

2023-2024 学年贵州省安顺市平坝一中高三第三次高考适应性考试数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1 + a_3 + a_5 = 6$ ， $a_7 = 6$. 则这个数列的前 7 项和等于 ()

A. 12 B. 21 C. 24 D. 36
2. 已知 AB 是过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的弦， O 是原点，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ ()

A. -2 B. -4 C. 3 D. -3
3. 已知 A, B 是球 O 的球面上两点， $\angle AOB = 90^\circ$, C 为该球面上的动点. 若三棱锥 $O - ABC$ 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为 ()

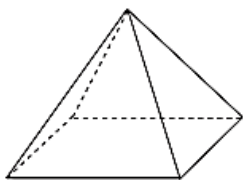
A. 36π B. 64π C. 144π D. 256π
4. 设 $z = \frac{2}{1+i} + (1+i)^2$ (i 是虚数单位), 则 $|z| =$ ()

A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. 2 D. $\sqrt{5}$
5. 若 i 为虚数单位, 则复数 $z = \frac{1+i}{1+2i}$ 在复平面上对应的点位于 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
6. 将一块边长为 a cm 的正方形薄铁皮按如图 (1) 所示的阴影部分裁下, 然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个正四棱锥形容器, 将该容器按如图 (2) 放置, 若其正视图为等腰直角三角形, 且该容器的容积为 $72\sqrt{2}\text{cm}^3$, 则 a 的值为 ()



(1)



(2)

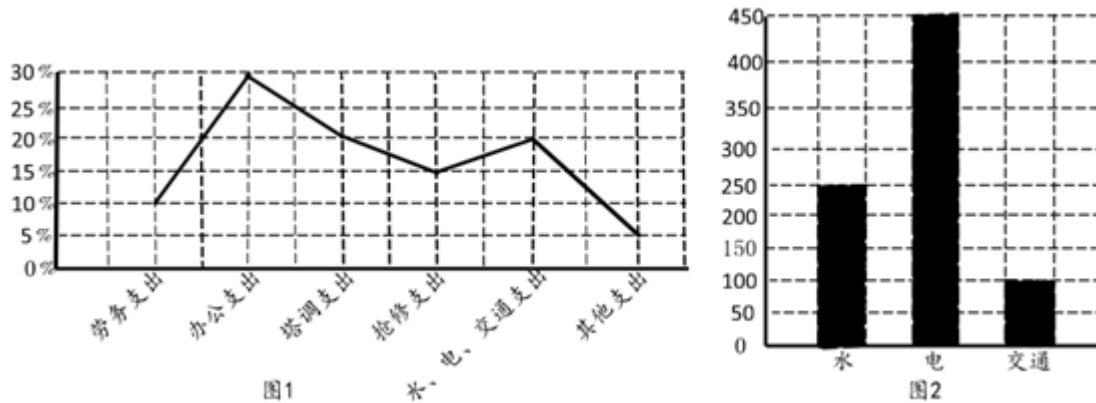
- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ \log_a |x-2| + 1, & x \neq 2, a > 1 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f^2(x) + bf(x) + c$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 则

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 =$ ()

- A. 12 B. 11 C. 6 D. 3

8. 某单位去年的开支分布的折线图如图 1 所示, 在这一年中的水、电、交通开支 (单位: 万元) 如图 2 所示, 则该单位去年的水费开支占总开支的百分比为 ()



- A. 6.25% B. 7.5% C. 10.25% D. 31.25%

9. 已知实数 x, y 满足 $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$, 则 $|x^2 + y^2 - 2| + |x^2 + y^2 - 6x + 7|$ 的最小值等于 ()

- A. $6\sqrt{2} - 5$ B. $6\sqrt{2} - 7$ C. $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ D. $9 - 6\sqrt{2}$

10. 学业水平测试成绩按照考生原始成绩从高到低分为 A、B、C、D、E 五个等级. 某班共有 36 名学生且全部选考物理、化学两科, 这两科的学业水平测试成绩如图所示. 该班学生中, 这两科等级均为 A 的学生有 5 人, 这两科中仅有一科等级为 A 的学生, 其另外一科等级为 B, 则该班 ()

等级 科目	A	B	C	D	E
物理	10	16	9	1	0
化学	8	19	7	2	0

- A. 物理化学等级都是 B 的学生至多有 12 人
 B. 物理化学等级都是 B 的学生至少有 5 人
 C. 这两科只有一科等级为 B 且最高等级为 B 的学生至多有 18 人
 D. 这两科只有一科等级为 B 且最高等级为 B 的学生至少有 1 人

11. 设 $f(x) = \begin{cases} x-2, & (x \geq 10) \\ f[f(x+6)], & (x < 10) \end{cases}$, 则 $f(5) = ()$

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

12. 已知复数 z 满足 $i \cdot z = 2 + i$, 则 z 的共轭复数是 ()

- A. $-1 - 2i$ B. $-1 + 2i$ C. $1 - 2i$ D. $1 + 2i$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线, 且 $\vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AB}$, 若 $AB = 2$, 则 $BC =$ _____.

14. 对任意正整数 n , 函数 $f(n) = 2n^3 - 7n^2 \cos n\pi - \lambda n - 1$, 若 $f(2) \geq 0$, 则 λ 的取值范围是 _____; 若不等式 $f(n) \geq 0$ 恒成立, 则 λ 的最大值为 _____.

15. 满足线性的约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq y \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ 的目标函数 $z = 2x - y$ 的最大值为 _____

16. 若函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图像与直线 $y = m$ 的三个相邻交点的横坐标分别是 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, 则实数 ω 的值为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 90^\circ, \angle PAB = 45^\circ, \angle PBC = 60^\circ, D$ 为棱 AC 的中点, $PA = 2$

(I) 证明: $PA \perp BC$;

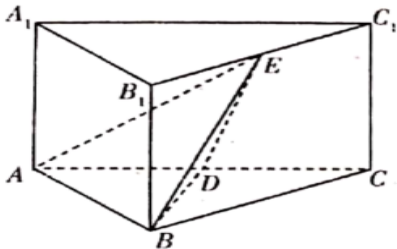
(II) 求直线 PD 与平面 PAC 所成角的正弦值.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列 ($n \in N^*$), $a_1 = 2$, 且 $2a_1, a_3, 3a_2$ 成等差数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \log_2 a_n$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 记 $T_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \dots + \frac{1}{S_n}$, 证明: $1, T_n < 2$.

19. (12 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = AA_1 = 1, AC = \sqrt{3}$, 点 D, E 分别为 AC 和 B_1C_1 的中点.



(I) 棱 AA_1 上是否存在点 P 使得平面 $PBD \perp$ 平面 ABE ? 若存在, 写出 PA 的长并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由.

(II) 求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.

20. (12分) 在直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 M 在椭圆 C 上且

$MF_2 \perp x$ 轴, 直线 MF_1 交 y 轴于 H 点, $OH = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

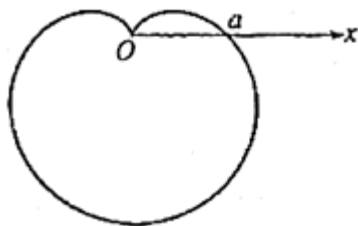
(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过 F_1 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 且满足 $|\vec{OA} + 2\vec{OB}| = |\vec{BA} - \vec{OB}|$, 求 $\triangle ABO$ 的面积.

21. (12分) 心形线是由一个圆上的一个定点, 当该圆在绕着与其相切且半径相同的另外一个圆周上滚动时, 这个定点的轨迹, 因其形状像心形而得名, 在极坐标系 Ox 中, 方程 $\rho = a(1 - \sin \theta) (a > 0)$ 表示的曲线 C_1 就是一条心形线, 如图, 以极轴 Ox 所在的直线为 x 轴, 极点 O 为坐标原点的直角坐标系 xOy 中. 已知曲线 C_2 的参数方程为

如图, 以极轴 Ox 所在的直线为 x 轴, 极点 O 为坐标原点的直角坐标系 xOy 中. 已知曲线 C_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} + t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$



(1) 求曲线 C_2 的极坐标方程;

(2) 若曲线 C_1 与 C_2 相交于 A, O, B 三点, 求线段 AB 的长.

22. (10分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 Q 是椭圆 C 上且不在 x 轴上的一个动点, O 为坐标原点, 过右焦点 F 作 OQ 的平行线交椭圆于 M, N 两个不同的点, 求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

根据等差数列的性质可得 a_3 ，由等差数列求和公式可得结果。

【详解】

因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1 + a_3 + a_5 = 6$ ，

所以 $3a_3 = 6$ ，即 $a_3 = 2$ ，

又 $a_7 = 6$ ，

所以 $d = \frac{a_7 - a_3}{7 - 3} = 1$ ， $a_1 = a_3 - 2d = 0$ ，

故 $S_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2} = 21$

故选：B

【点睛】

本题主要考查了等差数列的通项公式，性质，等差数列的和，属于中档题。

2、D

【解析】

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$ ， $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$ ，设 $AB: x = my + 1$ ，联立方程得到 $y_1 y_2 = -4$ ，计算

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2$ 得到答案。

【详解】

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$ ， $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$ ，故 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2$ 。

易知直线斜率不为 0，设 $AB: x = my + 1$ ，联立方程 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，

得到 $y^2 - 4my - 4 = 0$ ，故 $y_1 y_2 = -4$ ，故 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2 = -3$ 。

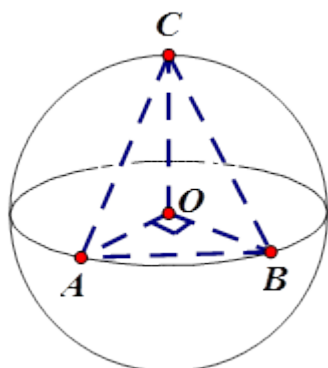
故选：D。

【点睛】

本题考查了抛物线中的向量的数量积，设直线为 $x = my + 1$ 可以简化运算，是解题的关键。

3、C

【解析】



如图所示，当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时，三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大，设球 O 的半径为 R ，此时

$$V_{O-ABC} = V_{C-AOB} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} R^2 \times R = \frac{1}{6} R^3 = 36, \text{ 故 } R = 6, \text{ 则球 } O \text{ 的表面积为 } S = 4\pi R^2 = 144\pi, \text{ 故选 C.}$$

考点：外接球表面积和锥体的体积。

4、A

【解析】

先利用复数代数形式的四则运算法则求出 z ，即可根据复数的模计算公式求出 $|z|$ 。

【详解】

$$\because z = \frac{2}{1+i} + (1+i)^2 = 1-i+2i = 1+i, \therefore |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题主要考查复数代数形式的四则运算法则的应用，以及复数的模计算公式的应用，

属于容易题。

5、D

【解析】

根据复数的运算，化简得到 $z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$ ，再结合复数的表示，即可求解，得到答案。

【详解】

$$\text{由题意，根据复数的运算，可得 } z = \frac{1+i}{1+2i} = \frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i,$$

所对应的点为 $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ 位于第四象限。

故选 *D*.

【点睛】

本题主要考查了复数的运算，以及复数的几何意义，其中解答中熟记复数的运算法则，准确化简复数为代数形式是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

6、*D*

【解析】

推导出 $PM + PN = a$ ，且 $PM = PN$ ， $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ， $PM = \frac{a}{2}$ ，设 MN 中点为 O ，则 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ，由此能表

示出该容器的体积，从而求出参数的值.

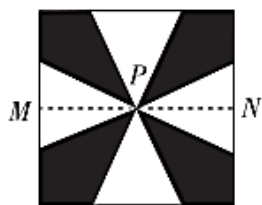
【详解】

解：如图 (4)， $\triangle PMN$ 为该四棱锥的正视图，由图 (3) 可知， $PM + PN = a$ ，且 $PM = PN = \frac{a}{2}$ ，由 $\triangle PMN$ 为等腰直角三角形可知，

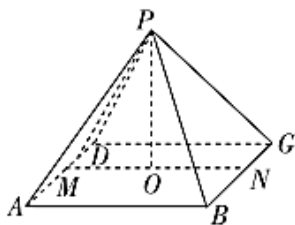
$MN = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，设 MN 中点为 O ，则 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore PO = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{2}}{4}a$ ，

$\therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{4}a = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3 = 72\sqrt{2}$ ，解得 $a = 12$.

故选：*D*



(3)



(4)

【点睛】

本题考查三视图和锥体的体积计算公式的应用，属于中档题.

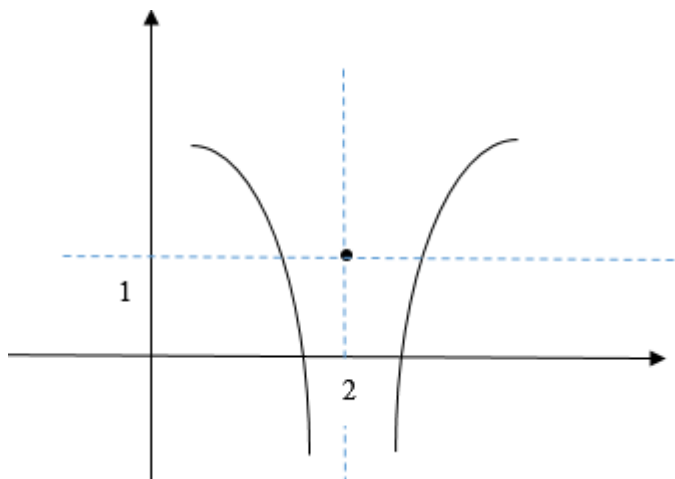
7、*B*

【解析】

画出函数 $f(x)$ 的图象，利用函数的图象判断函数的零点个数，然后转化求解，即可得出结果.

【详解】

作出函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ \log_a |x - 2| + 1, & x \neq 2, a > 1 \end{cases}$ 的图象如图所示，



令 $f(x) = t$,

由图可得关于 x 的方程 $f(x) = t$ 的解有两个或三个 ($t = 1$ 时有三个, $t \neq 1$ 时有两个),

所以关于 t 的方程 $t^2 + bt + c = 0$ 只能有一个根 $t = 1$ (若有两个根, 则关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有四个或五个根),

由 $f(x) = 1$, 可得 x_1, x_2, x_3 的值分别为 $1, 2, 3$,

则 $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 3 = 11$

故选 B.

【点睛】

本题考查数形结合以及函数与方程的应用, 考查转化思想以及计算能力, 属于常考题型.

8、A

【解析】

由折线图找出水、电、交通开支占总开支的比例, 再计算出水费开支占水、电、交通开支的比例, 相乘即可求出水费开支占总开支的百分比.

【详解】

水费开支占总开支的百分比为 $\frac{250}{250 + 450 + 100} \times 20\% = 6.25\%$.

故选: A

【点睛】

本题考查折线图与柱形图, 属于基础题.

9、D

【解析】

设 $x = \sqrt{2} \cos \theta$, $y = \sin \theta$, 去绝对值, 根据余弦函数的性质即可求出.

【详解】

因为实数 x, y 满足 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

设 $x = \sqrt{2} \cos \theta, y = \sin \theta$,

$$\therefore |x^2 + y^2 - 2| + |x^2 + y^2 - 6x + 7| = |2\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2| + |2\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 6\sqrt{2} \cos \theta + 7| = |\sin^2 \theta| + |\cos^2 \theta - 6\sqrt{2} \cos \theta + 8|,$$

$\because \cos^2 \theta - 6\sqrt{2} \cos \theta + 8 = (\cos \theta - 3\sqrt{2})^2 - 10 > 0$ 恒成立,

$$\therefore |x^2 + y^2 - 2| + |x^2 + y^2 - 6x + 7| = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 6\sqrt{2} \cos \theta + 8 = 9 - 6\sqrt{2} \cos \theta \geq 9 - 6\sqrt{2},$$

故则 $|x^2 + y^2 - 2| + |x^2 + y^2 - 6x + 7|$ 的最小值等于 $9 - 6\sqrt{2}$.

故选: D .

【点睛】

本题考查了椭圆的参数方程、三角函数的图象和性质,考查了运算能力和转化能力,意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

10、 D

【解析】

根据题意分别计算出物理等级为 A , 化学等级为 B 的学生人数以及物理等级为 B , 化学等级为 A 的学生人数, 结合表格中的数据进行分析, 可得出合适的选项.

【详解】

根据题意可知, 36 名学生减去 5 名全 A 和一科为 A 另一科为 B 的学生 $10 - 5 + 8 - 5 = 8$ 人 (其中物理 A 化学 B 的有 5 人, 物理 B 化学 A 的有 3 人),

表格变为:

	A	B	C	D	E
物理	$10 - 5 - 5 = 0$	$16 - 3 = 13$	9	1	0
化学	$8 - 5 - 3 = 0$	$19 - 5 = 14$	7	2	0

对于 A 选项, 物理化学等级都是 B 的学生至多有 13 人, A 选项错误;

对于 B 选项, 当物理 C 和 D , 化学都是 B 时, 或化学 C 和 D , 物理都是 B 时, 物理、化学都是 B 的人数最少, 至少为 $13 - 7 - 2 = 4$ (人), B 选项错误;

对于 C 选项, 在表格中, 除去物理化学都是 B 的学生, 剩下的都是一科为 B 且最高等级为 B 的学生,

因为都是 B 的学生最少 4 人，所以一科为 B 且最高等级为 B 的学生最多为 $13+9+1-4=19$ (人)，

C 选项错误；

对于 D 选项，物理化学都是 B 的最多 13 人，所以两科只有一科等级为 B 且最高等级为 B 的学生最少 $14-13=1$ (人)，

D 选项正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查合情推理，考查推理能力，属于中等题.

11、B

【解析】

根据题中给出的分段函数，只要将问题转化为求 $x \geq 10$ 内的函数值，代入即可求出其值.

【详解】

$$\because f(x) = \begin{cases} x-2 & (x \geq 10) \\ f[f(x+6)] & (x < 10) \end{cases},$$

$$\therefore f(5) = f[f(1)]$$

$$= f(9) = f[f(15)]$$

$$= f(13) = 1.$$

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了分段函数中求函数的值，属于基础题.

12、D

【解析】

两边同乘 $-i$ ，化简即可得出答案.

【详解】

$i \cdot z = 2+i$ 两边同乘 $-i$ 得 $z=1-2i$ ，共轭复数为 $1+2i$ ，选 D.

【点睛】

$z = a + bi (a, b \in R)$ 的共轭复数为 $\bar{z} = a - bi$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $2\sqrt{7}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/136120113040010232>