答案．

【详解】解：在图①中，

左边的图形中阴影部分的面积为：a^2-b^2，

右边图形中的阴影部分的面积为：$(a+b)(a-b)$，

故可得：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，可验证平方差公式，符合题意；

在图②中，

左边的图形中阴影部分的面积为：a^2-b^2，

右边图形中的阴影部分的面积为：$(a+b)(a-b)$，

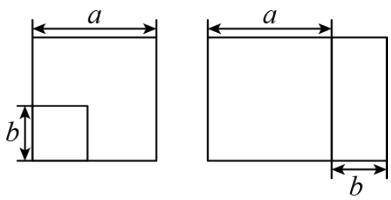
故可得：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，可验证平方差公式，符合题意；

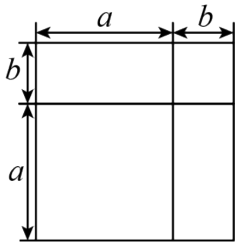
故能够验证平方差公式的是：①②，

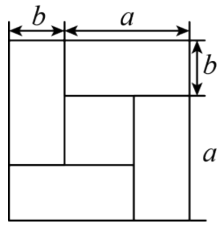
故选：C．

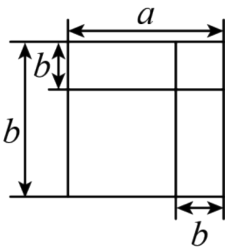
【点睛】本题主要考查了平方差公式，运用不同方法表示阴影部分的面积是解题的关键．

【变式 5-1】（2023 春·山东烟台·六年级统考期末）在下面的正方形分割方案中，可以验证$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$的图形是（　）

A．

B．

C．

D．

【答案】C

【分析】用面积公式和作差法求小正方形、长方形的面积，令其与大正方形相等．

【详解】A、不能验证公式，该选项不符合题意；

B、可以验证$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，该选项不符合题意；

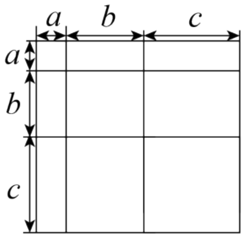
C、可以验证$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$，该选项符合题意；

D、可以验证$a^2=(a-b)^2+2ab-b^2$，即$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，该选项不符合题意．

故选：C．

【点睛】本题考查了完全平方公式的几何验证，解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．

【变式 5-2】（2023 春·福建宁德·七年级校联考期中）下列等式不能用如图所示的方形网格验证的是（　）



A．$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

B．$(a+b)(b+c)=ab+ac+b^2+bc$

C．$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

D．$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

【答案】D

【分析】利用图形面积直接得出等式，从而可选择．

【详解】解：等式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$是由边长为$(a+b)$的正方形推导而出，故 A 可验证，不符合题意；

等式$(a+b)(b+c)=ab+ac+b^2+bc$是由长为$(b+c)$，宽为$(a+b)$的长方形推导而出，故 B 可验证，不符合题意；

等式$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$是由边长为$(a+b+c)$的正方形推导而出，故 C 可验证，不符合题意；

等式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，图中找不到有关于$a-b$的面积，故 D 不可验证，符合题意．

故选 D．

【点睛】本题考查多项式的乘法与图形面积．利用数形结合的思想是解题关键．

【变式 5-3】（2023 春·江西抚州·七年级统考期末）（1）课本再现：如图 1，2 是“数形结合”的典型实例，应用“等积法”验证乘法公式．图 1 验证的是______，图 2 验证的是______；

（2）应用公式计算：

①已知$x+y=5$，$xy=-1$，求x^2+y^2的值；

②求$2022^2-2021\times2023$的值．

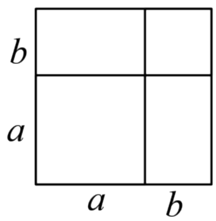


图1

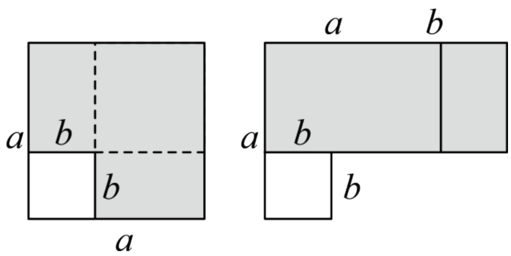


图2

【答案】（1）$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；（2）①27；②1

【分析】（1）根据图 1 中大正方形的面积为两个小正方形的面积与两个长方形的面积之和得到完全平方公式，根据图 2 中左右两边阴影部分的面积相等得到平方差公式；

（2）①利用$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$进行计算即可；②利用平方差公式将$2021\times2023=(2022-1)(2022+1)=2022^2-1$化简即可．

【详解】解：（1）图 1 中，

边长为a的正方形的面积为a^2，

边长为b的正方形的面积为b^2，

长为a宽为b的长方形的面积为ab，

大正方形的边长为$(a+b)$，面积为$(a+b)^2$，

∵大正方形的面积为两个小正方形的面积与两个长方形的面积之和，

$\therefore (a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

图 2 中，

左边阴影部分的面积为：a^2-b^2，

右边阴影部分的面积为：$(a+b)(a-b)$，

∵左右两边的阴影部分面积相等，

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，

故答案为：$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

（2）① ∵ $x+y=5$，$xy=-1$，

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=5^2-2\times(-1)=27$；

② $2022^2-2021\times 2023$

$=2022^2-(2022-1)(2022+1)$

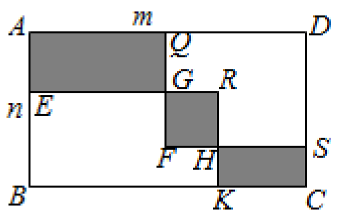
$=2022^2-(2022^2-1)$

$=1$．

【点睛】本题主要考查了完全平方公式和平方差公式，熟练掌握$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$是解题的关键．

【题型 6　乘法公式的应用】

【例 6】（2023 春·浙江宁波·七年级校考期中）如图，为了美化校园，某校要在面积为 30 平方米长方形空地$ABCD$中划出长方形$EBKR$和长方形$QFSD$，若两者的重合部分$GFHR$恰好是一个边长为 3 米的正方形，现将图中阴影部分区域作为花圃，若长方形空地$ABCD$的长和宽分别为m和n，$m>n$，花圃区域$AEGQ$和$HKCS$总周长为 14 米，则 *m-n* 的值为（　）



A．4米　　　　B．7米　　　　C．5米　　　　D．3.5米

【答案】B

【分析】根据长方形的周长及面积计算公式，可找出关于 *m*，*n* 的方程组，变形后可得出$(m-n)^2=49$，解

之取其正值即可得出结论．

【详解】解：依题意得：$\begin{cases}2(m-3)+2(n-3)=14① \\ mn=30②\end{cases}$，

由①可得：$m+n=13$，

$\because (m-n)^2=(m+n)^2-4mn$，

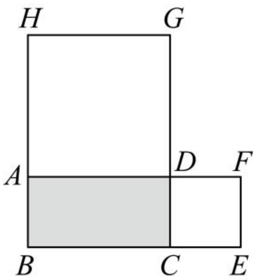
$\therefore (m-n)^2=49$，

$\therefore m-n=7$或$m-n=-7$(不合题意，舍去)．

故选：B．

【点睛】本题考查了完全平方公式的几何背景，牢记$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$是解题的关键．

【变式 6-1】（2023 春·陕西西安·七年级校考期中）我们知道，将完全平方公式$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$适当的变形，可以解决很多数学问题．请你观察、思考，并解决以下问题：



(1)若$m+n=9$，$mn=10$，求m^2+n^2的值；

(2)如图，一农家乐准备在原有长方形用地（即长方形$ABCD$）上进行装修和扩建，先用长为 120m 的装饰性篱笆围起该长方形院子，再以AD、CD为边分别向外扩建正方形$ADGH$、正方形$DCEF$的空地，并在两块正方形空地上建造功能性花园，该功能性花园面积和为2000m^2，求原有长方形用地$ABCD$的面积．

【答案】(1)61

(2)800m^2

【分析】(1)利用完全平方公式代入计算即可；

(2)设$CD=x\text{m}$，$AD=y\text{m}$,由周长可得$x+y=60$, 由两块正方形的面积和为2000平方米，$x^2+y^2=2000$, 求xy即可．

【详解】（1）$\because (m+n)^2=m^2+n^2+2mn, m+n=9$，$mn=10$,

$\therefore m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=9^2-2\times 10=61$,

（2）设$CD=x\text{m}$，$AD=y\text{m}$,

$\because$长方形$ABCD$的周长是120米,

$\therefore 2(x+y)=120$,

即$x+y=60$,

又$\because$两块正方形的面积和为2000平方米，

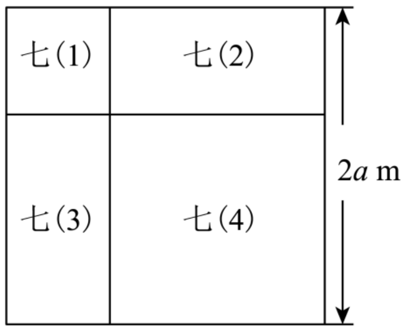
$\therefore x^2+y^2=2000$,

$\therefore xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\frac{60^2-2000}{2}=800$，

答：长方形$ABCD$的面积为800平方米.

【点睛】本题考查完全平方公式的几何背景，掌握完全平方公式的结构特征是正确应用的前提，适当的等式变形是解决问题的的关键.

【变式 6-2】（2023 春·湖南邵阳·七年级统考期中）如图，某校一块边长为$2a$m的正方形空地是七年级四个班的清洁区，其中分给七年级（1）班的清洁区是一块边长为$(a-2b)$m的正方形．$(0<2b<a)$



(1)分别求出七年级（2）班、七年级（3）班的清洁区的面积．

(2)七年级（4）班的清洁区的面积比七年级（1）班的清洁区的面积多多少？

【答案】(1)七年级（2）班、七年级（3）班的清洁区的面积均为$(a+2b)(a-2b)=(a^2-4b^2)(\mathrm{m}^2)$

(2)多$8ab\,\mathrm{m}^2$

【分析】（1）根据图形可知：七年级（2）班、七年级（3）班的清洁区为长方形，通过$2a-(a-2b)=(a+2b)$(m)，可求出对应的长，$(a+2b)(a-2b)=(a^2-4b^2)(\mathrm{m}^2)$，即可解答此题.

（2）由正方形的面积公式可得到：$(a+2b)^2-(a-2b)^2=a^2+4ab+4b^2-(a^2-4ab+4b^2)=8ab(\mathrm{m}^2)$，从而解答此题.

【详解】（1）解：（1）因为$2a-(a-2b)=(a+2b)$(m)，

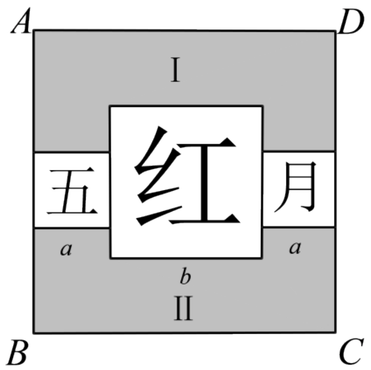
所以七年级（2）班、七年级（3）班的清洁区的面积均为$(a+2b)(a-2b)=(a^2-4b^2)(\mathrm{m}^2)$.

（2）因为$(a+2b)^2-(a-2b)^2=a^2+4ab+4b^2-(a^2-4ab+4b^2)=8ab(\mathrm{m}^2)$，

所以七年级（4）班的清洁区的面积比七年级（1）班的清洁区的面积多$8ab\,\mathrm{m}^2$.

【点睛】本题考查了整式的乘法，熟练掌握完全平方公式、平方差公式是解本题的关键．

【变式 6-3】（2023 春·浙江温州·七年级期中）学校为迎接艺术节，准备在一个正方形空地$ABCD$上搭建一个表演舞台，如图所示，正中间是“红五月”三个正方形平台．其中“五”字正方形和“月”字正方形边长均为 a 米，“红”字正方形边长为 b 米．I号区域布置造型背景，II号区域设置为乐队演奏席．



(1)用含 a，b 的代数式表示阴影部分的面积（即I和II面积之和）并化简；

(2)若阴影部分的面积（即I和II面积之和）为 288 平方米，且$a+b=20$米，求“红”字正方形边长 b 的值．

【答案】(1)$2a^2+4ab$

(2)16

【分析】（1）根据题意，分别表示出正方形空地$ABCD$的面积和“红五月”三个正方形平台的面积，相减即为阴影部分的面积；

（2）根据阴影部分的面积求出$a^2+2ab=144$，再根据$a+b=20$，得到$a^2+2ab+b^2=400$，进而求得$b^2=256$，即可求出正方形边长 b 的值．

【详解】（1）解：由题意可知，正方形空地$ABCD$的边长为$2a+b$，

$\therefore$ 正方形空地$ABCD$的面积为$(2a+b)^2$，

$\because$“红五月”三个正方形平台的面积为$a^2+b^2+a^2=2a^2+b^2$，

$\therefore$ 阴影部分的面积为$(2a+b)^2-(2a^2+b^2)=4a^2+4ab+b^2-2a^2-b^2=2a^2+4ab$；

（2）解：阴影部分的面积为 288 平方米，

$\therefore 2a^2+4ab=288$，

$\therefore a^2+2ab=144$，

$\because a+b=20$，

$\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2=400$，

$\therefore b^2 = 400 - 144 = 256$，

$\because b > 0$,

$\therefore b = 16$.

【点睛】本题考查了正方形的面积公式，列代数式，完全平方公式，平方根知识，根据题意正确得出阴影部分的面积是解题关键.

【题型 7　平方差公式的几何背景】

【例 7】（2023 春·安徽安庆·七年级统考期中）将边长为a的正方形的左上角剪掉一个边长为b的正方形(如图1)，将剩下部分按照虚线分割成①和②两部分，将①和②两部分拼成一个长方形(如图2)，解答下列问题：

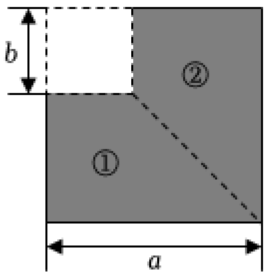


图1

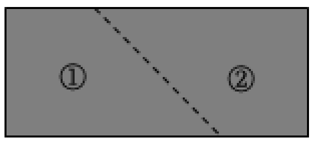


图2

(1)设图1中阴影部分的面积为S_1，图2中阴影部分的面积为S_2，请用含a，b的式子表示：$S_1 =$ ______ ，$S_2 =$ ______ ；(不必化简)

(2)由（1）中的结果可以验证的乘法公式是______ ；

(3)利用（2）中得到的公式，计算：$2023^2 - 2022 \times 2024$.

【答案】(1)$a^2 - b^2$，$(a+b)(a-b)$

(2)$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(3)1

【分析】（1）根据图形的和差关系表示出S_1，根据长方形的面积公式表示出S_2；

（2）由（1）中的结果可验证的乘法公式是$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$；

（3）由（2）中所得公式，可得$2022 \times 2024 = (2023+1)(2023-1) = 2023^2 - 1$，从而简便计算出该题结果.

【详解】（1）解：由题意得，$S_1 = a^2 - b^2$，

$S_2 = (a+b)(a-b)$.

故答案为：$a^2 - b^2$，$(a+b)(a-b)$；