一、选择题

1．已知函数 $f(x)=\ln x-ax$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为（　）

A．$a<\frac{1}{e}$　　B．$a<0$　　C．$a\leq 0$　　D．$0<a<\frac{1}{e}$

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}xlnx-3x, x>0\\ x^2+3x, x\leqslant 0\end{cases}$ 的图象上有且仅有四个不同的点关于直线 $y=-1$ 的对称点在 $y=kx-1$ 的图象上，则实数 k 的取值范围是(　)

A．$(\frac{1}{2},1)$　　B．$(\frac{1}{2}，2)$　　C．$(-1,2)$　　D．$(-1,3)$

3．已知函数 $f\left(x\right)=x^3-x^2-x+a$，若曲线 $y=f\left(x\right)$ 与 x 轴有三个不同交点，则实数 a 的取值范围为（　）

A．$\left(-\infty,-\frac{11}{27}\right)$　　B．$1,+\infty$　　C．$\left(-\frac{5}{27},1\right)$　　D．$\left(-\frac{11}{27},1\right)$

4．已知定义域为 R 的偶函数 $f\left(x\right)$，其导函数为 $f'\ \ x$ ，对任意 $x\in\left[0,+\infty\right)$，均满足：$xf'\left(x\right)>-2f\left(x\right)$．若 $g\left(x\right)=x^2f\left(x\right)$，则不等式 $g\left(2x\right)<g\left(1-x\right)$ 的解集是（ ）

A．$\left(-\infty,-1\right)$

B．$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$

C．$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$

D．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

5．以下不等式不成立的是（　）

A．$x>\sin x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

B．$x-1\geq\ln x$，$x\in\left(0,+\infty\right)$

C．$e^x-x-1\geq 0$，$x\in\mathbf{R}$

D．$\ln x+1-e^x>0$，$x\in\left(0,+\infty\right)$

6．若函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+a$ 在区间 $(\mathbf{1},\boldsymbol{e})$ 上存在零点，则常数 a 的取值范围为（　）

A．$0<a<1$　　B．$\frac{1}{e}<a<1$　　C．$\frac{1}{e}-1<a<1$　　D．$\frac{1}{e}+1<a<1$

7．设 $1<x<2$，则 $\frac{\ln x}{x}$，$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$，$\frac{\ln x^2}{x^2}$ 的大小关系是（ ）

A．$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2<\frac{\ln x}{x}<\frac{\ln x^2}{x^2}$

B．$\frac{\ln x}{x}<\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2<\frac{\ln x^2}{x^2}$

C．$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2<\frac{\ln x^2}{x^2}<\frac{\ln x}{x}$

D．$\frac{\ln x^2}{x^2}<\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2<\frac{\ln x}{x}$

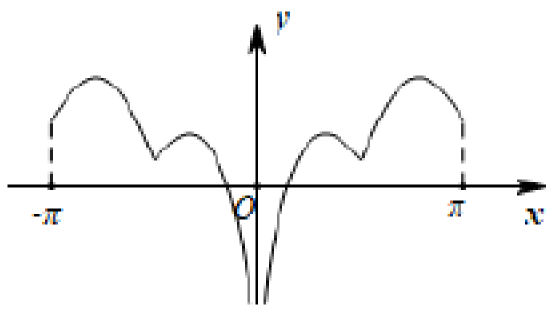
8. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx-a^2-7a$ 在 $x=1$ 处取得极大值 10，则 $\frac{a}{b}$ 的值为（　）

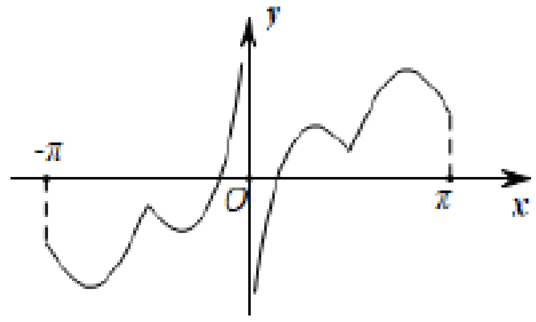
A. $-\frac{2}{3}$　　　　B. $\frac{2}{3}$ 或 2　　　　C. 2　　　　D. $-\frac{1}{3}$

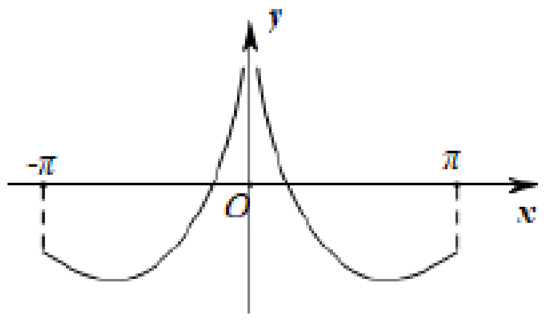
9. 设函数 $f(x)$在 R 上存在导数 $f'(x)$，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)+f(-x)=x^2$，且在 $[0,+\infty)$ 上有 $f'(x)>x$.若 $f(2-k)-f(k)\geq 2-2k$，则 k 的取值范围是（　）

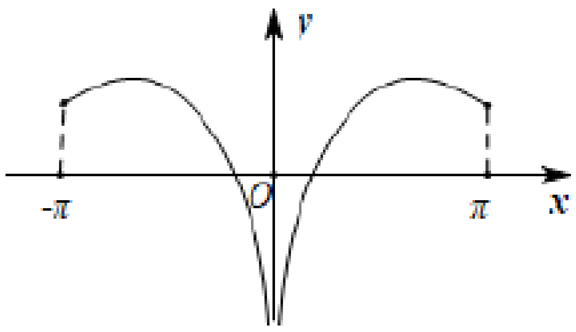
A. $(-\infty,0]$　　　　B. $(-\infty,1]$　　　　C. $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　　　D. $\left[0,\frac{5}{2}\right]$

10. 函数 $f(x)=\ln|x|+|\sin x|$（$-\pi\leq x\leq\pi$ 且 $x\neq 0$）的大致图像是（　）

A.


B.


C.


D.


11. 函数 $f(x)=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为（　）

A. 2　　　　B. $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$　　　　C. $\frac{\pi}{3}+1$　　　　D. $\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$

12. 设 $0<m\leq 2$，已知函数 $f(x)=\frac{x^3-12x+50}{16m}$，对于任意 $x_1,x_2\in[m-2,m]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leq 1$，则实数 m 的取值范围为（　）

A. $\left[\frac{5}{3},2\right]$　　　　B. $\left[\frac{4}{3},2\right]$　　　　C. $\left[\frac{1}{3},1\right]$　　　　D. $\left[\frac{2}{3},1\right]$

二、填空题

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, x\leq 0\\ e^x, x>0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-x-m$ 恰好有 2 个零点，则实数 m 的取值范围为______.

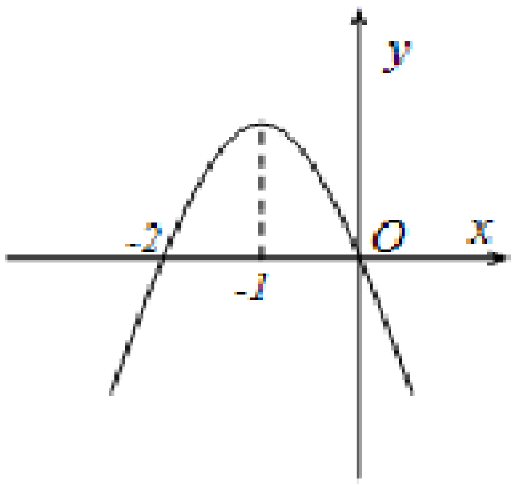
14. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$f'(x)+4x>0$，其中 $f'(x)$为 $f(x)$的导函数，则不等式 $f(\sin x)-\cos 2x\geq 0$ 的解集为______.

15．若函数的 $f\left(x\right)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+m, x<e\\ x-\ln x, x\geq e\end{cases}$ 的值域是 $\left[e-1,+\infty\right)$，其中 e 是自然对数的底数，则实数 m 的最小值是______.

16．函数 $f\left(x\right)$ 在(0，+∞)上有定义，对于给定的正数 K，定义函数 $f_K\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x\right), f\left(x\right)\leq K\\ K, f\left(x\right)>K\end{cases}$，取函数 $f\left(x\right)=\frac{5}{2}x^2-3x^2\ln x$，若对任意 $x\in$(0，+∞)，恒有 $f_K\left(x\right)=f\left(x\right)$，则 K 的最小值为______.

17．设函数 $f\left(x\right)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-bx+1$（$b$ 为常数），若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[1,3\right]$ 上存在单调减区间，则实数 b 的取值范围是______.

18．已知函数 $f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，给出如下命题：①当 $-2<x<0$ 时，$f(x)>0$；② $f(-1)<f(0)$；③函数 $f(x)$ 在 $x=-\frac{1}{2}$ 处切线的斜率小于零；④ 0 是函数 $f(x)$ 的一个极值点；其中正确的命题是___________.（写出所有正确命题的序号）



19．若函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2-2x+a\ln x$ 有两个不同的极值点，则实数 a 的取值范围是__________.

20．已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-x$，若 $f\left(x\right)-m+1\leq 0$ 恒成立，则 m 的取值范围为__________.

三、解答题

21．已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx-\ln x$.（$a,b\in\mathbf{R}$）

（1）当 $a=-1$ 时，讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 的图像与 x 轴交于 $A\left(x_1,0\right)$，$B\left(x_2,0\right)\left(x_1<x_2\right)$，线段 AB 中点为 $C\left(x_0,0\right)$，求证：$f'\left(x_0\right)\neq 0$.

22．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x-\frac{1}{2}\left(a\in R,a\neq 0\right)$.

（1）当 $a=3$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f\left(x\right)$的单调区间；

（3）若对任意的 $x\in\left[1,+\infty\right)$，都有 $f\left(x\right)\geq 0$ 成立，求 a 的取值范围.

23．设函数 $f\left(x\right)=x\left|x+2k\right|+2x$，$k\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $k=-1$ 时，解不等式 $f\left(x\right)>3$；

（Ⅱ）若对任意 $x\in\left[1,2\right]$时，直线 $y=2x+1$ 恒在曲线 $y=f\left(x\right)$的上方，求 k 的取值范围.

24．已知函数 $f(x)=\ln x+x+1$，$g(x)=x^2+2x$.

（1）求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在 $(1,h(1))$ 处的切线方程；

（2）若实数 m 为整数，且对任意的 $x>0$ 时，都有 $f(x)-mg(x)\leq 0$ 恒成立，求实数 m 的最小值.

25．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2, g(x)=a\ln x$.

（1）若曲线 $y=f(x)-g(x)$ 在 $x=2$ 处的切线与直线 $x+3y-7=0$ 垂直，求实数 a 的值；

（2）若 $\left[1,e\right]$ 上存在一点 x，使得 $f'\left(x_0\right)+\dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}<g\left(x_0\right)-g'\left(x_0\right)$成立，求实数 a 的取值范围.

26．已知函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$（$x>0$）.

（1）求这个函数的单调区间；

（2）求这个函数在区间$\left[\dfrac{1}{e},e^2\right]$的最大值与最小值.

【参考答案】***试卷处理标记，请不要删除

一、选择题

1．D

解析：D

【分析】

求出 $f\left(x\right)$的导数，可得 $a\leq 0$ 时函数单调递增，不满足题意，$a>0$ 时，利用 $f\left(x\right)_{\max}>0$ 可得.

【详解】

可知 $f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$，

当 $a \le 0$ 时，$f'(x) \ge 0$ 恒成立，$f(x)$ 单调递增，则 $f(x)$ 不可能有两个零点；

当 $a > 0$ 时，$x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调递增；$x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时，

$f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调递减，则 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 处取得极大值即最大值

$f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\frac{1}{a} - 1$，

要满足 $f(x) = \ln x - ax$ 有两个零点，则 $\ln\frac{1}{a} - 1 > 0$，解得 $0 < a < \frac{1}{e}$，

综上，$0 < a < \frac{1}{e}$.

故选：D.

【点睛】

方法点睛：本题考查利用导数研究函数的零点，根据零点个数求参数，一般如下步骤：

（1）求出函数的定义域，求出函数的导数；

（2）先讨论参数范围（以明显使得导数为正或负为参数界点讨论）；

（3）利用导数正负讨论函数单调性，得出极值或最值；

（4）以极值或最值列出满足条件的等式或不等式，即可求出.

2．C

解析：C

【分析】

先求出直线 $y = kx - 1$ 关于 $y = -1$ 对称的直线方程，然后求函数 $f(x)$ 再 $x > 0, x \le 0$ 时的单调性及极值，进而求出 k 得取值范围.

【详解】

设函数 $y = kx - 1$ 任意一点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y = -1$ 对称的点为 $P'(x, y)$，

则 $x_0 = x, \frac{y + y_0}{2} = -1$，所以 $y_0 = -2 - y$，

而 P 在函数 $y = kx - 1$ 上，所以 $-2 - y = kx - 1$，即 $y = -kx - 1$，

所以函数 $y = kx - 1$ 恒过定点 $A(0, -1)$，

（1）当 $x > 0$ 时，$f(x) = x\ln x - 3x$，设直线 $y = -kx - 1$ 与 $f(x)$ 相切于点 $C(x, x\ln x - 3x)$，

$f'(x) = \ln x + 1 - 3 = x\ln x - 2 = -k = \frac{x\ln x - 3x + 1}{x}$，

整理可得 $x\ln x - 2x = x\ln x - 3x + 1$，解得 $x = 1$，

所以 $k_{AC} = -k = \ln 1 - 2 = -2$；

（2）当 $x \le 0$ 时，$f(x) = x^2 + 3x$，

设直线 $y=-kx-1$ 与函数 $f\left(x\right)$ 相切于点 B 点 (x,x^2+3x)，

$f'\left(x\right)=2x+3=-k=\dfrac{x^2+3x+1}{x}$，整理可得 $2x^2+3x=x^2+3x+1(x\le 0)$，解得 $x=-1$，

所以 $k_{AB}=-k=2(-1)+3=1$，

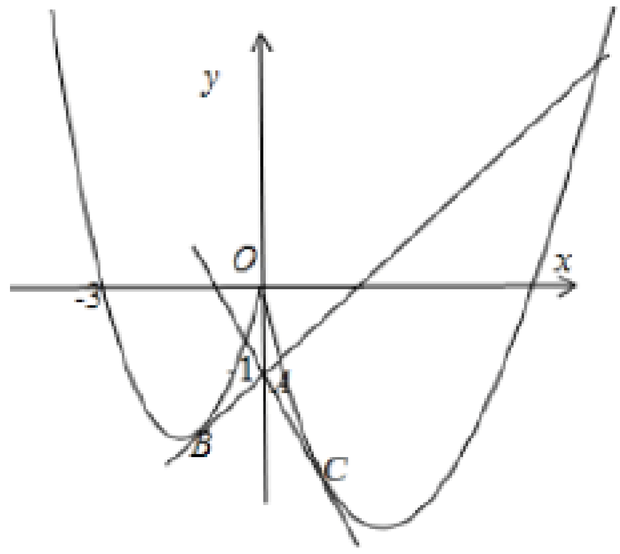
故 $-2<-k<1$，即 $-1<k<2$ 时，

在 $x>0$ 时，函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=-kx-1$ 的图象相交有 2 个交点；

在 $x\le 0$ 时，函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=-kx-1$ 的图象相交有 2 个交点，

故函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=-kx-1$ 的图象相交有 4 个交点时的 k 的范围是 $(-1,2)$．

故选：C.



【点睛】

本题主要考查了直线关于直线对称，以及直线与曲线相切的斜率，以及函数与方程的关系的综合应用，着重考查数形结合思想，以及推理与运算能力，属于中档试题.

3．C

解析：C

【分析】

根据曲线 $y=f\left(x\right)$ 与 x 轴有三个不同交点，可转化为函数 $g\left(x\right)=-x^3+x^2+x$ 与 $y=a$ 的图象有三个不同的交点，即可求出实数 a 的取值范围.

【详解】

$\because$ 函数 $f\left(x\right)=x^3-x^2-x+a$ 与 x 轴有三个不同交点，

可转化为函数 $g\left(x\right)=-x^3+x^2+x$ 与 $y=a$ 的图象有三个不同的交点.

又 $\because g'\left(x\right)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$，

$\therefore$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right),(1,+\infty)$ 上，$g'\left(x\right)<0$；在 $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$ 上，$g'\left(x\right)>0$．

$\therefore g\left(x\right)_{极小值}=g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{5}{27}$，$g\left(x\right)_{极大值}=g\left(1\right)=1$，

$\therefore -\frac{5}{27} < a < 1$.

故选：C

【点睛】

本题考查函数的零点及导数与极值的应用，考查了转化思想和数形结合思想，属于中档题.

4．C

解析：C

【解析】

试题分析：$x\in[0,+\infty)$时 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)=x(2f(x)+xf'(x))>0$，而 $g(x)=x^2f(x)$也为偶函数，所以

$g(2x)<g(1-x)\Leftrightarrow g(|2x|)<g(|1-x|)\Leftrightarrow|2x|<|1-x|\Leftrightarrow 3x^2+2x-1<0\Leftrightarrow -1<x<\frac{1}{3}$

，选 C.

考点：利用函数性质解不等式

【方法点睛】利用导数解抽象函数不等式，实质是利用导数研究对应函数单调性，而对应函数需要构造. 构造辅助函数常根据导数法则进行：如 $f'(x)<f(x)$ 构造 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，

$f'(x)+f(x)<0$ 构造 $g(x)=e^xf(x)$，$xf'(x)<f(x)$ 构造 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，

$xf'(x)+f(x)<0$ 构造 $g(x)=xf(x)$ 等

5．D

解析：D

【分析】

针对 ABC 选项中的不等式构造函数，然后利用导数研究函数的单调性，由此判断出不等式成立，利用特殊值判断出 D 选项不等式不成立.

【详解】

A.令 $f(x)=x-\sin x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，由 $f'(x)=1-\cos x>0$，则 $f(x)$在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，

则 $f(x)>f(0)=0\Rightarrow x-\sin x>0\Rightarrow x>\sin x$，不等式成立

B.令 $f(x)=x-1-\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，由 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，当 $x\in(0,1)$，

$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，则 $f(x)\geq f(1)=0\Rightarrow x-1-\ln x\geq 0\Rightarrow x-1\geq\ln x$，不等式成立

C.令 $f(x)=e^x-x-1$，$x\in\mathbf{R}$，由 $f'(x)=e^x-1$，当 $x\in(-\infty,0)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

则 $f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0$，不等式成立

D.令 $f(x) = \ln x + 1 - e^x$， $x \in (0, +\infty)$，当 $x = 1$ 时， $f(1) = 1 - e < 0$，所以不等式不成立.

故选：D

【点睛】

本小题主要考查利用导数证明不等式，属于中档题.

6．C

解析：C

【分析】

先利用导数判断出函数 $f(x)$ 在区间 $(1,e)$ 上为增函数，再解不等式

$f(1) = \ln 1 - 1 + a < 0$， $f(e) = \ln e - \frac{1}{e} + a > 0$，即得解.

【详解】

由题得 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ 在区间 $(1,e)$ 上恒成立，

所以函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + a$ 在区间 $(1,e)$ 上为增函数，

所以 $f(1) = \ln 1 - 1 + a < 0$， $f(e) = \ln e - \frac{1}{e} + a > 0$，

可得 $\frac{1}{e} - 1 < a < 1$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查利用导数研究函数的单调性和零点，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

7．A

解析：A

【解析】

试题分析：令 $f(x) = x - \ln x, 1 < x < 2$，则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$，所以函数 $f(x) = x - \ln x, 1 < x < 2$ 为增函数，所以 $f(x) = x - \ln x > f(1) = 1 > 0$，所以 $x > \ln x > 0$，即 $1 > \frac{\ln x}{x} > 0$，所以 $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 < \frac{\ln x}{x}$；又因为 $\frac{\ln x^2}{x^2} - \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln x - x\ln x}{x^2} > 0$，所以 $(\frac{\ln x}{x})^2 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln x^2}{x^2}$，故应选 A.

考点：1、导数在研究函数的单调性中的应用.

8．A

解析：A

【分析】

求导，根据题意得到$\begin{cases}f(1)=10\\f'(1)=0\end{cases}$，代入数据解得答案，再验证排除即可.

【详解】

$f(x)=x^3+ax^2+bx-a^2-7a$，则$f'(x)=3x^2+2ax+b$，

根据题意：$\begin{cases}f(1)=1+a+b-a^2-7a=10\\f'(1)=3+2a+b=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-2\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-6\\b=9\end{cases}$，

当$\begin{cases}a=-2\\b=1\end{cases}$时，$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$，函数在$\left(\frac{1}{3},1\right)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，故$x=1$处取得极小值，舍去；

当$\begin{cases}a=-6\\b=9\end{cases}$时，$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，函数在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,3)$上单调递减，故$x=1$处取得极大值，满足.

故$\frac{a}{b}=\frac{-6}{9}=-\frac{2}{3}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查了根据极值求参数，意在考查学生的计算能力和应用能力，多解是容易发生的错误.

9．B

解析：B

【分析】

构造函数$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，可得$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，利用奇偶性的定义知$g(x)$是奇函数，进而求解不等式即可.

【详解】

由题意当$x\geq 0$时，$f'(x)>x$，构造函数$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，

则$g'(x)=f'(x)-x>0$，得$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

又由条件$f(x)+f(-x)=x^2$得$g(x)+g(-x)=0$.

所以$g(x)$是奇函数，又$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增且$g(0)=0$，所以$g(x)$在R上单调递增，

由$f(2-k)-f(k)\geq 2-2k$，得$g(2-k)-g(k)\geq 0$，即$g(2-k)\geq g(k)$，

根据函数 $g(x)$ 在 R 上单调递增，可得 $2-k \geq k$，解得 $k \leq 1$.

故选：B

【点睛】

本题考查导数在函数单调性中的应用，考查函数的奇偶性，属于中档题.

10．D

解析：D

【分析】

利用函数的奇偶性排除选项，能过导数求解函数极值点的个数，求出 $f(\pi)$ 的值，从而可判断选项

【详解】

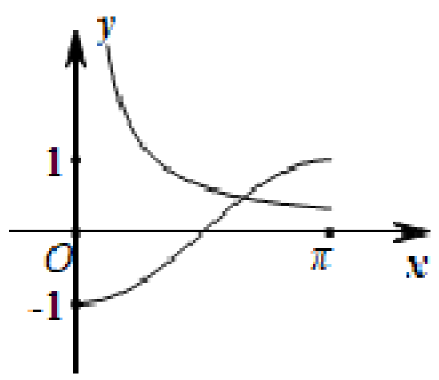
解：因为 $f(-x)=\ln|-x|+|\sin(-x)|=\ln|x|+|\sin x|=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数，故排除 B

当 $0<x\leq\pi$ 时，$f(x)=\ln x+\sin x$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}+\cos x$，

令 $f'(x)=0$，则 $\frac{1}{x}=-\cos x$，

作出 $y=\frac{1}{x}, y=-\cos x$ 的图像如图，



可知两个函数图像有一个交点，就是函数的极值点，所以排除 A

因为 $f(\pi)=\ln\pi>1$，所以排除 C，

当 $x=x_0$ 时，$f'(x_0)=0$，故 $x\in(0,x_0)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，所以 D 满足.

故选：D

【点睛】

此题考查了与三角函数有关的函数图像识别，利用了导数判断函数的单调性，考查数形结合的思想，属于中档题

11．B

解析：B

【分析】

利用导数分析函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调性，进而可求得函数 $y=f(x)$ 在区间

$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值.

【详解】

$\because f(x)=x+2\cos x$，则 $f'(x)=1-2\sin x$， $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，

当 $f'(x)>0$时，则$1-2\sin x>0$，解得$0\le x<\dfrac{\pi}{6}$；

当 $f'(x)<0$时，$1-2\sin x<0$，解得$\dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{2}$.

所以，函数 $y=f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$上单调递增，在区间$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减，

因此，函数 $y=f(x)$在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 处取得极大值，亦即最大值，即

$f(x)_{max}=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查利用导数求解函数的最值，考查计算能力，属于中等题.

12．B

解析：B

【分析】

令 $g(x)=x^3-12x+50$，用导数法得到 $g(x)$在$[m-2,m]$上递减；再根据$0<m\le 2$，则 $f(x)$在$[m-2,m]$上递减，然后再根据对任意 $x_1,x_2\in[m-2,m]$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\le 1$，由 $f(x)_{max}-f(x)_{min}\le 1$求解.

【详解】

设 $g(x)=x^3-12x+50$，

则 $g'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)$，

当$x<-2$或$x>2$时 $g'(x)>0$， $g(x)$递增；

当$-2<x<2$时 $g'(x)<0$， $g(x)$递减；

当$0<m\le 2$时，$[m-2,m]\subsetneqq[-2\ 2]$，

所以 $g(x)$在$[m-2,m]$上递减；

所以 $f(x)$在$[m-2,m]$上递减；

所以 $f(x)_{max}=f(m-2), f(x)_{min}=f(m)$

因为任意 $x_1,x_2\in[m-2,m]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le 1$，

所以$f\left(x\right)_{max}-f\left(x\right)_{min}\le 1$，

即$f\left(m-2\right)-f\left(m\right)=\dfrac{\left(m-2\right)^3-12\left(m-2\right)+50}{16m}-\dfrac{m^3-12m+50}{16m}\le 1$，

即$3m^2+2m-8\ge 0$，

解得$m\le -2$或$m\ge \dfrac{4}{3}$，又$0<m\le 2$，

所以实数m的取值范围为$\left[\dfrac{4}{3},2\right]$，

故选：B

【点睛】

关键点点睛：本题关键有两点：一是对任意$x_1,x_2\in\left[m-2,m\right]$，都有$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le 1$等价于$f\left(x\right)_{max}-f\left(x\right)_{min}\le 1$，二是$f\left(x\right)$在$\left[m-2,m\right]$上的单调性，由$g\left(x\right)=x^3-12x+50$，利用导数法求解.

二、填空题

13. 【分析】转化为函数的图象与直线恰有 2 个交点作出函数的图象利用图象可得结果【详解】因为函数恰好有 2 个零点所以函数的图象与直线恰有 2 个交点当时当时所以函数在上为增函数函数的图象如图：由图可知故答案为：【

解析：$m>\dfrac{3}{4}$

【分析】

转化为函数$y=f(x)-x$的图象与直线$y=m$恰有 2 个交点，作出函数的图象，利用图象可得结果.

【详解】

因为函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-x-m$恰好有 2 个零点，

所以函数$y=f(x)-x$的图象与直线$y=m$恰有 2 个交点，

当$x\le 0$时，$y=f(x)=x^2+x+1=(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}\ge\dfrac{3}{4}$，

当$x>0$时，$y=f(x)-x=e^x-x$，$y'=e^x-1>0$，所以函数$y=f(x)-x=e^x-x$在$(0,+\infty)$上为增函数，

函数$y=f(x)-x$的图象如图：