2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则.

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）： B

我们的参赛报名号为（如果赛区设置报名号的话）： B-13220016

所属学校（请填写完整的全名）： 长江大学

参赛队员 (打印并签名) ：1. 薛鹏飞

2. 柯志军

3. 吕义旺

指导教师或指导教师组负责人 (打印并签名): 郭金海

日期： 2011 年 9 月 12 日

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2010 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

交巡警服务平台的设置与调度模型

摘要

本文就交巡警服务平台的设置和调度问题建立了五个相应的数学模型。

先采用 Floyd 算法得到任意两个路口节点之间的最短道路长度。

问题一运用 0-1 变量和多目标规划的方法，先将每个平台的任务量最小和每个平台的任务量分布尽量均匀作为约束条件，从而求出每个平台所管辖的具体范围；再将要封锁交通要到的每个平台的出警距离最小和出警距离尽量均匀作为约束条，从而求出封锁交通要到的最佳调度方案；最后再将满足题意的最少平台个数和每个平台任务量尽量分布均匀作为约束条件，求出要添加最少且最合理的平台个数为 4 个，这 4 个平台标号分别为 29、40、48、91。

问题二先对全市六区的面积、人口、路口总数、可覆盖到的路口总数和每个区域的平台分布等条件用 MATLAB 进行数据分析，可知该市现有交巡警服务平台设置方案是不合理的，并且每个区域均需要添加若干平台，然后利用 0-1 变量和多目标规划方法，将满足题意的最少平台个数和每个平台任务量尽量分布均匀作为约束条件，进而求出每个区域所添加平台的最少个数和具体标号，求出 A、B、C、D、E、F 分别要添加的最少平台个数分别为 4、2、15、8、14 和 13 个；对于追捕逃犯的围捕方案，首先分析逃犯的所有可能的动向，然后确定需要封锁的路口，然后采用线性规划的方法分析派遣哪些巡警平台去执行封锁任务，最后采用分析法进一步减小围捕的范围，从而得出最佳围堵方案。

关键词：交巡警平台调度、 Floyd 算法 、多目标规划、0－1变量、

1. 问题重述

交巡警在警务实践活动中,依托分布于街道上的交巡警平台,承担起了刑事执法、治安管理、交通管理、服务百姓等多重职能,为平安建设构筑起了一道坚实的防线。

1.1 问题一由三部分组成：

（1）是在给出了该市中心城区 A 的交通网络和现有的 20 个交巡警服务平台的设置情况示意图及相关数据信息的前提下，为各交巡警服务平台分配管辖范围，使其在所管辖的范围内的任一路口节点出现突发事件时出警的最大道路长度在$3km$以内。

（2）重大突发事件发生后，全区 20 个交巡警服务平台的警力资源协力对进出该区的 13 条交通要道实现快速全封锁。而一个平台的警力恰好能封锁一个路口，给出该区交巡警服务平台警力合理的调度方案。

（3）由于现有交巡警服务平台的工作量不均衡和有些地方出警时间过长，需在该区内再增加 2 至 5 个平台，确定需要增加平台的具体个数和位置。

1.2 问题二由两部分组成：

（1）全市（六区 A，B，C，D，E，F）的具体情况已知，按照设置交巡警服务平台的原则和任务，分析研究该市现有交巡警服务平台设置方案的合理性并给出方案。

（2）在该市地点 P（第 32 个节点）处发生了重大刑事案件，案发 3 分钟后接到报警，此时犯罪嫌疑人已驾车逃跑。为了快速搜捕嫌疑犯，给出调度全市交巡警服务平台警力资源的最佳围堵方案。

2. 模型假设

（1）所有事发现场都在路口节点上；

（2）有重大突发事件时，一个平台的警力恰好封锁一个路口；

（3）区域内的每条道路都是双行线，不考虑转弯对出警时间造成的影响；

（4）当一个路口与最近的巡警服务平台距离超过$3000m$时，这个路口就由此最近平台管辖；

（5）犯罪嫌疑人的车速和交巡警的车速相等。

3. 符号说明

$d_{i,j}$ 路口节点i到路口节点j之间的道路最短距离$\left(i,j=1,2,\cdots 582\right)$；

p_j 第j路口节点的发案率（次数）；

$y_{i,j}$ 为$0-1$变量，当路口节点j被交巡警平台i管辖时$y_{i,j}=1$，否则$y_{i,j}=0$；

$t_{i,j}$ 为$0-1$变量，当交巡警平台i在3分钟内可赶到路口节点j时$t_{i,j}=1$，否则

$t_{i,j}=0$；

$h_{i,j}$ 为$0-1$变量，在 C 区内，若交巡警服务平台j封锁路口节点i时$h_{i,j}=1$，否

则$h_{i,j}=0$；

$$\min\sum_{i=1}^{154} z_i$$

$$s.t.\begin{cases} y_{i,j}\le t_{i,j}(i,j=1,2,\cdots,154) \\ \sum_{i=1}^{154} y_{i,j}=1(j=1,2,\cdots,154) \\ y_{i,j}\le z_i(i,j=1,2,\cdots,154) \\ z_i=1(i=1,2,\cdots,17) \\ (y_{i,j}-1)y_{i,j}=0(i,j=1,2,\cdots,154) \\ (z_i-1)z_i=0(i,j=1,2,\cdots,154) \end{cases}$$

z_i 为$0-1$变量，当需要在路口节点i处增设交巡警平台时$z_i=1$，否则$z_i=0$；

D_0 数据生成图中每相邻两个路口节点之间距离的临阶矩阵；

D_k Floyd 算法中递推产生的序列矩阵$\left(k=1,2,\cdots 582\right)$；

D Floyd 算法中递推产生的序列矩阵中最后一个，记 $D=D_{582}$；

E_i 矩阵D中每一列中所有元素之和；

$w_{i,j}$ 是相邻路口节点i，j之间的道路长度

m_i 代表封锁逃犯所选择的路口的标号$(i=1,2,\cdots,19)$

n_i 代表所有巡警平台的标号 $(i=1,2,\cdots,80)$

4. 模型建立及求解

4.1 问题一的分析与求解

由 Floyd 算法，假设数据生成图权的相邻矩阵为 D_0：

$$d_{i,j}=w_{i,j}\ D_0=\begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,582} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,582} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{582,1} & d_{n,2} & \cdots & d_{582,582} \end{bmatrix}$$

来存放任意两个路口节点之间的道路最短长度，其中：

$d_{i,i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots 582)$

$d_{i,j}=\infty \qquad i$， j 是不相邻的路口节点，在程序中用充分大的数代替

$d_{i,j}=w_{i,j} \qquad w_{ij}$ 是相邻路口节点 i， j 之间的道路长度

Floyd 算法是用递推产生一个矩阵序列 $D_0,D_1,\cdots,D_k,\cdots,D_n$， 其中 $D_k(i,j)$ 表示从路口节点 i 到路口节点 j 的道路上经过的路口节点数目不多于 k 的道路最短长度。

迭代公式：

$$D_k(i,j)=\min\left(D_{k-1}(i,j),D_{k-1}(i,k)+D_{k-1}(k,j)\right)$$

k 是迭代次数， $i,j,k=1,2,\cdots,n$ 。当 $k=n$ 时， D_n 为各个路口节点之间的最短距离。令最后所得的矩阵记为 $D=D_{582}$，D 是一个 582 行 582 列的矩阵，选出 D 中每一列的最大值 $E_i\ (i=1,2,\cdots 582)$。

可得
$$\begin{cases} d_{i,i}=0 \\ d_{i,j}=\infty \\ d_{i,j}=w_{i,j} \\ D_k(i,j)=\min\left(D_{k-1}(i,j),D_{k-1}(i,k)+D_{k-1}(k,j)\right) \\ D_{582}=D \end{cases}$$

由相关数据信息，利用 Matlab 计算得到任意相邻路口节点之间的道路长度（即为任意两点之间的权值），即得到 $d_{i,j}$ 的矩阵，因此任意两个路口之间的最短距离即为矩阵 D。

4.1.1 模型一的建立与求解

第一步：使每个平台的最大工作量最小

在已知警车运行速度（时速为 60km/h）的前提下，我们将时间约束（$3\min$）转换成距离约束，即最远行车距离为 $3000m$。在已经找出每个巡警平台三分钟之内可以到达的路口之后要，即要列出约束条件使每个平台中任务量最大的最小。

目标函数：使每个平台中任务量最大的最小

$$\min\left\{\max\left\{\sum_{j=1}^{92} y_{i,j}p_j\right\}\right\}(i=1,2,\cdots 20)$$

约束条件如下：

1）当路口节点 j 为平台 i 管辖时 $y_{i,j}=1$ 否则 $y_{i,j}=0$ 因此

$$y_{i,j}\left(y_{i,j}-1\right)=0(i=1,2,\cdots,20,j=1,2,\cdots,92)$$

2）对任何一个路口节点而言，有且仅有一个交巡警平台管辖

$$\sum_{j=1}^{92} y_{i,j}=1(i=1,2,\cdots 20)$$

3) 当交巡警平台 i 在 3 分钟内能赶到路口节点 j 时 $t_{i,j}=1$，最后路口 j 可以归平台 i 管辖也可以不归平台 i 管辖，因此 $y_{i,j}=1$ 或 0；当交巡警平台 i 在 3 分钟内不能赶到路口节点 j 时 $t_{i,j}=0$，路口 j 也不可能归平台 i 管辖，因此 $y_{i,j}=0$；因此有

$$y_{i,j}\le t_{i,j}(i=1,2,\cdots,20,j=1,2,\cdots,92)$$

综上所述，模型建立如下

$$\min\left\{\max\left\{\sum_{j=1}^{92} y_{i,j} p_j\right\}\right\}(i=1,2,\cdots 20)$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{92} y_{i,j}=1(i=1,2,\cdots 20)\\ y_{i,j}\le t_{i,j}(i=1,2,\cdots,20,j=1,2,\cdots,92)\\ y_{i,j}(y_{i,j}-1)=0(i=1,2,\cdots,20,j=1,2,\cdots,92)\end{cases}$$

用 Lingo 软件编程求出最优解为 $\min=8.5$。

由此最优解可知在三分钟之内能满足每个路口都尽量有巡警到达的条件下，每个巡警平台的最大工作量不超过8.5个，即每个巡警平台最大的工作量为8.5。

第二步：使每个巡警平台的任务量尽量达到平均

在每个巡警平台的最大任务量为8.5个的前提下，为了达到使每个平台的工作量分布均匀且不出现工作量相差十分悬殊的目的，即要求每个平台的工作量的方差达到最小，因此列出约束条件使工作量的方差达到最小。

目标函数如下：使每个平台的工作量尽量分布均与

$$\min\frac{\sum_{i=1}^{20}\left(\sum_{j=1}^{92} y_{i,j}p_j-\overline{y}\right)^2}{20}$$

等价于

$$\min\sum_{i=1}^{20}\left(\sum_{j=1}^{92} y_{i,j}p_j-\overline{y}\right)^2$$

约束条件如下：

1) $\overline{y}$ 为各交巡警平台任务量的平均值

$$\overline{y}=\frac{\sum_{j=1}^{92} p_j}{20}$$

2) 使每个平台的任务量小于最大的任务量8.5个

$$\sum_{j=1}^{92} y_{i,j} p_j \le 8.5 (i=1,2,\cdots,20)$$

3）当路口节点 j 为平台 i 管辖时 $y_{i,j}=1$ 否则 $y_{i,j}=0$ 因此

$$y_{i,j}\left(y_{i,j}-1\right)=0 (i=1,2,\cdots,20, j=1,2,\cdots,92)$$

4）对任何一个路口节点而言，有且仅有一个交巡警平台管辖

$$\sum_{j=1}^{92} y_{i,j}=1 (i=1,2,\cdots 20)$$

5）当交巡警平台 i 在 3 分钟内能赶到路口节点 j 时 $t_{i,j}=1$，最后路口 j 可以归平台 i 管辖也可以不归平台 i 管辖，因此 $y_{i,j}=1$ 或 0；当交巡警平台 i 在 3 分钟内不能赶到路口节点 j 时 $t_{i,j}=0$，路口 j 也不可能归平台 i 管辖，因此 $y_{i,j}=0$；因此有

$$y_{i,j} \le t_{i,j} (i=1,2,\cdots,20, j=1,2,\cdots,92)$$

可建立以下数学模型

$$\min \sum_{i=1}^{20} \left(\sum_{j=1}^{92} y_{i,j} p_j - \overline{y} \right)^2$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{92} y_{i,j}=1 (i=1,2,\cdots 20) \\ y_{i,j} \le t_{i,j} (i=1,2,\cdots,20, j=1,2,\cdots,92) \\ y_{i,j}(y_{i,j}-1)=0 (i=1,2,\cdots 20; j=1,2,\cdots 92) \\ y_{i,j} \cdot p_j \le 8.5 (i=1,2,\cdots 20) \end{cases}$$

用 Lingo 软件编程求出在目标函数的最优解，可得出 $y_{i,j}$ 的数值矩阵，通过 MATLAB 对此矩阵分析计算（具体编程算法见附录代码）矩阵中的元素可得各个交巡警服务平台的管辖范围如下表 1：

表 1　　　　　各交巡警服务平台的管辖范围

平台号	所管辖的路口节点标号	平台号	所管辖的路口节点标号

1	1 70 72 77 78 79 80	11	11 25 26 27
2	2 39 67 68 71	12	12
3	3 43 44 54 55 76	13	13 21 22 23 24
4	4 57 60 62 63 64 65 66	14	14
5	5 49 50 53 59	15	15 28 29
6	6 48 51 52 56 58	16	16 33 38
7	7 30 32 61	17	17 40 41 42
8	8 34 35 45 47	18	18 73 74 84 88 90 91
9	9 31 36 37 46	19	19 69 75 81 82 83
10	10	20	20 85 86 87 89 92

4.1.2 模型二的建立与求解

第一步：使每个平台到达相应出口的最大距离最小

有重大突发事件时，需要调度全区 20 个交巡警服务平台的警力资源，对进出该区的 13 条交通要道实现快速全封锁，假设封锁一个路口恰好需要一个交巡警平台。尽量使封锁所有交通要道的出警时间最大值达到最小，在警车速度一定时，等价于出警的道路长度最大值达到最小，因此要列出约束条件使每个平台到达相应的出口的最大距离最小。

目标函数：使每个平台到达相应出口的最大距离最小

$$\min\left\{\max\left\{\sum_{j=1}^{13} d_{i,j} y_{i,j}\right\}\right\}(i=1,2,\cdots 20)$$

约束条件：

1）平台 i 可以封锁 j 路口也可以不封锁 j 路口，即 $y_{i,j}=1$ 或者 $y_{i,j}=0$，因此

$$y_{i,j}\left(y_{i,j}-1\right)=0(i=1,2,\cdots,20,\ j=1,2,\cdots,13):$$

2）任意一个交通路口 j 处一定要有一个平台 i 封锁

$$\sum_{i=1}^{20} y_{i,j}=1(j=1,2,\cdots 13)$$

3）每一个交巡警平台可以封锁一个路口也可以不封锁，即 $\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} = 1$ 或者 $\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} = 0$，因此有

$$(\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} - 1)\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} = 0(i = 1, 2, \cdots, 20)$$

可建立优化模型

$$\min\left\{\max\left\{\sum_{j=1}^{13} d_{i,j} y_{i,j}\right\}\right\}(i = 1, 2, \cdots, 20)$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{20} y_{i,j} = 1(j = 1, 2, \cdots, 13) \\ (\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} - 1)\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} = 0(j = 1, 2, \cdots, 13) \\ y_{i,j}(y_{i,j} - 1) = 0(i = 1, 2, \cdots, 20; j = 1, 2, \cdots, 13) \end{cases}$$

用 Lingo 软件编程求出目标函数最优解为： $\min = 8000m$ 。

此最优解为每个平台到达相应出口的最大路程为 $8000m$，即每个平台到达相应出口要行使的最大路程为 $8000m$ 。

第二步：使总的出警道路总长度最小

在每个平台到达相应出口最大行使路程为 $8000m$ 的前提下，列出约束条件使所有平台的出警路程达到最小值。

目标函数：使出警的道路总长度最小

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{13} y_{i,j} d_{i,j}\right\}$$

约束条件：

1）封锁任一个交通要道，出警的道路值应满足

$$\sum_{j=1}^{13} d_{i,j} y_{i,j} \le 8000(i = 1, 2, \cdots, 20)$$

2）平台i可以封锁j路口也可以不封锁j路口，即$y_{i,j}=1$或者$y_{i,j}=0$，因此

$$y_{i,j}\left(y_{i,j}-1\right)=0(i=1,2,\cdots,20,j=1,2,\cdots,13):$$

3）任意一个交通路口 j 处一定要有一个平台 i 封锁

$$\sum_{i=1}^{20} y_{i,j}=1(j=1,2,\cdots 13)$$

4）每一个交巡警平台可以封锁一个路口也可以不封锁，即 $\sum_{i=1}^{13} y_{i,j}=1$ 或者 $\sum_{i=1}^{13} y_{i,j}=0$，因此有

$$(\sum_{i=1}^{13} y_{i,j}-1)\sum_{i=1}^{13} y_{i,j}=0(i=1,2,\cdots,20)$$

可建立模型为

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{13} y_{i,j} d_{i,j}\right\}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{13} d_{i,j} y_{i,j}\le 8000(i=1,2,\cdots,20)\\ \sum_{i=1}^{20} y_{i,j}=1(j=1,2,\cdots,13)\\ (\sum_{i=1}^{13} y_{i,j}-1)\sum_{i=1}^{13} y_{i,j}=0(j=1,2,\cdots,13)\\ y_{i,j}(y_{i,j}-1)=0(i=1,2,\cdots,20;j=1,2,\cdots,13)\end{cases}$$

用 Lingo 软件编程求出目标函数最优解为：$\min=46300m$

此最优解是在最大路程为 $8000m$ 的前提下为了使每个平台到达相应出口的距离总和最小，此最小值为 $46300m$ 。

第三步：使每个平台到达相应出口的距离尽量均匀

在上两步的前提下，即每个平台出警最大路程为 $8000m$ 并且总的出警最小总路程为 $46300m$ 的条件下，要列出约束条件使每个平台的出警路程尽量分布均匀。

目标函数：使平台到达相应出口的行使距离方差最小

$$\min \frac{\sum_{j=1}^{13}\left(\sum_{j=1}^{13} d_{i,j} y_{i,j} - \overline{y}\right)^2}{13}$$

等价于

$$\min \sum_{j=1}^{13}\left(\sum_{j=1}^{13} d_{i,j} y_{i,j} - \overline{y}\right)^2$$

约束条件：

1）在出警道路总长度最小的前提下，封锁任一个交通要道，出警道路长度平均值为

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{13} y_{i,j} d_{i,j}}{13}$$

2）所有平台到达相应出口的出警距离总和应该不大于 46300m

$$\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{13} y_{i,j} d_{i,j} \le 46300$$

3）封锁任一个交通要道，出警的道路值应满足

$$\sum_{j=1}^{13} d_{i,j} y_{i,j} \le 8000 (i = 1, 2, \cdots, 20)$$

4）平台 i 可以封锁 j 路口也可以不封锁 j 路口，即 $y_{i,j} = 1$ 或者 $y_{i,j} = 0$，因此

$$y_{i,j}\left(y_{i,j} - 1\right) = 0 (i = 1, 2, \cdots, 20, j = 1, 2, \cdots, 13);$$

5）任意一个交通路口 j 处一定要有一个平台 i 封锁

$$\sum_{i=1}^{20} y_{i,j} = 1 (j = 1, 2, \cdots 13)$$

6）每一个交巡警平台可以封锁一个路口也可以不封锁，即 $\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} = 1$ 或者

$\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} = 0$，因此有

$$(\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} - 1)\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} = 0 (i = 1, 2, \cdots, 20)$$

综上所述，可建立以下数学模型

$$\min \sum_{j=1}^{13}\left(\sum_{j=1}^{13} d_{i,j} y_{i,j} - \overline{y}\right)^2$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{13} y_{i,j} d_{i,j} \\ \sum_{j=1}^{13} d_{i,j} \cdot y_{i,j} \le 8000 (i = 1, 2, \cdots 20) \\ y_{i,j}(y_{i,j} - 1) = 0 (i = 1, 2, \ldots 20; j = 1, 2, \cdots 92) \\ \sum_{i=1}^{20} y_{i,j} = 1 (j = 1, 2, \cdots 13) \\ (\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} - 1)\sum_{i=1}^{13} y_{i,j} = 0 \\ \sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{13} y_{i,j} d_{i,j} \le 46300 \end{cases}$$

用 Lingo 软件编程求出在约束条件下目标函数的最优解，得到此最优解时，对应得到关于 $y_{i,j}$ 的数值矩阵，用 MATLAB 对此矩阵分析计算（具体算法实现见代码附录）得封锁13 个交通要道需要对各个交巡警平台的调度方案如下表 2：

表 2　　该区交巡警服务平台的调度方案

交巡警平台标号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
所封锁的交通要道标号	—	11	—	13	—	12	9	10	3	5
交巡警平台标号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
所封锁的交通要道标号	7	1	6	4	8	2	—	—	—	—

注：—表示该交巡警平台不去封锁任何要道