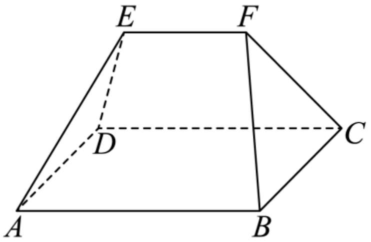
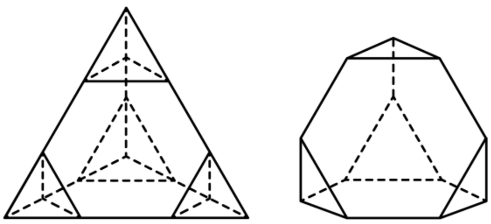
专题08 立体几何——天津市2023年高三各区数学模拟考试题型分类汇编

1．（2023·天津和平·耀华中学校考一模）在中国古代数学经典著作《九章算术》中，称图中的多面体$ABCDEF$为“刍甍”，书中描述了刍甍的体积计算方法：求积术曰，倍下袤，上袤从之，以广乘之，又以高乘之，六而一，即$V=\frac{1}{6}(2AB+EF)\cdot AD\cdot h$，其中$h$是刍甍的高，即点$F$到平面$ABCD$的距离.若底面$ABCD$是边长为4的正方形，$EF=2$且$EF//$平面$ABCD$，$\vee ADE$和$\triangle BCF$是等腰三角形，$\angle AED=\angle BFC=90^{\circ}$，则该刍甍的体积为（　　）



A．$\frac{20\sqrt{2}}{3}$　　B．$\frac{20\sqrt{3}}{3}$　　C．$10\sqrt{3}$　　D．$\frac{40}{3}$

2．（2023·天津河西·统考一模）截角四面体是一种半正八面体，可由四面体经过适当的截角而得到．如图，将棱长为6的正四面体沿棱的三等分点作平行于底面的截面截角得到所有棱长均为2的截角四面体，则该截角四面体的体积为（　　）

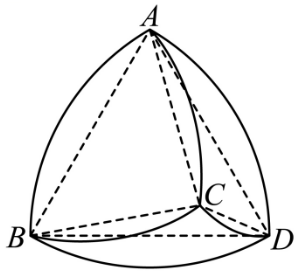


A．$6\sqrt{2}$　　B．$\frac{20\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{46\sqrt{2}}{3}$　　D．$16\sqrt{2}$

3．（2023·天津·校联考一模）攒尖是古代中国建筑中屋顶的一种结构形式，常见的有圆形攒尖、三角攒尖、四角攒尖、六角攒尖等，多见于亭阁式建筑，某园林建筑为四角攒尖，它主要部分的轮廓可近似看作一个正四棱锥，若这个正四棱锥的棱长均为2，则该正四棱锥的体积为（　　）

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D．$4\sqrt{2}$

4．（2023·天津·校联考一模）数学中有许多形状优美，寓意独特的几何体，“勒洛四面体”就是其中之一．勒洛四面体是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的公共部分．如图，在勒洛四面体中，正四面体 $ABCD$ 的棱长为 4，则下列结论正确的是（　　）



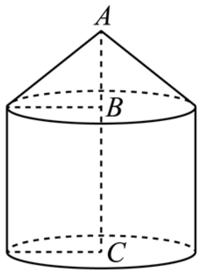
A．勒洛四面体最大的截面是正三角形

B．若 P、Q 是勒洛四面体 $ABCD$ 表面上的任意两点，则 PQ 的最大值为 4

C．勒洛四面体 $ABCD$ 的体积是 $8\sqrt{6}\pi$

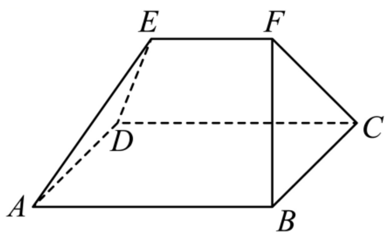
D．勒洛四面体 $ABCD$ 内切球的半径是 $4-\sqrt{6}$

5．（2023·天津·校联考一模）如图，几何体 Ω 为一个圆柱和圆锥的组合体，圆锥的底面和圆柱的一个底面重合，圆锥的顶点为 A，圆柱的上、下底面的圆心分别为 B、C，若该几何体 Ω 存在外接球（即圆锥的顶点与底面圆周在球面上，且圆柱的底面圆周也在球面上）．已知 $BC=2AB=4$，则该组合体的体积等于（　　）



A． 56π　　　　B． $\frac{70}{3}\pi$　　　　C． 48π　　　　D． 64π

6．（2023·天津·大港一中校联考一模）在中国古代数学经典著作《九章算术》中，称图中的多面体 $ABCDEF$ 为“刍甍”·书中描述了刍甍的体积计算方法：求积术曰，倍下袤，上袤从之，以广乘之，又以高乘之，六而一，即 $V=\frac{1}{6}\left(2AB+EF\right)\times AD\times h$，其中 h 是刍甍的高，即点 F 到平面 $ABCD$ 的距离·若底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$EF=2$，且 $EF//AB$，$\vee ADE$ 和 $\triangle BCF$ 是等腰三角形，$\angle AED=\angle BFC=90°$，则该刍甍的体积为（　　）



A． $\frac{20\sqrt{2}}{3}$　　B． $\frac{20\sqrt{3}}{3}$　　C． $10\sqrt{3}$　　D． $\frac{40}{3}$

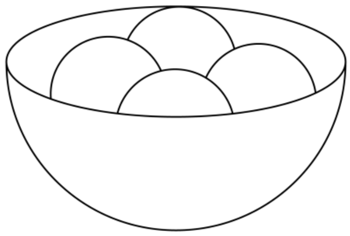
7．（2023·天津河东·一模）在面积为 4 的扇形中，其周长最小时半径的值为（　）

A．4　　B． $2\sqrt{2}$　　C．2　　D．1

8．（2023·天津·统考一模）埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥侧面积的一半，那么其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（　）

A． $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$　　B． $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　C． $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$　　D． $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

9．（2023·天津和平·统考一模）为庆祝国庆，立德中学将举行全校师生游园活动，其中有一游戏项目是夹弹珠．如图，四个半径都是 1cm 的玻璃弹珠放在一个半球面形状的容器中，每颗弹珠的顶端恰好与容器的上沿处于同一水平面，则这个容器的容积是（　）



A． $\frac{2\left(5+3\sqrt{3}\right)\pi}{3}\text{cm}$　　B． $\frac{4\left(5+3\sqrt{3}\right)\pi}{3}\text{cm}^3$

C． $2\left(5+3\sqrt{3}\right)\pi\text{cm}^3$　　D． $\frac{8\left(5+3\sqrt{3}\right)\pi}{3}\text{cm}^3$

10．（2023·天津·统考一模）我国有着丰富悠久的“印章文化”，古时候的印章一般用贵重的金属或玉石制成，本是官员或私人签署文件时代表身份的信物，后因其独特的文化内涵，也被作为装饰物来使用.图 1 是明清时期的一个金属印章摆件，除去顶部的环以后可以看作是一个正四棱柱和一个正四棱锥组成的几何体，如图 2.已知正四棱柱和正四棱锥的高相等，且底面边长均为 4，若该几何体的所有顶点都在同一个球面上，则这个球的表面积是（　）

图 1

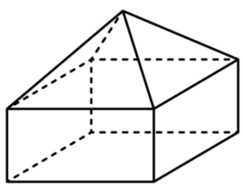
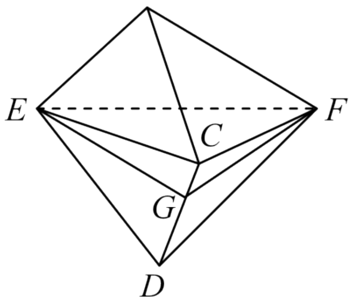


图 2

A． 12π　　B． 24π　　C． 36π　　D． 48π

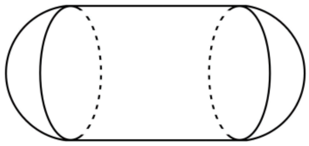
11．（2023·天津和平·耀华中学校考二模）粽子，古称“角黍”，早在春秋时期就已出现，到晋代成为了端午节的节庆食物．现将两个正四面体进行拼接，得到如图所示的粽子形状的六面体，其中点 G 在线段 CD（含端点）上运动，若此六面体的体积为$\frac{16}{3}$，则下列说法正确的是（　　）



A． $EF=2$　　B． $EF=4$

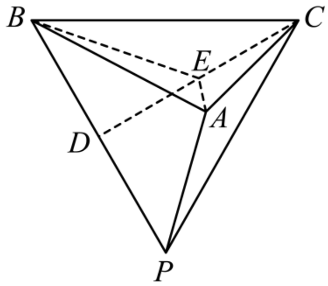
C． $EG+FG$ 的最小值为$3\sqrt{2}$　　D． $EG+FG$ 的最小值为$2\sqrt{6}$

12．（2023·天津南开·统考二模）如图，某种中药胶囊外形是由两个半球和一个圆柱组成的，半球的直径是 6mm，圆柱高 8mm，则该中药胶囊的体积为（　　）



A． $90\pi\text{mm}^3$　　B． $108\pi\text{mm}^3$　　C． $216\pi\text{mm}^3$　　D． $360\pi\text{mm}^3$

13．（2023·天津·二模）如图所示，有一个棱长为 4 的正四面体 $P-ABC$ 容器， D 是 PB 的中点， E 是 CD 上的动点，则下列说法正确的是（　　）



① 若 E 是 CD 的中点，则直线 AE 与 PB 所成角为$\frac{\pi}{2}$

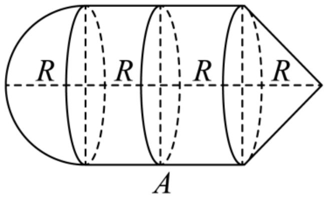
② $\triangle ABE$ 的周长最小值为$4+\sqrt{34}$

③ 如果在这个容器中放入 1 个小球（全部进入），则小球半径的最大值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$

④ 如果在这个容器中放入 10 个完全相同的小球（全部进入），则小球半径的最大值为$\sqrt{6}-2$

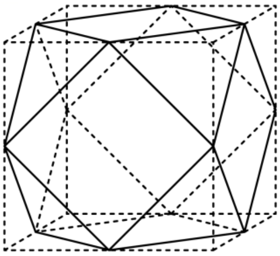
A．①②　　B．①③　　C．②④　　D．①③④

14．（2023·天津·统考二模）红薯于1593年被商人陈振龙引入中国，也叫甘薯、番薯等，因其生食多汁、熟食如蜜，成为人们喜爱的美食甜点.敦敦和融融在步行街买了一根香气扑鼻的烤红薯，准备分着吃.如图，该红薯可近似看作三个部分：左边部分是半径为R的半球；中间部分是底面半径是为R、高为$2R$的圆柱；右边部分是底面半径为R、高为R的圆锥，若敦敦准备从中间部分的A处将红薯切成两块，则两块红薯体积差的绝对值为（　）



A．$\frac{1}{3}\pi R^3$　　B．$\frac{2}{3}\pi R^3$　　C．$\frac{5}{6}\pi R^3$　　D．πR^3

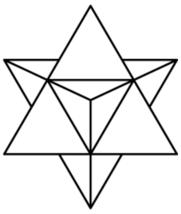
15．（2023·天津·校联考二模）“阿基米德多面体”被称为半正多面体（semi-regularsolid），是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体，它体现了数学的对称美.如图所示，将正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥，共可截去八个三棱锥，得到八个面为正三角形、六个面为正方形的一种半正多面体.已知正方体边长为6，则该半正多面体外接球的表面积为（　）



A．48π　　B．56π　　C．64π　　D．72π

16．（2023·天津和平·统考二模）如图甲是一水晶饰品，其对应的几何体叫星形八面体，也叫八角星体，是一种二复合四面体，它是由两个有共同中心的正四面体交叉组合而成且所有面都是全等的小正三角形，如图乙所示．若一星形八面体中两个正四面体的棱长均为2，则该星形八面体体积为（　）

甲



乙

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{5\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{11\sqrt{2}}{12}$　　D．$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

17．（2023·天津河东·统考二模）已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱垂直于底面，各顶点都在同一球面上，若该棱柱的体积为$\sqrt{3}$，$AB=2$，$AC=1$，$\angle BAC=60°$，则此球的表面积等于（　）

A．8π　　B．9π　　C．10π　　D．11π

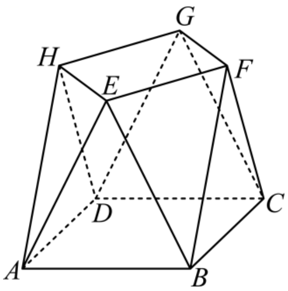
18．（2023·天津滨海新·天津市滨海新区塘沽第一中学校考三模）蹴鞠（如图所示），又名蹴球、蹴圆、筑球、踢圆等，蹴有用脚蹴、蹋、蹋的含义，鞠最早系外包皮革、内实米糠的球.因而蹴鞠就是指古人以脚蹴、蹋、踢皮球的活动，类似今日的足球．2006 年 5 月 20 日，蹴鞠已作为非物质文化遗产经国务院批准列入第一批国家非物质文化遗产名录，已知某鞠的表面上有四个点 A，B，C，D，四面体 $ABCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$，BD 经过该鞠的中心，且 $AB=BC=1$， $AB\perp BC$，则该鞠的表面积为（　）

A．2π　　　　B．16π　　　　C．8π　　　　D．4π

19．（2023·天津河西·统考三模）若所有棱长都是 3 的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的六个顶点都在同一球面上，则该球的表面积是（　）

A．12π　　　　B．18π　　　　C．21π　　　　D．39π

20．（2023·天津滨海新·统考三模）某同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒，包装盒如图所示：底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$\triangle EAB$，$\triangle FBC$，$\triangle GCD$，$\triangle HDA$ 均为正三角形，且它们所在的平面都与平面 $ABCD$ 垂直，则该包装盒的容积为（　）

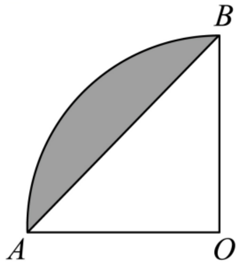


A．$\frac{10\sqrt{3}}{3}$　　　　B．$\frac{20}{3}$　　　　C．$10\sqrt{3}$　　　　D．20

21．（2023·天津北辰·统考三模）中国雕刻技艺举世闻名，雕刻技艺的代表作“鬼工球”，取鬼斧神工的意思，制作相当繁复，成品美轮美奂．1966 年，玉石雕刻大师吴公炎将这一雕刻技艺应用到玉雕之中，他把玉石镂成多层圆球，层次重叠，每层都可灵活自如的转动，是中国玉雕工艺的一个重大突破.今一雕刻大师在棱长为 12 的整块正方体玉石内部套雕出一个可以任意转动的球，在球内部又套雕出一个正四面体（所有棱长均相等的三棱锥），若不计各层厚度和损失，则最内层正四面体的棱长最长为（　）

A．$4\sqrt{6}$　　　　B．$4\sqrt{3}$　　　　C．$2\sqrt{6}$　　　　D．6

22.（2023·天津和平·统考三模）如图所示，扇形AOB的半径为2，圆心角为$90°$，若扇形AOB绕OA旋转一周，则图中阴影部分绕OA旋转一周所得几何体的表面积为（　　）

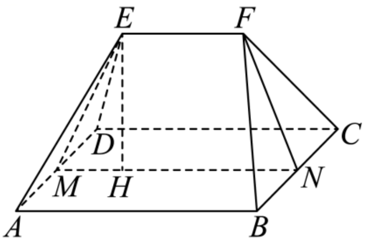


A．$\left(4+4\sqrt{2}\right)x$　　B．$\left(4+2\sqrt{2}\right)\pi$　　C．$\left(8+4\sqrt{2}\right)\pi$　　D．$\left(8+2\sqrt{2}\right)\pi$

参考答案：

1．B

【详解】取 AD,BC 中点 M,N，连接 EM,MN,NF，如图，



由正方形 $ABCD$ 知，$MN // AB$，$MN \perp AD$，而 $\triangle ADE$ 为等腰三角形，且 $\angle AED = 90°$，

即有 $EM \perp AD, EM \cap MN = M, EM, MN \subset$ 平面 EMN，则 $AD \perp$ 平面 EMN，

同理 $BC \perp$ 平面 MNF，而 $AD//BC$，于是 $AD \perp$ 平面 MNF，则点 F 在平面 EMN 内，

而 $AD \subset$ 平面 $ABCD$，于是平面 $EMNF \perp$ 平面 $ABCD$，在平面 $EMNF$ 内过 E 作 $EH \perp MN$ 于 H，

而平面 $EMNF \cap$ 平面 $ABCD = MN$，因此 $EH \perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $\angle BFC = 90°$，$\triangle BCF$ 是等腰三角形，则 $EM = FN = \frac{1}{2}BC = 2$，

因为 $EF//$ 平面 $ABCD$，平面 $EMNF \cap$ 平面 $ABCD = MN$，$EF \subset$ 平面 $EMNF$，

则 $EF//MN$，四边形 $EMNF$ 为等腰梯形，$MN = AB = 4$，

因此 $EH = \sqrt{EM^2 - (\frac{MN - EF}{2})^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，

所以该刍甍的体积为 $V = \frac{1}{6}(2AB + EF) \cdot AD \cdot EH = \frac{1}{6} \times (2 \times 4 + 2) \times 4 \times \sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

故选：B

2．C

【详解】截角四面体的体积为大正四面体的体积减去四个相等的小正四面体体积，

因为棱长为 1 的正四面体的高 $h = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$，

则棱长为 1 的正四面体的体积 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$，

所以该截角四面体的体积为 $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \times 6^3 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} \times 2^3 = \frac{46\sqrt{2}}{3}$.

故选：C.

3．C

【详解】如图所示，正四棱锥 $P-ABCD$ 棱长均为 2，连接 AC、BD 交于点 O，连接 PO

根据正四棱锥的性质，可得 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.