第5章 利率

利率种类

- 国债利率(Treasury rates)
  bill, Note, bond

- 银行间同业拆借利率(LIBOR rates)

- 回购利率(Repo rates)

利率测量方式

- （1）按时间频率复利(compounding frequency)：比如按季度复利或按年份复利

$$\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{mT}$$

- （2）连续复利(continuous compounding)

连续复利

- 伴随利率复利频率增长，达到极限时候就形成了连续复利利率

$$e^{R_c T} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{mT}$$

- 一个$100 投资，按连续复利形式收益率R计算，在T时增长到 $ $100e^{R_c T}$

- 一个$100 T时收益，按连续复利形式贴现率R计算，在0时将折现为 $ $100e^{-R_c T}$

转换公式

- 假定：
- Rc 是连续复利计算利率
- Rm是每年复利m次年利率

$$R_c \approx m\ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right)$$

$$R_m \approx m\left(e^{R_c/m}-1\right)$$

- 怎样进行两种复利频率不同利率之间转换呢？$R_{m_2} = [(1+\frac{R_{m_1}}{m_1})^{\frac{m_1}{m_2}} - 1]m_2$

零息票债券收益率(Zero Rates\Spot rate, 即期利率)

零息票债券(Zero coupon bond)：债券存续过程中无利息收益，只有在最后时间点T时才取得钞票流债券。零息债券收益率：各到期期限零息债券所隐含利率。

Maturity (years)	Zero Rate (% cont comp)
0.5	5.0
1.0	5.8
1.5	6.4
2.0	6.8

附息债券定价

为了对债券钞票流进行定价，需要对每个钞票流按相应零息票利率进行贴现。

以上面表格为例，一个[illegible]债券每六个月计算年利率是6%，支付利息是3，本金100在最后一期支付，则其理论价格是

$$3e^{-0.05\times0.5}+3e^{-0.058\times1.0}+3e^{-0.064\times1.5}$$

$$+103e^{-0.068\times2.0}=98.39$$

附息债券收益率(Bond Yield)

债券收益率：债券钞票流贴现成现值，并使现值等于债券市场价格贴现率。

假定上面债券市场理论价格等于98. 39

按连续复利计算债券收益率是通过解下式取得

$$3e^{-y\times0.5}+3e^{-y\times1.0}+3e^{-y\times1.5}+103e^{-y\times2.0}=98.39$$

通过试错法或者牛顿法得y=0. 0676 或6. 76%.

平价收益利率(Par Yield)

对于一定到期期限债券，平价收益利率就是促使债券价格等于其面值(par value or principal value)利息率

以上面例子，它就是

$$\frac{c}{2}e^{-0.05\times 0.5}+\frac{c}{2}e^{-0.058\times 1.0}+\frac{c}{2}e^{-0.064\times 1.5}$$

$$+\left(100+\frac{c}{2}\right)e^{-0.068\times 2.0}=100$$

可得$c=6.87$ (半年复利)

零息票债券收益率曲线拟定

- 现实中，有一些零息债券由经纪公司发 (strip)，这些债券收益率就是零息票债券收益率。

贴现债券？

- 如：02进出04，01进出02，12贴现国债02
- 由于实际当中能够观测到通常是附息票债券价格，因此，一个主要问题是如何依据附息债券价格来计算得出零息票债券收益率曲线
- 通惯用所谓“捆鞋带法”(bootstrap)来处理这一问题。这种办法把每一个息票支付看作一个独立“微小”零息票债券，这样，附息债券就变成许多零息票债券组合。
- 考虑下表中6种债券价格数据(假设所有附息债券都是六个月付息)。

债券面值($)	到期日(年)	息票利率(%)	债券价格($)
100	0.25	0	97.5
100	0.50	0	94.9
100	1.00	0	90.0
100	1.50	8	96.0
100	2.00	12	101.6
100	2.75	10	99.8

$$97.5e^{\frac{1}{4}y_{0.25}}=100,\ 94.9e^{\frac{1}{2}y_{0.5}}=100,\ 90.0e^{y_{1.0}}=100$$

$$\text{or, } \frac{100-97.5}{97.5}\times 4=10.256\%, 4\ln(1+\frac{0.10256}{4})=10.12\%$$

由此得

$y_{0.25}=10.12\%$

$y_{0.5}=10.47\%$

$y_{1.0}=10.54\%$

对于第4种债券，将其看作由3张零息票债券构成：1张6个月期面值4元、1张1年期面值4元、1张1.5年期面值104元。因此有

$$4e^{-0.1047\times 0.5}+4e^{-0.1054\times 1.0}+104e^{-y_{1.5}\times 1.5}=96$$

由此得

$y_{1.5}=10.68\%$

类似地，对于第5种债券，有

$$6e^{-0.1047\times0.5}+6e^{-0.1054\times1.0}+6e^{-0.1068\times1.5}+106e^{-y_{2.0}\times2.0}=101.6$$

由此得

y2.0=10.81%

为了求出y2.75，必须先求出y0.75. y1.25.y1.75和y2.25 。利用线性插值法，求出这三个零息票收益率分别为10.505%、10.61%和10.745%。

同样，利用线性插值法，有

$$y_{2.25}=0.1081\times\frac{2}{3}+\frac{y_{2.75}}{3}$$

将第6种债券看作由6张零息票债券构成，有

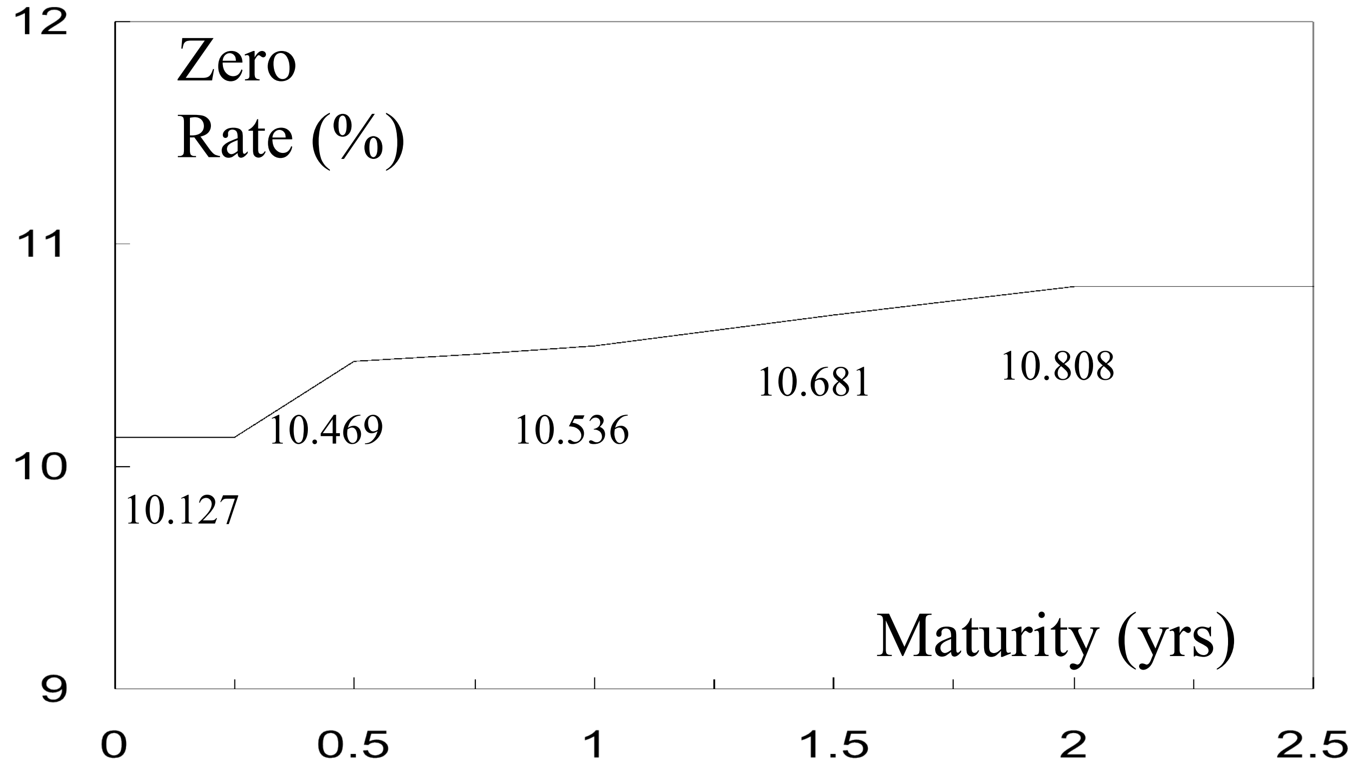
$$5e^{-0.1013\times0.25}+5e^{-0.10505\times0.75}+5e^{-0.1061\times1.25}+5e^{-0.10745\times1.75}$$

$$+5e^{-(0.0721+y_{2.75}/3)\times2.25}+105e^{-y_{2.75}\times2.75}=99.8$$

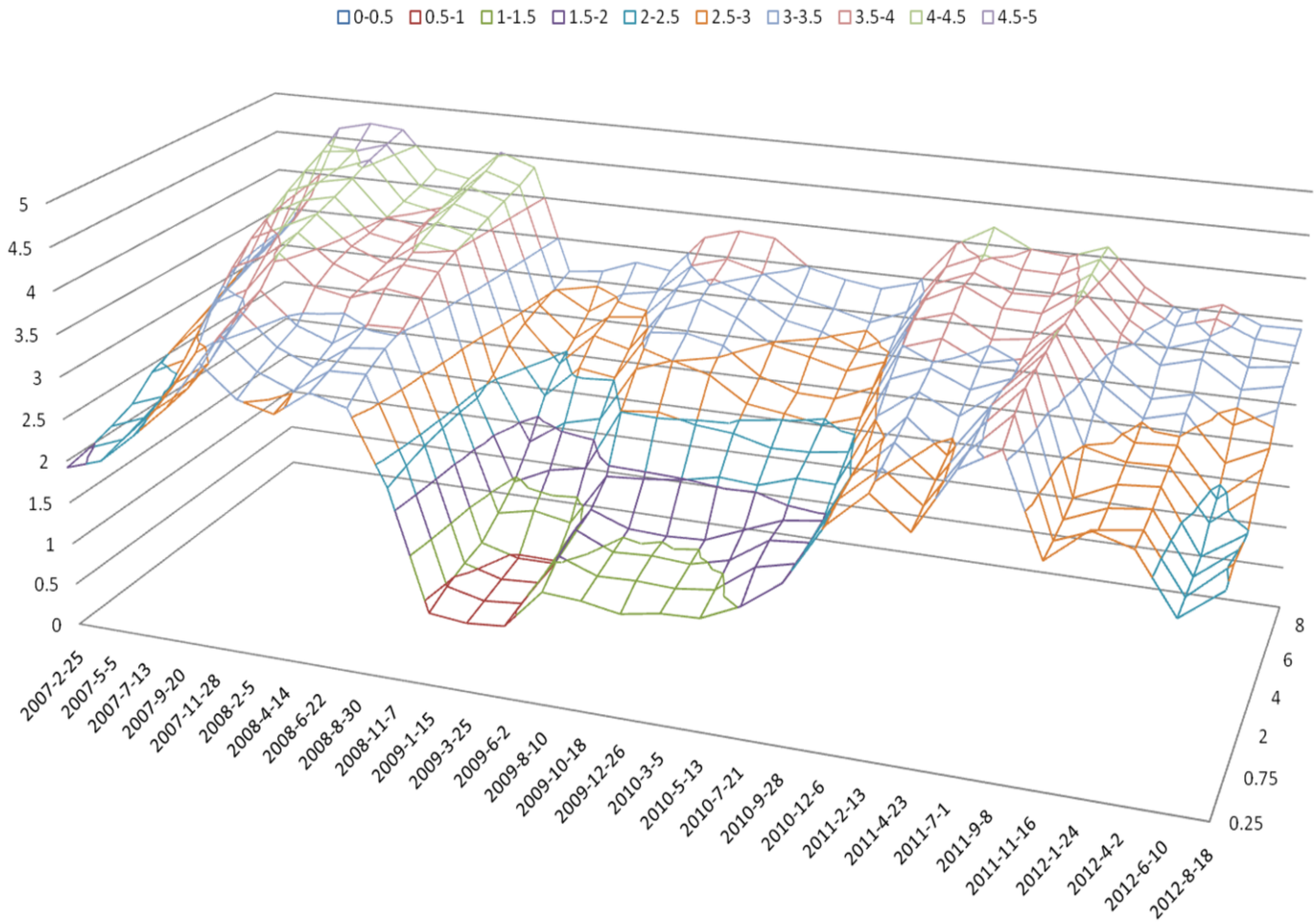
这是一个关于y2.75方程。利用试错法或诸如牛顿法数值办法能够解得y2.75=10.87%。

至此，依据y0.25, y0.5, y1.0, y1.5, y2.0和y2.75数据，能够结构出一条零息票收益率曲线。

捆鞋带法计算零息票债券收益率曲线



收益率曲面



0-0.5 0.5-1 1-1.5 1.5-2 2-2.5 2.5-3 3-3.5 3.5-4 4-4.5 4.5-5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
2007-2-25
2007-5-5
2007-7-13
2007-9-20
2007-11-28
2008-2-5
2008-4-14
2008-6-22
2008-8-30
2008-11-7
2009-1-15
2009-3-25
2009-6-2
2009-8-10
2009-10-18
2009-12-26
2010-3-5
2010-5-13
2010-7-21
2010-9-28
2010-12-6
2011-2-13
2011-4-23
2011-7-1
2011-9-8
2011-11-16
2012-1-24
2012-4-2
2012-6-10
2012-8-18
8
6
4
2
0.75
0.25

即期利率和远期利率

即期利率(spot rate)定义为从今天开始计算并连续n年期限投资到期收益率。这里所考虑投资是中间没有支付，因此n年即期利率事实上就是指n年期零息票收益率(zero-rate)。

远期利率(forward rate)是由当前即期利率隐含未来某一时期短期利率。

令y1、y2.y3和y4分别为1年期、2年期、3年期和4年期即期利率，由当前相应期限即期利率隐含决定了与这些点利率相相应远期利率f1、f2.f3和f4 (假设以上利率都是连续复利)：

$$e^{2y_2} = e^{y_1} e^{f_2}$$

$$e^{3y_3} = e^{2y_2} e^{f_3}$$

……

显然，

$$f_1 = y_1$$