湖南省岳阳市2024届高三下学期教学质量监测（三）（三模）数学试题

副标题

考试时间：**分钟 满分：**分

注意事项：

1、填写答题卡的内容用2B铅笔填写

2、提前 xx 分钟收取答题卡

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。 （共8题）

1．已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$ ，$B=\left\{x\left|\frac{x-3}{x+1}\leq 0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$ （ ）

A．$\{-1,0,1,2,3\}$　　B．$\{0,1,2,3\}$　　C．$\{1,2,3\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2．若虚数单位 i 是关于 x 的方程 $ax^3+bx^2+2x+1=0(a,b\in\mathrm{R})$ 的一个根，则 $|a+b\mathrm{i}|=$ （ ）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．5

3．直线 $2x-3y+1=0$ 的一个方向向量是（ ）

A．$(3,2)$　　B．$(2,3)$　　C．$(2,-3)$　　D．$(3,-2)$

4．下列命题正确的是（ ）

A．若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l\parallel\alpha$

B．若直线 a 不平行于平面 α 且 $a\not\subset\alpha$ ，则平面 α 内不存在与 a 平行的直线

C．已知直线 a，b，平面 α,β，且 $a\subset\alpha,b\subset\beta,\alpha\parallel\beta$ ，则直线 a，b 平行

D．已知两条相交直线 a，b，且 $a\parallel$ 平面 α，则 b 与 α 相交

5．已知 $y=f(x+1)+1$ 为奇函数，则 $f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=$ （ ）

A．-12　　B．-10　　C．-6　　D．-5

6．把5个人安排在周一至周五值班，要求每人值班一天，每天安排一人，甲乙安排在不相邻的两天，乙丙安排在相邻的两天，则不同的安排方法数是（ ）

A．96种　　B．60种　　C．48种　　D．36种

7．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2\geq a_1>0,S_{20}=100$ ，则 $a_{10}a_{11}$ （ ）

A．有最小值 25　　B．有最大值 25　　C．有最小值 50　　D．有最大值 50

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x+a, x<a \\ x^2+2ax, x\geq a \end{cases}$，f(x)不存在最小值，则实数 a 的取值范围是（ ）

A．$(-1,0)$　　B．$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

C．$(-1,0)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$　　D．$\left(-\frac{1}{3},0\right)\cup(1,+\infty)$

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．（共 3 题）

9．下列结论正确的是（ ）

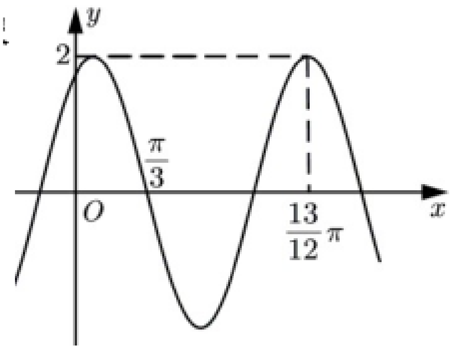
A．$C_7^n=C_7^3$，则 $n=3$

B．$C_n^m=\frac{m+1}{n+1}C_{n+1}^{m+1}$

C．$(x-1)^{10}$ 的展开式的第 6 项的系数是 C_{10}^5

D．$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 C_6^3-1

10．已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则（ ）



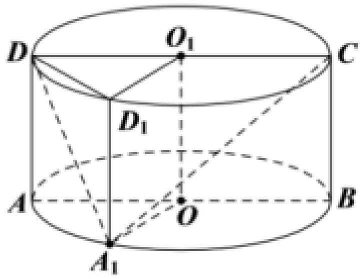
A．$\omega=2$

B．$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}\right),k\in Z$

C．$f(x)$ 的图象可由函数 $y=2\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到

D．满足条件 $\left(f(x)-f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)>0$ 的最小正整数 x 为 2

11．如图，四边形 $ABCD$ 是圆柱 OO_1 的轴截面且面积为 2，四边形 OO_1DA 绕 OO_1 逆时针旋转 $\theta(0\le\theta\le\pi)$ 到四边形 $OO_1D_1A_1$，则（ ）



A．圆柱 OO_1 的侧面积为 2π

B．当 $0<\theta<\pi$ 时，$DD_1\perp A_1C$

C．当 $0<\theta<\pi$ 时，四面体 CDD_1A_1 的外接球表面积最小值为 3π

D．当 $BD_1=\sqrt{2}$ 时，$\frac{2\pi}{3}\le\theta\le\pi$

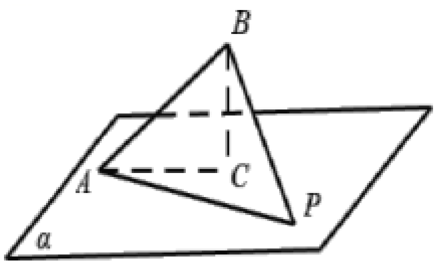
三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．（共 3 题）

12．已知双曲线 C 过点 $(1,\sqrt{6})$，且渐近线方程为 $y=\pm2x$，则 C 的离心率为__________．

13．已知角 α,β 的终边关于直线 $y=x$ 对称，且 $sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 α,β 的一组取值可以是

$\alpha=$__________，$\beta=$__________．

14．如图所示，直角三角形 ABC 所在平面垂直于平面 α，一条直角边 AC 在平面 α 内，另一条直角边 BC 长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 且 $\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，若平面 α 上存在点 P，使得 $\triangle ABP$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，则线段 CP 长度的最小值为__________．



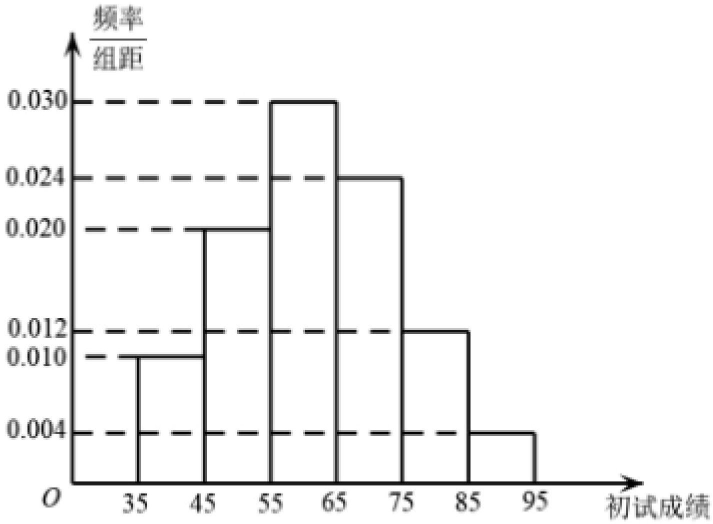
四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．（共 5 题）

15．已知等差数列$\{a_n\}$满足：$a_1=2$，且a_1、a_2、a_4成等比数列．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若等差数列$\{a_n\}$的公差不为零且数列$\{b_n\}$满足：$b_n=\dfrac{4n^2}{(a_n-1)(a_n+1)}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

16．某地区举行专业技能考试，共有8000人参加，分为初试和复试，初试通过后，才能参加复试．为了解考生的考试情况，随机抽取了100名考生的初试成绩，并以此为样本，绘制了样本频率分布直方图，如图所示．



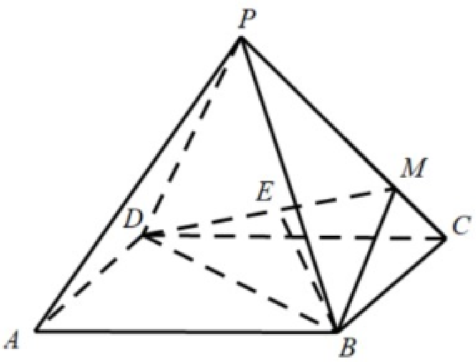
附：若随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则：$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6827$，

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9545, P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.9973$．

（1）若所有考生的初试成绩X近似服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ为样本平均数的估计值，$\sigma=11.5$，试利用正态分布估计所有考生中初试成绩不低于85分的人数；

（2）复试共四道题，前两道题考生每题答对得5分，答错得0分，后两道题考生每题答对得10分，答错得0分，四道题的总得分为考生的复试成绩．已知某考生进入复试，他在复试中，前两题每题能答对的概率均为$\dfrac{3}{4}$，后两题每题能答对的概率均为$\dfrac{3}{5}$，且每道题回答正确与否互不影响．规定复试成绩上了20分（含20分）的考生能进入面试，请问该考生进入面试的概率有多大?

17．已知四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是边长为4的菱形，$\angle DAB=60°$，$PA=PC$，$PB=PD=2\sqrt{10}$，M是线段PC上的点，且$\overrightarrow{PC}=4\overrightarrow{MC}$．



（1）证明：$PC\perp$平面BDM；

（2）点E在直线DM上，求BE与平面$ABCD$所成角的最大值.

18．已知动圆P过定点$F(0,1)$且与直线$y=3$相切，记圆心P的轨迹为曲线E.

（1）已知A、B两点的坐标分别为$(-2,1)$、$(2,1)$，直线AP、BP的斜率分别为k_1、k_2，证明：$k_1-k_2=1$；

（2）若点$M\left(x_1,y_1\right)$、$N\left(x_2,y_2\right)$是轨迹E上的两个动点且$x_1x_2=-4$，设线段MN的中点为Q，圆P与动点Q的轨迹Γ交于不同于F的三点C、D、G，求证：$\triangle CDG$的重心的横坐标为定值.

19．已知$\triangle ABC$的三个角A，B，C的对边分别为a，b，c且$c=2b$，点D在边BC上，AD是$\angle BAC$的角平分线，设$AD=kAC$（其中k为正实数）.

（1）求实数k的取值范围；

（2）设函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}ax^3-\dfrac{5}{2}bx^2+cx-\dfrac{b}{2}$

①当$k=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时，求函数$f(x)$的极小值；

②设x_0是$f(x)$的最大零点，试比较x_0与1的大小.

【答案区】

1. 【答案】B

【解析】【解答】解：原不等式$\frac{x-3}{x+1}\le 0$，转化为$\begin{cases}(x-3)(x+1)\le 0\\ x+1\ne 0\end{cases}$，解得$-1<x\le 3$，

则集合$B=\{x\mid -1<x\le 3\}$，因为集合$A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，所以$A\cap B=\{0,1,2,3\}$.

故答案为：B.

【分析】先解不等式求得集合B，再根据集合的交集运算求解即可.

2. 【答案】C

【解析】【解答】解：因为i是方程$ax^3+bx^2+2x+1=0(a,b\in \mathrm{R})$的一个根，所以$ai^3+bi^2+2i+1=0$，

即$(2-a)i+(1-b)=0$，又因为$a,b\in \mathrm{R}$，所以$a=2,b=1$，则$|a+bi|=|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

故答案为：C.

【分析】由题意，结合复数相等的充要条件列式求得a,b，再求复数的模即可.

3. 【答案】A

【解析】【解答】解：易知直线$2x-3y+1=0$的斜率为$\frac{2}{3}$，

则直线$2x-3y+1=0$的一个方向向量为$\vec{a}=\left(1,\frac{2}{3}\right)$；

A、因为$3\times\frac{2}{3}-1\times 2=0$，所以向量$(3,2)$与$\left(1,\frac{2}{3}\right)$共线，故A符合；

B、因为$2\times\frac{2}{3}-1\times 3\ne 0$，即向量$(2,3)$与$\left(1,\frac{2}{3}\right)$不共线，故B不符合；

C、因为$3\times\frac{2}{3}-1\times(-2)\ne 0$，即向量$(3,-2)$与$\left(1,\frac{2}{3}\right)$不共线，故C不符合；

D、因为$2\times\frac{2}{3}-1\times(-3)\ne 0$，即向量$(2,-3)$与$\left(1,\frac{2}{3}\right)$不共线，故D不符合.

故答案为：A.

【分析】先求直线的斜率即可得该直线的一个方向向量$\vec{a}$，再根据向量共线求解即可.

4．【答案】B

【解析】【解答】解 A、若直线l上有无数个点不在平面α内，则l与α相交或平行，故 A 错误；

B、若直线a不平行于平面α且$a\not\subset\alpha$，则a与α相交，所以平面α内不存在与a平行的直线，故 B 正确；

C、已知直线a,b，平面α,β，且$a\subset\alpha,b\subset\beta,\alpha//\beta$，则直线$a,b$平行或异面，故 C 错误；

D、两条相交直线a,b，且$a//$平面α，则$b//$平面α或b与α相交，故 D 错误.

故答案为：B.

【分析】根据空间直线与直线、直线与平面的位置关系判断即可.

5．【答案】D

【解析】【解答】解：因为函数$y=f(x+1)+1$的为奇函数，即图象关于原点对称，

所以函数$y=f(x)$的图象关于点$(1,-1)$对称，

则$f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=[f(-1)+f(3)]+[f(0)+f(2)]+f(1)$，

即$f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=2\times(-1)+2\times(-1)+(-1)=-5$.

故答案为：D.

【分析】由题意，得函数$y=f(x)$图象的对称性，即可求$f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$的值.

6．【答案】D

【解析】【解答】解：设这五个人分别为甲乙丙丁戊；

因为乙丙安排在相邻的两天，将乙丙捆绑看成一个整体，再考虑2人之间的顺序，有$A_2^2=2$种情况；

将这个整体与丁戊全排列，有$A_3^3=6$种安排方法；

排好后产生 4 个空位，因甲乙不相邻，则只能从 3 个空中任选 1 个安排甲，有 $A_3^1=3$ 种安排方法，

由分步乘法计数原理可知：不同的方案共有 $2\times6\times3=36$ 种.

故答案为：D.

【分析】根据分步乘法计数原理，结合捆绑法和插空法求解即可.

7. 【答案】B

【解析】【解答】解：由 $S_{20}=100$ ，可得 $S_{20}=\dfrac{20(a_1+a_{20})}{2}=10(a_{10}+a_{11})=100$ ，

解得 $a_{10}+a_{11}=10$ ，

因为 $a_2\geq a_1>0$ ，所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\geq0$ ，故 $a_{10}>0,a_{11}>0$ ，

则 $a_{10}a_{11}\leq(\dfrac{a_{10}+a_{11}}{2})^2=25$ ，当且仅当 $a_{10}=a_{11}=5$ 时等号成立，

即当 $a_{10}=a_{11}=5$ 时，$a_{10}a_{11}$ 取得最大值 25.

故答案为：B.

【分析】由 $S_{20}=100$ ，利用等差数列的求和公式集合等差数列的性质推出 $a_{10}+a_{11}=10$ ，再利用基本不等式求解即可.

8. 【答案】C

【解析】【解答】解：当a<0 时，若 $x<a$ ，则 $f(x)=e^x+a$ ，

因为函数 $f(x)=e^x+a$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，所以 $a<f(x)<e^a+a$ ，

若 $x\geq a$ ，则 $f(x)=x^2+2ax=(x+a)^2-a^2\geq-a^2$ ，当且仅当 $x=-a$ 时取等号，

因为 $f(x)$ 不存在最小值，所以 $-a^2>a$ ，所以 $-1<a<0$；

当 $a\geq0$ 时，若 $x<a$ ，则 $f(x)=e^x+a$ ，

因为函数 $f(x)=e^x+a$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，所以 $a<f(x)<e^a+a$ ，

若 $x\geq a$ ，则 $f(x)=x^2+2ax=(x+a)^2-a^2\geq f(a)=3a^2$ ，当且仅当 $x=a$ 时取等号，

因为 $f(x)$ 不存在最小值，所以 $3a^2>a$ ，所以 $a>\dfrac{1}{3}$ ，

综上所述：实数a的取值范围是$(-1,0)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

故答案为：C.

【分析】分$a<0,a\geq 0$结合指数函数单调性及二次函数性质，确定函数$f(x)$的取值规律，由函数不存在最小值列不等式求a的范围即可.

9. 【答案】B,D

【解析】【解答】解：A、因为$C_7^n=C_7^3$，由组合数性质可得$n=3$或$n=4$，故A错误；

B、$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{m+1}{n+1}\frac{(n+1)\cdot n!}{(m+1)\cdot m!\cdot(n-m)!}=\frac{m+1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(m+1)!\cdot[(n+1)-(m+1)]!}$，

则$C_n^m=\frac{m+1}{n+1}C_{n+1}^{m+1}$，故B正确；

C、$(x-1)^{10}$展开式的第6项为$T_6=C_{10}^5x^{10-5}(-1)^5=-C_{10}^5x^5$，则第6项的系数是$-C_{10}^5$，故C错误；

D、$(1+x)^3$的展开式中x^2的系数为C_3^2，$(1+x)^4$的展开式中x^2的系数为C_4^2，

$(1+x)^5$的展开式中x^2的系数为C_5^2，

则$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5$的展开式中x^2的系数为

$C_3^2+C_4^2+C_5^2=C_3^2+C_3^3+C_4^2+C_5^2-1=C_4^3+C_4^2+C_5^2-1=C_5^3+C_5^2-1=C_6^3-1$，

故D正确.

故答案为：BD.

【分析】根据组合数的性质即可判断A；利用组合数的性质证明结论即可判断B；根据二项式展开式的通项公式求第6项，确定其系数即可判断C；结合二项式展开式的通项公式及组合数性质求展开式中x^2的系数即可判断D.

10. 【答案】A,B,D

【解析】【解答】解 A、由图可得$\frac{3}{4}T=\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$，则$\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，因为$\omega>0$，

所以$\omega=2$，故A正确；