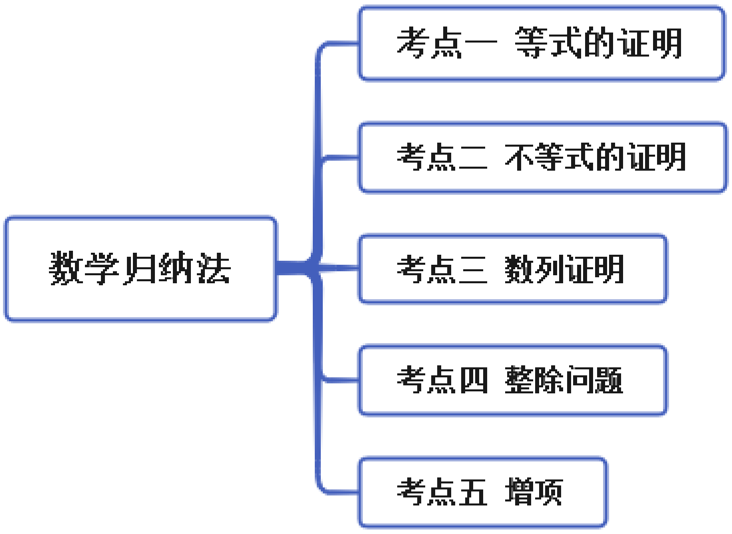
4.4 数学归纳法（精讲）

思维导图

- 数学归纳法
  - 概念
    - 一般地，证明一个与正整数 n 有关的命题，可按下列步骤进行：
    - ①(归纳奠基)证明当 $n=n_0(n_0\in N^*)$时命题成立；
    - ②(归纳递推)以当“$n=k(k\in N^*，k\geq n_0)$时命题成立”为条件，推出“当 $n=k+1$ 时命题也成立”．
    - 只要完成这两个步骤，就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立．这种证明方法叫做数学归纳法.
  - 证明形式
    - 记 $P(n)$是一个关于正整数 n 的命题．我们可以把用数学归纳法证明的形式改写如下：
    - 条件：(1) $P(n_0)$为真；(2)若 $P(k)$为真，则 $P(k+1)$也为真．
    - 结论：$P(n)$为真.
  - 等式证明
    - 基本思路
      - ①n＝n0时，等式的结构．
      - ②n＝k到n＝k＋1时，两个式子的结构：
      - n＝k＋1时的代数式比n＝k时的代数式增加(或减少)的项．
    - 注意事项
      - ①代数式从哪一项(哪一个数)开始，即第一项．
      - ②代数式相邻两项之间的变化规律
      - ③代数式中最后一项(最后一个数)与n的关系
  - 证明不等式
    - ①验证第一个 n 的值时，要注意 n_0 不一定为 1，若 $n>k$(k 为正整数)，则 $n_0=k+1$.
    - ②证明不等式的第二步中，从n＝k到n＝k＋1的推导过程中，一定要用归纳假设，不应用归纳假设的证明不是数学归纳法，因为缺少归纳假设
    - ③用数学归纳法证明与n有关的不等式一般有两种具体形式：
      一是直接给出不等式，按要求进行证明；
      二是给出两个式子，按要求比较它们的大小．
    - ④用数学归纳法证明不等式的关键是由n＝k时成立，得n＝k＋1时成立，主要方法有比较法、放缩法等

考点呈现



例题剖析

考点一 等式的证明

【例 1】（2022·广西河池）用数学归纳法证明：$\left(1^2+1\right)+\left(2^2+2\right)+\cdots+\left(n^2+n\right)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$（$n$ 为正整数）.

【一隅三反】

1．（2022·全国·高二专题练习）用数学归纳法证明：$1+3\times2+5\times2^2+\ldots+(2n-1)\times2^{n-1}=2n(2n-3)+3(n\in\mathbf{N}^*)$.

2．（2021·全国·高二专题练习）已知 $n\in N^*$，求证 $1\cdot2^2-2\cdot3^2+\ldots+(2n-1)\cdot(2n)^2-2n\cdot(2n+1)^2=-n(n+1)(4n+3)$．

3．（2021·全国·高二专题练习）用数学归纳法证明：$1+5+9+\ldots+(4n-3)=(2n-1)\cdot n$.

考点二 不等式的证明

【例 2】（2022·高二专题练习）用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\le\frac{1}{2}+n(n\in\mathbf{N}^*)$.

【一隅三反】

1．（2022·全国·高二课时练习）证明不等式 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\ \ (n\in N^*)$.

2．（2021·江苏·高二课时练习）证明：不等式$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{n}{2}\left(n\in N^*\right)$，恒成立.

3．（2021·全国·高二课时练习）用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln\left(n+1\right)+\frac{n}{2\left(n+1\right)}\left(n\in\mathbf{N}^{*}\right)$.

考点三 数列的证明

【例 3】（2022·江西赣州）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=\frac{1}{3}$，前 n 项和$S_n=\left(2n^2-n\right)a_n$.

(1)求a_2，a_3，a_4的值并猜想a_n的表达式；

(2)用数学归纳法证明（1）的猜想．

【一隅三反】

1．（2022·广西·桂林市第十九中学高二期中（理））设数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=3, 2na_{n+1}=\left(2n-1\right)a_n+6n+1$．

(1)求a_2, a_3的值并猜测通项公式a_n；

(2)证明上述猜想的通项公式.

2．（2022·广西·桂林市国龙外国语学校高二阶段练习（理））请你从下列两个递推公式中，任意选择一个填入题中横线上，并解答题后的两个问题：

① $S_{n-1}+a_n=n^2(n\in \mathrm{N}, n\geq 2)$

② $a_{n+1}=na_n-2n^2+3n+1(n\in \mathrm{N}, n\geq 1)$

已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$S_1=1$，_______.

(1)求a_2, a_3, a_4；

(2)猜想数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式，并用数学归纳法证明.

3．（2022·天津市）已知数列$\{a_n\}$满足$S_n+a_n=2n+1$．

(1)写出a_1, a_2, a_3，并推测a_n的表达式;

(2)用数学归纳法证明所得的结论.

考点四 整除问题

【例 4-1】（2022·全国·高二课时练习）证明：当$n\in\mathbf{N}^*$时，$f\left(n\right)=3^{2n+2}-8n-9$能被 64 整除.

【一隅三反】

1.（2022·全国·高二课时练习）求证：$a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}\left(n\in N^*\right)$能被$a^2+a+1$整除.

2．（2022·陕西·武功县普集高级中学高二阶段练习（理））用数学归纳法证明：对任意正整数$n, 4^n+15n-1$能被 9 整除．

3．（2022·全国·高二课时练习）试用数学归纳法证明$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$．

考点五 增项

【例 5-1】（2022·浙江·嘉兴一中高二期中）用数学归纳法证明"$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots\frac{1}{3n+1}>1$"时，假设$n=k$时命题成立，则当$n=k+1$时，左端增加的项为（　）

A．$\frac{1}{3k+1}$　B．$\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{k+1}$　C．$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$　D．$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}-\frac{2}{3(k+1)}$

【例 5-2】(2022·江西抚州·高二期中(理))利用数学归纳法证明不等式$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n\left(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$的过程中，由$n=k$到$n=k+1$，左边增加了（　）

A．1 项　　B．k 项　　C．2^{k-1} 项　　D．2^k 项

【一隅三反】

1．(2022·全国·高二课时练习）用数学归纳法证明：$1^2+2^2+\cdots+n^2+\cdots+2^2+1^2=\frac{1}{3}n\left(2n^2+1\right)$，第二步从$k$到$k+1$，等式左边应添加的项是（　）

A．$\left(k^2+1\right)^2$　　B．k^2+1　　C．$\left(k+1\right)^2+k^2$　　D．$\left(k+1\right)^2+2k^2$

2．(2022·甘肃庆阳·高二期末（理）)用数学归纳法证明不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}\left(n\geq 2,n\in N\right)$的过程中，由$n=k$递推到$n=k+1$时，不等式左边增加了（　）

A．$\frac{1}{2\left(k+1\right)}$　　B．$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

C．$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{k+1}$　　D．$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

3．(2022·陕西西安·高二期中（理）)利用数学归纳法证明不等式$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<f\left(n\right)$（$n\geq 2$，且$n\in\mathbf{N}^*$）的过程，由$n=k$到$n=k+1$时，左边增加了（　）

A．2^k 项　　B．2^{k-1} 项　　C．k 项　　D．1 项

4．(2022·江西·南城县第二中学高二阶段练习（理）)用数学归纳法证明等式

$\left(n+1\right)\left(n+2\right)\cdot\cdots\cdot\left(n+n\right)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot\left(2n-1\right)\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，从$k$到$k+1$左端需要增乘的代数式为（　）

A．$2k+1$　　B．$2\left(2k+1\right)$

C．$\frac{2k+1}{k+1}$　　D．$\frac{2k+3}{k+1}$