

2020-2021初三数学初中数学 旋转的专项培优 易错 难题练习题(含答案)附详细答案

一、旋转

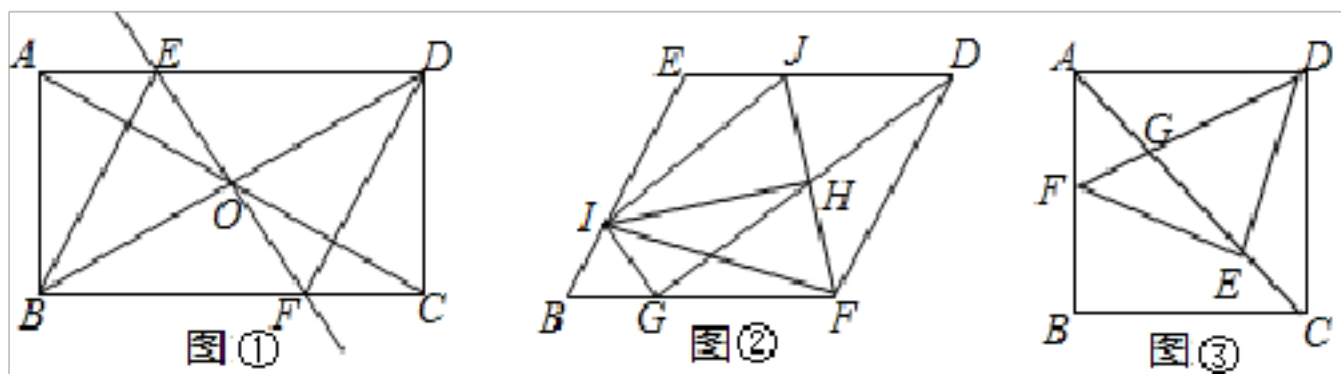
1. (1)如图①，在矩形 ABCD 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 O 作直线 $EF \perp BD$ ，交 AD 于点 E，交 BC 于点 F，连接 BE、DF，且 BE 平分 $\angle ABD$ 。

① 求证：四边形 BFDE 是菱形；

② 直接写出 $\angle EBF$ 的度数；

(2)把(1)中菱形 BFDE 进行分离研究，如图②，点 G、I 分别在 BF、BE 边上，且 $BG=BI$ ，连接 GD，H 为 GD 的中点，连接 FH 并延长，交 ED 于点 J，连接 IJ、IH、IF、IG。试探究线段 IH 与 FH 之间满足的关系，并说明理由；

(3)把(1)中矩形 ABCD 进行特殊化探究，如图③，当矩形 ABCD 满足 $AB=AD$ 时，点 E 是对角线 AC 上一点，连接 DE、EF、DF，使 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形，DF 交 AC 于点 G。请直接写出线段 AG、GE、EC 三者之间满足的数量关系。



【答案】 (1) ① 详见解析；② 60° 。 (2) $IH = \sqrt{3} FH$ ； (3) $EG^2 = AG^2 + CE^2$ 。

【解析】

【分析】

(1) ① 由 $\triangle DOE \cong \triangle BOF$ ，推出 $EO=OF$ ， $\because OB=OD$ ，推出四边形 EBFDE 是平行四边形，再证明 $EB=ED$ 即可。

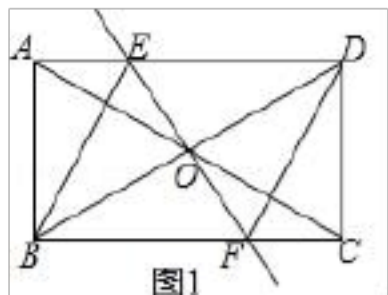
② 先证明 $\angle ABD = 2\angle ADB$ ，推出 $\angle ADB = 30^\circ$ ，延长即可解决问题。

(2) $IH = \sqrt{3} FH$ 。只要证明 $\triangle IJF$ 是等边三角形即可。

(3) 结论： $EG^2 = AG^2 + CE^2$ 。如图 3 中，将 $\triangle ADG$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle DCM$ ，先证明 $\triangle DEG \cong \triangle DEM$ ，再证明 $\triangle ECM$ 是直角三角形即可解决问题。

【详解】

(1) ① 证明：如图 1 中，



$\because$ 四边形 ABCD 是矩形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $OB=OD$ ，

$\therefore \angle EDO = \angle FBO$ ，

在 $\triangle DOE$ 和 $\triangle BOF$ 中，

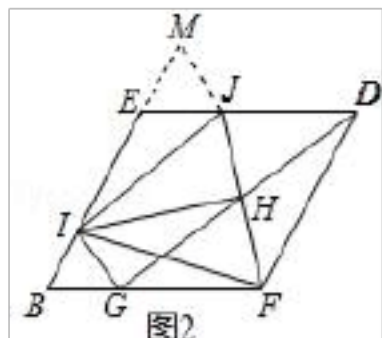
$$\begin{aligned} \angle EDO &= \angle FBO \\ OD &= OB, \\ \angle EOD &= \angle BOF \end{aligned}$$

$\therefore \triangle DOE \cong \triangle BOF$,
 $\therefore EO = OF$, $\because OB = OD$,
 $\therefore$ 四边形 EBF D 是平行四边形,
 $\because EF \perp BD$, $OB = OD$,
 $\therefore EB = ED$,
 $\therefore$ 四边形 EBF D 是菱形.

② $\because BE$ 平分 $\angle ABD$,
 $\therefore \angle ABE = \angle EBD$,
 $\because EB = ED$,
 $\therefore \angle EBD = \angle EDB$,
 $\therefore \angle ABD = 2\angle ADB$,
 $\because \angle ABD + \angle ADB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ADB = 30^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ABE = \angle EBO = \angle OBF = 30^\circ$,
 $\therefore \angle EBF = 60^\circ$.

(2) 结论: $IH = \sqrt{3} FH$.

理由: 如图 2 中, 延长 BE 到 M, 使得 $EM = EJ$, 连接 MJ.



$\because$ 四边形 EBF D 是菱形, $\angle B = 60^\circ$,
 $\therefore EB = BF = ED$, $DE \parallel BF$,
 $\therefore \angle JDH = \angle FGH$,

在 $\triangle DHJ$ 和 $\triangle GHF$ 中,

$$\begin{aligned} \angle DHG &= \angle GHF \\ DH &= GH, \\ \angle JDH &= \angle FGH \end{aligned}$$

$\therefore \triangle DHJ \cong \triangle GHF$,
 $\therefore DJ = FG$, $JH = HF$,
 $\therefore EJ = BG = EM = BI$,
 $\therefore BE = IM = BF$,
 $\because \angle MEJ = \angle B = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle MEJ$ 是等边三角形,

$$\therefore MJ = EM = NI, \angle M = \angle B = 60^\circ$$

在 $\triangle BIF$ 和 $\triangle MJI$ 中,

$$BI = MJ$$

$$\angle B = \angle M,$$

$$BF = IM$$

$$\therefore \triangle BIF \cong \triangle MJI,$$

$$\therefore IF = IJ, \angle BFI = \angle MIJ, \because HJ = HF,$$

$$\therefore IH \perp JF,$$

$$\because \angle BFH + \angle BIF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle MIJ + \angle BIF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle JIF = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle JIF$ 是等边三角形,

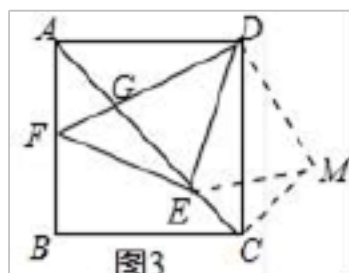
在 $\text{Rt}\triangle IHF$ 中, $\because \angle IHF = 90^\circ, \angle IFH = 60^\circ,$

$$\therefore \angle FIH = 30^\circ,$$

$$\therefore IH = \sqrt{3} FH.$$

(3) 结论: $EG^2 = AG^2 + CE^2$.

理由: 如图 3 中, 将 $\triangle ADG$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle DCM$,



$$\because \angle FAD + \angle DEF = 90^\circ,$$

$\therefore AFED$ 四点共圆,

$$\therefore \angle EDF = \angle DAE = 45^\circ, \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF + \angle EDC = 45^\circ,$$

$$\because \angle ADF = \angle CDM,$$

$$\therefore \angle CDM + \angle CDE = 45^\circ = \angle EDG,$$

在 $\triangle DEM$ 和 $\triangle DEG$ 中,

$$DE = DE$$

$$\angle EDG = \angle EDM,$$

$$DG = DM$$

$$\therefore \triangle DEG \cong \triangle DEM,$$

$$\therefore GE = EM,$$

$$\because \angle DCM = \angle DAG = \angle ACD = 45^\circ, AG = CM,$$

$$\therefore \angle ECM = 90^\circ$$

$$\therefore EC^2 + CM^2 = EM^2,$$

$$\because EG = EM, AG = CM,$$

$$\therefore GE^2 = AG^2 + CE^2.$$

【点睛】

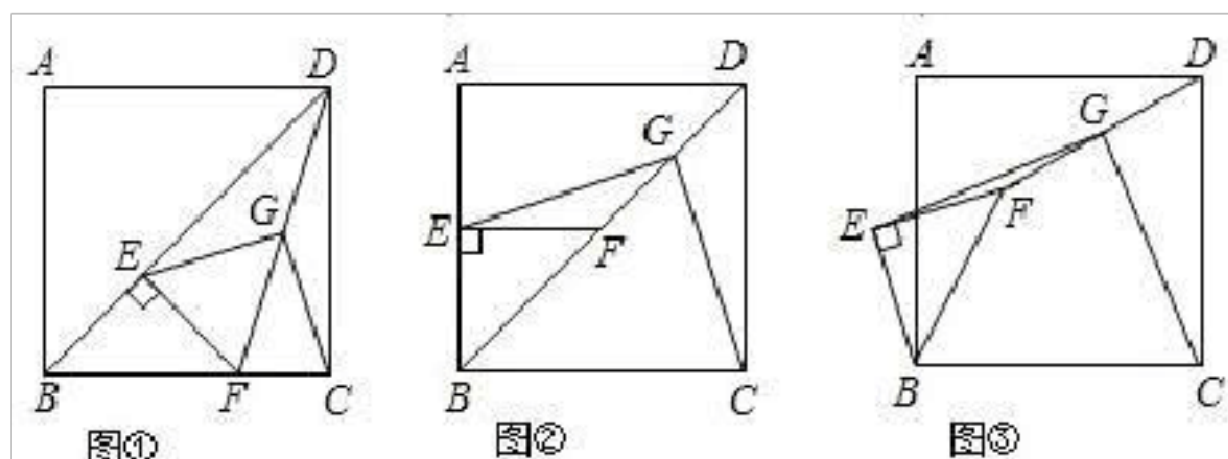
考查四边形综合题、矩形的性质、正方形的性质、菱形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，勾股定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形，学会转化的思想思考问题.

2. 已知正方形 $ABCD$ 中, E 为对角线 BD 上一点, 过 E 点作 $EF \perp BD$ 交 BC 于 F , 连接 DF , G 为 DF 中点, 连接 EG , CG .

(1) 求证: $EG=CG$;

(2) 将图①中 $\triangle BEF$ 绕 B 点逆时针旋转 45° , 如图②所示, 取 DF 中点 G , 连接 EG , CG . 问 (1) 中的结论是否仍然成立? 若成立, 请给出证明; 若不成立, 请说明理由;

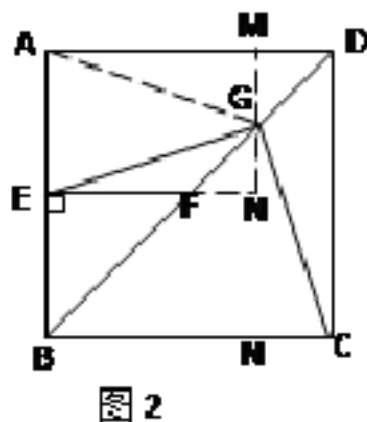
(3) 将图①中 $\triangle BEF$ 绕 B 点旋转任意角度, 如图③所示, 再连接相应的线段, 问 (1) 中的结论是否仍然成立? 通过观察你还能得出什么结论 (均不要求证明).



【答案】解: (1) $CG=EG$

(2) (1) 中结论没有发生变化, 即 $EG=CG$.

证明: 连接 AG , 过 G 点作 $MN \perp AD$ 于 M , 与 EF 的延长线交于 N 点.



在 $\triangle DAG$ 与 $\triangle DCG$ 中,

$\because AD=CD, \angle ADG=\angle CDG, DG=DG,$

$\therefore \triangle DAG \cong \triangle DCG.$

$\therefore AG=CG.$

在 $\triangle DMG$ 与 $\triangle FNG$ 中,

$\because \angle DGM=\angle FGN, FG=DG, \angle MDG=\angle NFG,$

$\therefore \triangle DMG \cong \triangle FNG.$

$\therefore MG=NG$

在矩形 $AENM$ 中, $AM=EN.$

在 $Rt\triangle AMG$ 与 $Rt\triangle ENG$ 中,

$\because AM=EN, \quad MG=NG,$
 $\therefore \triangle AMG \cong \triangle ENG.$
 $\therefore AG=EG$
 $\therefore EG=CG.$

(3) (1) 中的结论仍然成立.

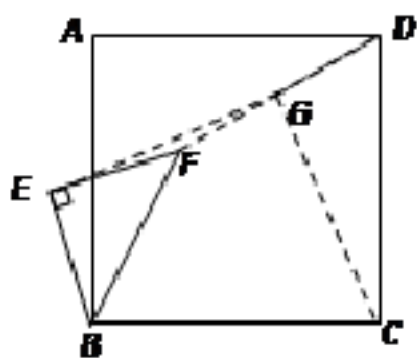


图 3

【解析】

试题分析：(1) 利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，可证出 $CG=EG$.

(2) 结论仍然成立，连接 AG ，过 G 点作 $MN \perp AD$ 于 M ，与 EF 的延长线交于 N 点；再证明 $\triangle DAG \cong \triangle DCG$ ，得出 $AG=CG$ ；再证出 $\triangle DMG \cong \triangle FNG$ ，得到 $MG=NG$ ；再证明 $\triangle AMG \cong \triangle ENG$ ，得出 $AG=EG$ ；最后证出 $CG=EG$.

(3) 结论依然成立. 还知道 $EG \perp CG$;

试题解析：

解：(1) 证明：在 $\text{Rt}\triangle FCD$ 中，

$\because G$ 为 DF 的中点，

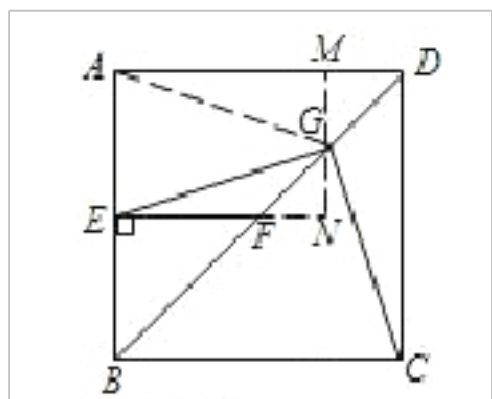
$$\therefore CG = \frac{1}{2}FD,$$

同理，在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中， $EG = \frac{1}{2}FD,$

$\therefore CG=EG$;

(2) (1) 中结论仍然成立，即 $EG=CG$;

连接 AG ，过 G 点作 $MN \perp AD$ 于 M ，与 EF 的延长线交于 N 点，如图所示：



在 $\triangle DAG$ 与 $\triangle DCG$ 中，

$\because AD=CD, \quad \angle ADG= \angle CDG, \quad DC=DC,$

$\therefore \triangle DAG \cong \triangle DCG,$

$\therefore AG=CG,$

在 $\triangle DMG$ 与 $\triangle FNG$ 中，

$\because \angle DGM= \angle FGN, \quad DG=FG, \quad \angle MDG= \angle NFG,$

$\therefore \triangle DMG \cong \triangle FNG$,

$\therefore MG=NG$,

在矩形 AENM 中, $AM=EN$. ,

在 $Rt\triangle AMG$ 与 $Rt\triangle ENG$ 中,

$\because AM=EN$, $MG=NG$,

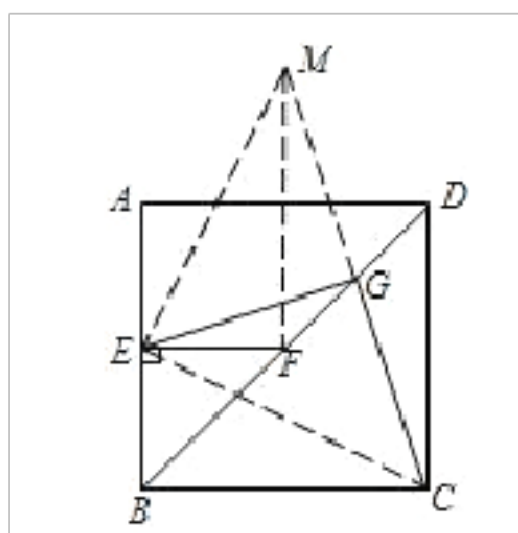
$\therefore \triangle AMG \cong \triangle ENG$,

$\therefore AG=EG$,

$\therefore EG=CG$,

(3) (1) 中的结论仍然成立, 即 $EG=CG$ 且 $EG \perp CG$ 。

过 F 作 CD 的平行线并延长 CG 交于 M 点, 连接 EM、EC, 过 F 作 FN 垂直于 AB 于 N, 如图所示:



由于 G 为 FD 中点, 易证 $\triangle CDG \cong \triangle MFG$, 得到 $CD=FM$,

又因为 $BE=EF$, 易证 $\angle EFM = \angle EBC$, 则 $\triangle EFM \cong \triangle EBC$, $\angle FEM = \angle BEC$, $EM=EC$

$\because \angle FEC + \angle BEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle FEC + \angle FEM = 90^\circ$, 即 $\angle MEC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle MEC$ 是等腰直角三角形,

$\because G$ 为 CM 中点,

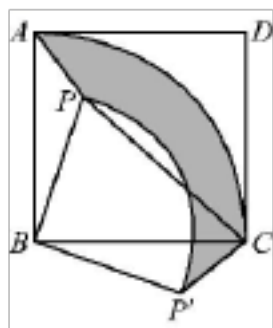
$\therefore EG=CG$, $EG \perp CG$ 。

【点睛】本题解题关键是作出辅助线, 且利用了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质、全等三角形的判定和性质, 难度较大。

3. 如图, 点 P 是正方形 ABCD 内的一点, 连接 PA, PB, PC. 将 $\triangle PAB$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 到 $\triangle P'CB$ 的位置.

(1) 设 AB 的长为 a, PB 的长为 b ($b < a$), 求 $\triangle PAB$ 旋转到 $\triangle P'CB$ 的过程中边 PA 所扫过区域 (图中阴影部分) 的面积;

(2) 若 $PA=2$, $PB=4$, $\angle APB=135^\circ$, 求 PC 的长.



【答案】(1) $S_{\text{阴影}} = \frac{\pi}{4}(a^2 - b^2)$; (2) $PC = 6$.

【解析】

试题分析：(1) 依题意，将 $\triangle P'CB$ 逆时针旋转 90° 可与 $\triangle PAB$ 重合，此时阴影部分面积 = 扇形 BAC 的面积 - 扇形 BPP' 的面积，根据旋转的性质可知，两个扇形的中心角都是 90° ，可据此求出阴影部分的面积.

(2) 连接 PP' ，根据旋转的性质可知： $BP = BP'$ ，旋转角 $\angle PBP' = 90^\circ$ ，则 $\triangle PBP'$ 是等腰直角三角形， $\angle BP'C = \angle BPA = 135^\circ$ ， $\angle PP'C = \angle BP'C - \angle BP'P = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ ，可推出 $\triangle PP'C$ 是直角三角形，进而可根据勾股定理求出 PC 的长.

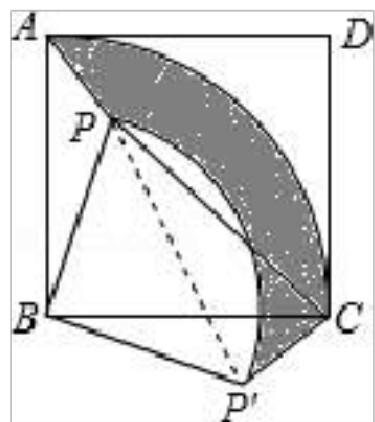
试题解析：(1) $\because$ 将 $\triangle PAB$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 到 $\triangle P'CB$ 的位置，

$\therefore \triangle PAB \cong \triangle P'CB$,

$\therefore S_{\triangle PAB} = S_{\triangle P'CB}$,

$S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} BAC} - S_{\text{扇形} BPP'} = \frac{\pi}{4}(a^2 - b^2)$;

(2) 连接 PP' ，根据旋转的性质可知： $\triangle APB \cong \triangle CP'B$



$\therefore BP = BP' = AP' = CP = PA = 2$, $\angle PBP' = 90^\circ$

$\therefore \triangle PBP'$ 是等腰直角三角形， $PP'^2 = PB^2 + P'B^2 = 32$;

又 $\because \angle BP'C = \angle BPA = 135^\circ$,

$\therefore \angle PP'C = \angle BP'C - \angle BP'P = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ ，即 $\triangle PP'C$ 是直角三角形.

$PC = \sqrt{PP'^2 + P'C^2} = 6$.

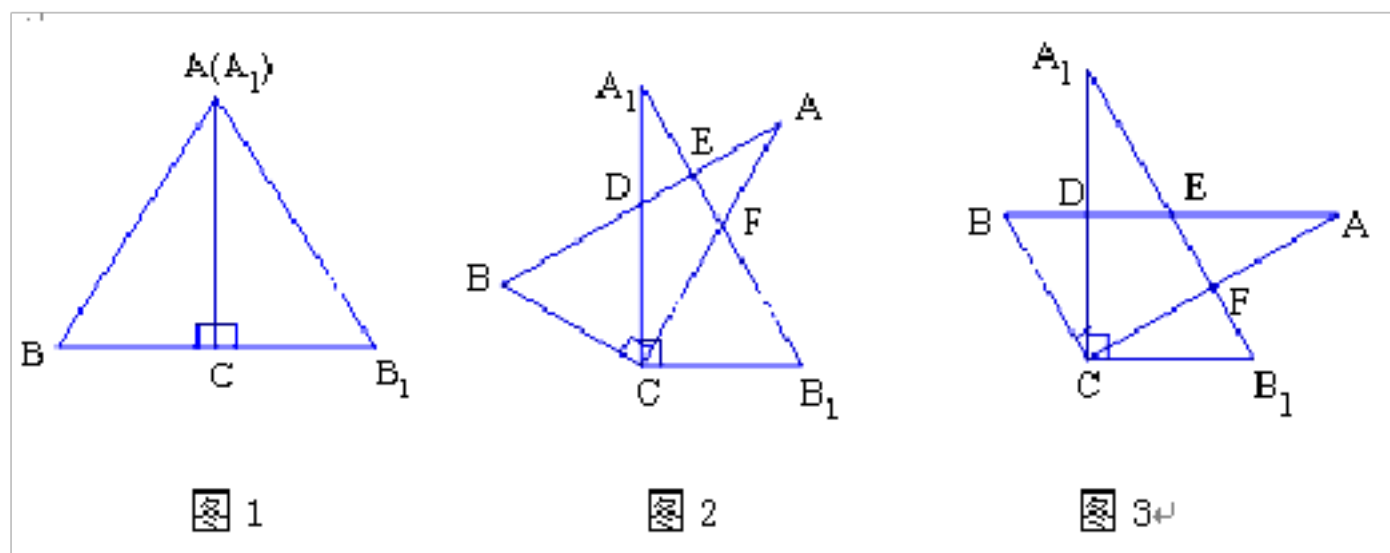
考点：1. 扇形面积的计算；2. 正方形的性质；3. 旋转的性质.

4. 已知：如图 1，将两块全等的含 30° 角的直角三角板按图所示的方式放置， $\angle BAC = \angle B_1A_1C = 30^\circ$ ，点 B, C, B_1 在同一条直线上.

(1) 求证： $AB = 2BC$

(2) 如图 2，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 α° ($0 < \alpha < 180$)，在旋转过程中，设 AB 与 A_1C 、 A_1B_1 分别交于点 D 、 E ， AC 与 A_1B_1 交于点 F . 当 α 等于多少度时， AB 与 A_1B_1 垂直？请说明理由.

(3) 如图 3，当 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针方向旋转至如图所示的位置，使 $AB \parallel CB_1$ ， AB 与 A_1C 交于点 D ，试说明 $A_1D = CD$.



【答案】（1）证明见解析

（2）当旋转角等于 30° 时，AB 与 A_1B_1 垂直.

（3）理由见解析

【解析】

试题分析：（1）由等边三角形的性质得 $AB=BB_1$ ，又因为 $BB_1=2BC$ ，得出 $AB=2BC$ ；

（2）利用 AB 与 A_1B_1 垂直得 $\angle A_1ED=90^\circ$ ，则 $\angle A_1DE=90^\circ-\angle A_1=60^\circ$ ，根据对顶角相等得 $\angle BDC=60^\circ$ ，由于 $\angle B=60^\circ$ ，利用三角形内角和定理得 $\angle A_1CB=180^\circ-\angle BDC-\angle B=60^\circ$ ，所以 $\angle ACA_1=90^\circ-\angle A_1CB=30^\circ$ ，然后根据旋转的定义得到旋转角等于 30° 时，AB 与 A_1B_1 垂直；

（3）由于 $AB \parallel CB_1$ ， $\angle ACB_1=90^\circ$ ，根据平行线的性质得 $\angle ADC=90^\circ$ ，在 $Rt\triangle ADC$ 中，根据含 30° 的直角三角形三边的关系得到 $CD=\frac{1}{2}AC$ ，再根据旋转的性质得 $AC=A_1C$ ，所以

$$CD=\frac{1}{2}A_1C, \text{ 则 } A_1D=CD.$$

试题解析：

（1） $\because \triangle ABB_1$ 是等边三角形；

$$\therefore AB=BB_1$$

$$\because BB_1=2BC$$

$$\therefore AB=2BC$$

（2）解：当 AB 与 A_1B_1 垂直时， $\angle A_1ED=90^\circ$ ，

$$\therefore \angle A_1DE=90^\circ-\angle A_1=90^\circ-30^\circ=60^\circ,$$

$$\because \angle B=60^\circ, \therefore \angle BCD=60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACA_1=90^\circ-60^\circ=30^\circ,$$

即当旋转角等于 30° 时，AB 与 A_1B_1 垂直.

（3） $\because AB \parallel CB_1$ ， $\angle ACB_1=90^\circ$ ，

$$\therefore \angle CDB=90^\circ, \text{ 即 } CD \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的高,}$$

设 $BC=a$ ， $AC=b$ ，则由（1）得 $AB=2a$ ， $A_1C=b$ ，

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2}AB \cdot CD,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot CD$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}b, \text{ 即 } CD = \frac{1}{2}A_1C,$$

$$\therefore A_1D = CD.$$

【点睛】 本题考查了旋转的性质：旋转前后两图形全等；对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角．也考查了含 30 度的直角三角形三边的关系．

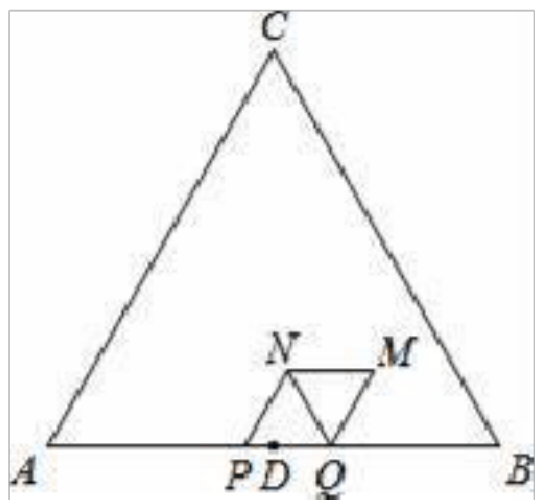
5. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $AB=6\text{cm}$ ， D 为边 AB 中点．动点 P 、 Q 在边 AB 上同时从点 D 出发，点 P 沿 $D \rightarrow A$ 以 1cm/s 的速度向终点 A 运动．点 Q 沿 $D \rightarrow B \rightarrow D$ 以 2cm/s 的速度运动，回到点 D 停止．以 PQ 为边在 AB 上方作等边三角形 PQN ．将 $\triangle PQN$ 绕 QN 的中点旋转 180° 得到 $\triangle MNQ$ ．设四边形 $PQMN$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分图形的面积为 S (cm^2)，点 P 运动的时间为 t (s) ($0 < t < 3$)．

(1) 当点 N 落在边 BC 上时，求 t 的值．

(2) 当点 N 到点 A 、 B 的距离相等时，求 t 的值．

(3) 当点 Q 沿 $D \rightarrow B$ 运动时，求 S 与 t 之间的函数表达式．

(4) 设四边形 $PQMN$ 的边 MN 、 MQ 与边 BC 的交点分别是 E 、 F ，直接写出四边形 $PEMF$ 与四边形 $PQMN$ 的面积比为 $2:3$ 时 t 的值．



【答案】 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 2 (3) $S = S_{\text{菱形 } PQMN} = 2S_{\triangle PNQ} = \frac{9\sqrt{3}}{2}t^2$; $S = -\frac{7\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{15\sqrt{3}}{2}t - \frac{9\sqrt{3}}{4}$ (4) $t=1$ 或 $t = \frac{15}{7}$

【解析】

试题分析：(1) 由题意知：当点 N 落在边 BC 上时，点 Q 与点 B 重合，此时 $DQ=3$ ；

(2) 当点 N 到点 A 、 B 的距离相等时，点 N 在边 AB 的中线上，此时 $PD=DQ$ ；

(3) 当 $0 \leq t \leq \frac{3}{5}$ 时，四边形 $PQMN$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分图形为四边形 $PQMN$ ；当 $\frac{3}{5} \leq t \leq \frac{3}{2}$ 时，四边形 $PQMN$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分图形为五边形 $PQFEN$ ．

(4) MN 、 MQ 与边 BC 的有交点时，此时 $\frac{3}{5} < t < \frac{12}{5}$ ，列出四边形 $PEMF$ 与四边形 $PQMN$ 的面积表达式后，即可求出 t 的值．

试题解析：(1) $\because \triangle PQN$ 与 $\triangle ABC$ 都是等边三角形，

$\therefore$ 当点 N 落在边 BC 上时，点 Q 与点 B 重合．

$$\therefore DQ=3$$

$$\therefore 2t=3.$$

$$\therefore t=\frac{3}{2};$$

(2) $\because$ 当点 N 到点 A、B 的距离相等时，点 N 在边 AB 的中线上，

$$\therefore PD=DQ,$$

当 $0 < t < \frac{3}{2}$ 时，

$$\text{此时，} PD=t, DQ=2t$$

$$\therefore t=2t$$

$$\therefore t=0 \text{ (不合题意，舍去),}$$

当 $\frac{3}{2} \leq t \leq 3$ 时，

$$\text{此时，} PD=t, DQ=6-2t$$

$$\therefore t=6-2t,$$

$$\text{解得 } t=2;$$

综上所述，当点 N 到点 A、B 的距离相等时， $t=2$;

(3) 由题意知：此时， $PD=t, DQ=2t$

当点 M 在 BC 边上时，

$$\therefore MN=BQ$$

$$\because PQ=MN=3t, BQ=3-2t$$

$$\therefore 3t=3-2t$$

$$\therefore \text{解得 } t=\frac{3}{5}$$

如图①，当 $0 \leq t \leq \frac{3}{5}$ 时，

$$S_{\triangle PNQ} = \frac{\sqrt{3}}{4} PQ^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} t^2;$$

$$\therefore S = S_{\text{菱形 PQMN}} = 2S_{\triangle PNQ} = \frac{9\sqrt{3}}{2} t^2,$$

如图②，当 $\frac{3}{5} \leq t \leq \frac{3}{2}$ 时，

设 MN、MQ 与边 BC 的交点分别是 E、F，

$$\because MN=PQ=3t, NE=BQ=3-2t,$$

$$\therefore ME=MN-NE=PQ-BQ=5t-3,$$

$\because \triangle EMF$ 是等边三角形，

$$\therefore S_{\triangle EMF} = \frac{\sqrt{3}}{4} ME^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (5t-3)^2$$

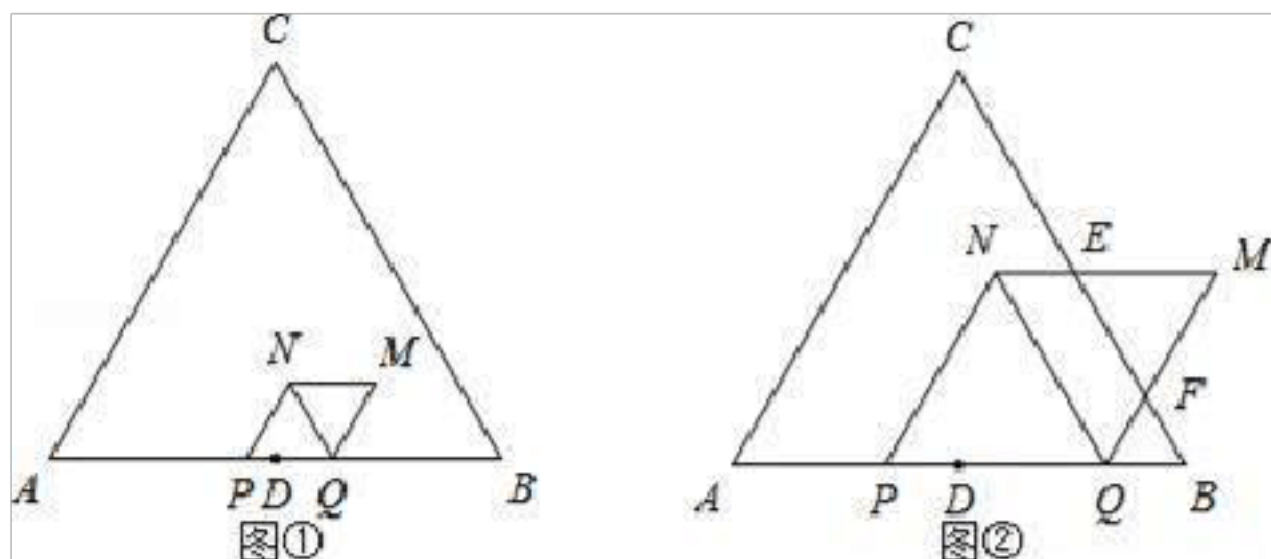
$$S = S_{\text{菱形} PQMN} - S_{\triangle MEF} = \frac{9\sqrt{3}}{2}t^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(5t-3)^2$$

$$S = -\frac{7\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{15\sqrt{3}}{2}t - \frac{9\sqrt{3}}{4};$$

(4) MN、MQ 与边 BC 的交点分别是 E、F，

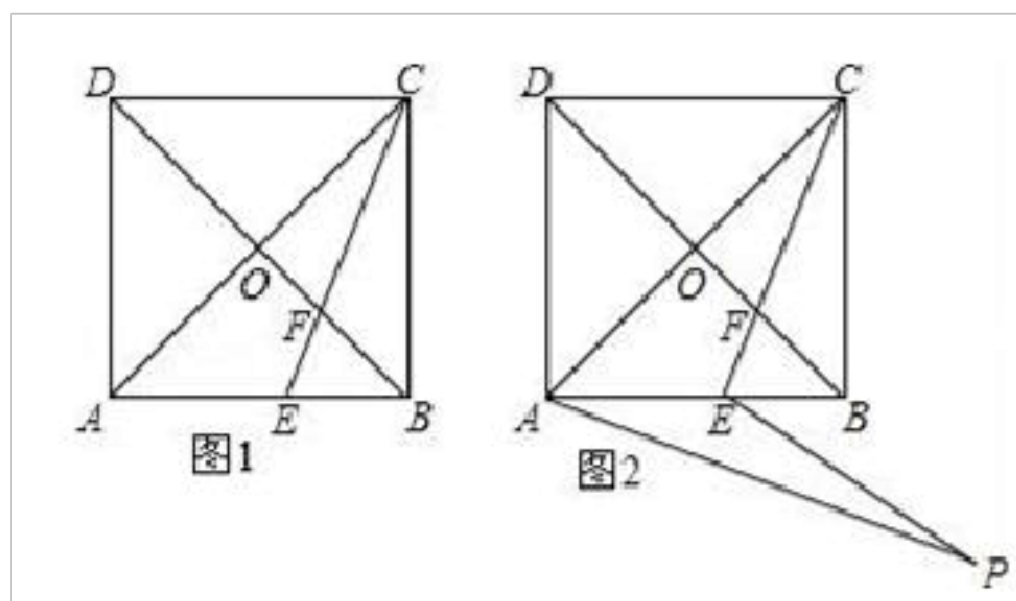
此时 $\frac{3}{5} < t < \frac{12}{5}$,

$t=1$ 或 $t = \frac{15}{7}$.



考点：几何变换综合题

6. 正方形 ABCD 的边长为 1，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 E 是 AB 边上的一个动点（点 E 不与点 A、B 重合），CE 与 BD 相交于点 F，设线段 BE 的长度为 x.



(1) 如图 1，当 AD=20F 时，求出 x 的值；

(2) 如图 2，把线段 CE 绕点 E 顺时针旋转 90°，使点 C 落在点 P 处，连接 AP，设△APE 的面积为 S，试求 S 与 x 的函数关系式并求出 S 的最大值.

【答案】 (1) $x = \sqrt{2} - 1$;

(2) $S = -\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{8}$ ($0 < x < 1$),

当 $x = \frac{1}{2}$ 时，S 的值最大，最大值为 $\frac{1}{8}$.

【解析】

试题分析：（1）过 O 作 OM // AB 交 CE 于点 M，如图 1，由平行线等分线段定理得到 CM=ME，根据三角形的中位线定理得到 AE=2OM=2OF，得到 OM=OF，于是得到 BF=BE=x，

求得 $OF=OM=\frac{1-x}{2}$ 解方程 $x+\frac{1-x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即可得到结果；

（2）过 P 作 PG ⊥ AB 交 AB 的延长线于 G，如图 2，根据已知条件得到 ∠ECB=∠PEG，根据全等三角形的性质得到 EB=PG=x，由三角形的面积公式得到 $S=\frac{1}{2}(1-x) \cdot x$ ，根据二次函数的性质即可得到结论．

试题解析：（1）过 O 作 OM // AB 交 CE 于点 M，如图 1，

∵ OA=OC，

∴ CM=ME，

∴ AE=2OM=2OF，

∴ OM=OF，

$$\therefore \frac{OM}{BE} = \frac{OF}{BF},$$

∴ BF=BE=x，

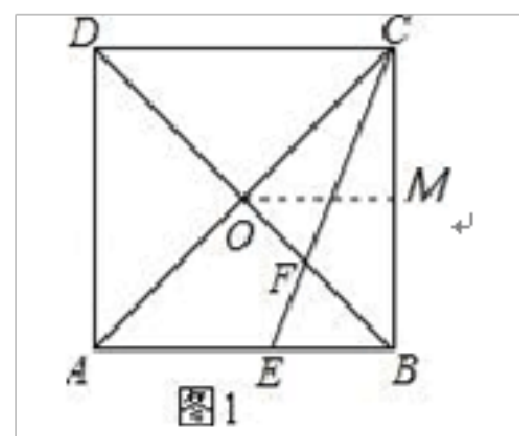
$$\therefore OF=OM=\frac{1-x}{2},$$

∵ AB=1，

$$\therefore OB=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore x+\frac{1-x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore x=\sqrt{2}-1;$$



（2）过 P 作 PG ⊥ AB 交 AB 的延长线于 G，如图 2，

∵ ∠CEP=∠EBC=90°，

∴ ∠ECB=∠PEG，

∵ PE=EC，∠EGP=∠CBE=90°，

在△EPG 与△CEB 中，

$$\begin{cases} \angle CBE = \angle PGE \\ \angle CEB = \angle PEC \\ PE = EC \end{cases},$$

∴ △EPG ≅ △CEB，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/136021110111010233>