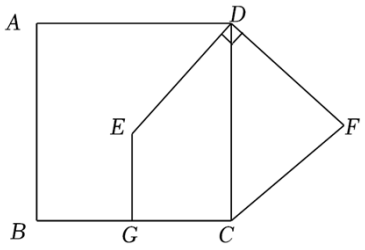
培优冲刺 03　几何最值类问题综合

01 中考直击

本考点是中考五星高频考点，难度中等偏上，在全国很多地市的中考试卷中多有考查。

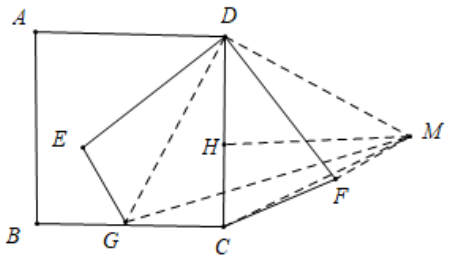
（2022 年柳州中考试卷第 18 题）如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，G 是 BC 的中点，点 E 是正方形内一个动点，且 $EG=2$，连接 DE，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 90°得到线段 DF，连接 CF，则线段 CF 长的最小值为 _____.



【分析】连接 DG，将 DG 绕点 D 逆时针旋转 90°得 DM，连接 MG，CM，MF，作 $MH\perp CD$ 于 H，利用 SAS 证明 $\triangle EDG\cong\triangle DFM$，得 $MF=EG=2$，再说明 $\triangle DGC\cong\triangle DMH$（$AAS$），得 $CG=DH=2$，$MH=CD=4$，求出 CM 的长，再利用三角形三边关系可得答案.

【解答】解：方法一：连接 DG，将 DG 绕点 D 逆时针旋转 90°得 DM，连接 MG，CM，MF，

作 $MH\perp CD$ 于 H，



$\because\angle EDF=\angle GDM$，

$\therefore\angle EDG=\angle FDM$，

$\because DE=DF$，$DG=DM$，

$\therefore\triangle EDG\cong\triangle MDF$（$SAS$），

$\therefore MF=EG=2$，

$\because\angle GDC=\angle DMH$，$\angle DCG=\angle DHM$，$DG=DM$，

$\therefore\triangle DGC\cong\triangle MDH$（$AAS$），

$\therefore CG=DH=2$，$MH=CD=4$，

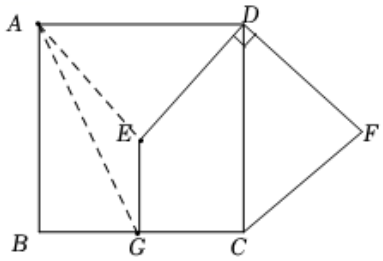
∴$CM=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

∵$CF\geqslant CM-MF$，

∴CF 的最小值为 $2\sqrt{5}-2$，

方法二：连接 AG、AE，

由方法一同理得，$AE=CF$，$AG=2\sqrt{5}$，



∵$AE\geqslant AG-EG=2\sqrt{5}-2$，

∴AE 的最小值为 $2\sqrt{5}-2$，

∴CF 的最小值为 $2\sqrt{5}-2$，

故答案为：$2\sqrt{5}-2$.

点评：本题主要考查了正方形的性质、旋转的性质、全等三角形的判定和性质，勾股定理，三角形三边关系等知识，做辅助线构造全等三角形是解题的关键。

02 教材方位

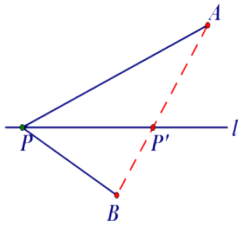
初中数学中，几何最值问题属于难度较大的一类题，问题环境可以是三角形、四边形、圆或者反比例函数、二次函数。而常用到的最值原理则有：两点之间线段最短（三点共线）、点到直线的距离垂线段最短、圆和圆外定点的最值原理等。这类题的原理虽然较为固定，但对学生的逻辑思维能力要求较高，综合型较强。

本考点是中考五星高频考点，难度较大，个别还会以压轴题出现，在全国多地市的中考试卷中多有考查。

03 技法指引

几何最值问题基本原理

1.定点到定点——两点之间，线段最短；



数学定理联系：

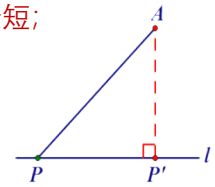
①三角形两边之和＞第三边

故三点共线时 PA＋PB 的值最小=AB

②首尾相连的两折图、三折图

也是当三点（或四点）共线时有最小值

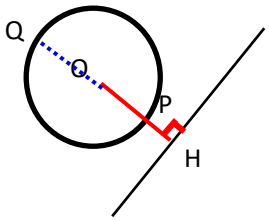
2. 定点到定线——点线之间，垂线段最短；



数学定理联系：

①两平行线间的距离处处相等

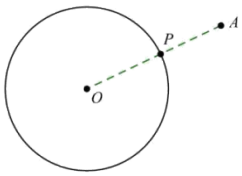
故平行线之间，垂线段最短



②圆上一点到圆外定直线上一点中，垂线段最短

(如图：则 PH 即为圆 O 上的点到直线 L 的最小值;QH 为最大值)

3.定点到定圆——点圆之间，点心线截距最短（长）



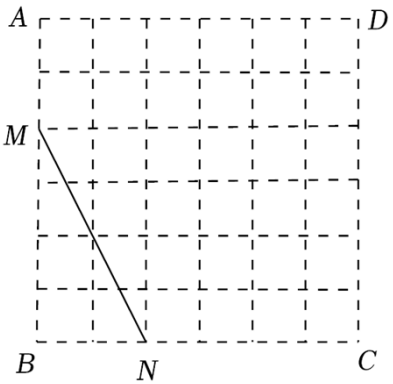
数学定理联系： 圆和圆外定点的最值问题

（如图：则 AP 最小值=OA-r；AP 最大值=OA+r）

04 好题演练

【中考真题练】

1.（2022•湖州）在每个小正方形的边长为 1 的网格图形中，每个小正方形的顶点称为格点．如图，在 6×6 的正方形网格图形 $ABCD$ 中，M，N 分别是 AB，BC 上的格点，$BM=4$，$BN=2$．若点 P 是这个网格图形中的格点，连结 PM，PN，则所有满足 $\angle MPN=45°$ 的 $\triangle PMN$ 中，边 PM 的长的最大值是（　　）



A．$4\sqrt{2}$　　B．6　　C．$2\sqrt{10}$　　D．$3\sqrt{5}$

【分析】在网格中，以 MN 为直角边构造一个等腰直角三角形，使 PM 最长，利用勾股定理求出即可．

【解答】解：如图所示：

∵$BM=NC=4$，$BN=CP=2$，且$\angle B=\angle C=90°$，

∴$\triangle BMN\cong\triangle CNP$（$SAS$），

∴$MN=NP$，$\angle BMN=\angle CNP$，

∵$\angle BMN+\angle BNM=90°$，

∴$\angle BNM+\angle CNP=90°$，

∴$\angle MNP=90°$，

∴$\triangle NMP$ 为等腰直角三角形，

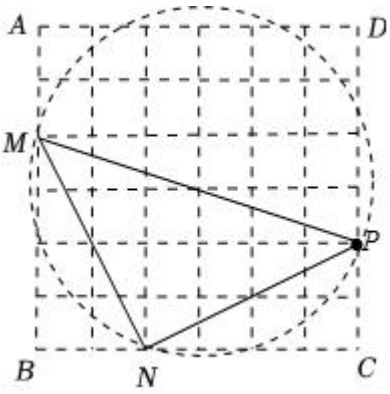
根据题意得到点 P 的轨迹为圆弧，当 MP 为直径时最长，

在 Rt$\triangle BMN$ 和 Rt$\triangle NCP$ 中，

根据勾股定理得：$MN=NP=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

则 $PM=\sqrt{MN^2+PN^2}=2\sqrt{10}$.

故选：C.



2．（2022•安徽）已知点 O 是边长为 6 的等边$\triangle ABC$ 的中心，点 P 在$\triangle ABC$ 外，$\triangle ABC$，$\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCA$ 的面积分别记为 S_0，S_1，S_2，S_3．若 $S_1+S_2+S_3=2S_0$，则线段 OP 长的最小值是（　　）

A．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{5\sqrt{3}}{2}$　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$\frac{7\sqrt{3}}{2}$

【分析】如图，不妨假设点 P 在 AB 的左侧，证明$\triangle PAB$ 的面积是定值，过点 P 作 AB 的平行线 PM，连接 CO 并延长 CO 交 AB 于点 R，交 PM 于点 T．因为$\triangle PAB$ 的面积是定值，推出点 P 的运动轨迹是直线 PM，求出 OT 的值，可得结论．

【解答】解：如图，不妨假设点 P 在 AB 的左侧，

∵$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}$，

∴$S_1+S_0=S_2+S_3$，

∵$S_1+S_2+S_3=2S_0$，

∴$S_1+S_1+S_0=2S_0$，

∴$S_1=\frac{1}{2}S_0$，

∵△ABC 是等边三角形，边长为 6，

∴$S_0=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=9\sqrt{3}$，

∴$S_1=\frac{9\sqrt{3}}{2}$，

过点 P 作 AB 的平行线 PM，连接 CO 延长 CO 交 AB 于点 R，交 PM 于点 T.

∵△PAB 的面积是定值，

∴点 P 的运动轨迹是直线 PM，

∵O 是△ABC 的中心，

∴$CT\perp AB$，$CT\perp PM$，

∴$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot RT=\frac{9\sqrt{3}}{2}$，$CR=3\sqrt{3}$，$OR=\sqrt{3}$，

∴$RT=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴$OT=OR+TR=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

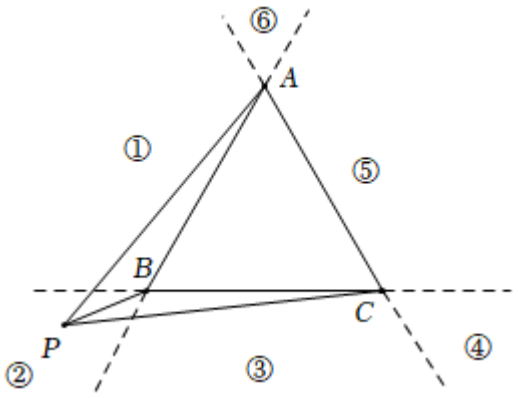
∵$OP\geqslant OT$，

∴OP 的最小值为$\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

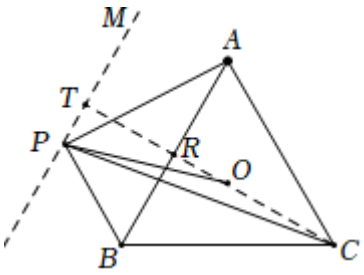
当点 P 在②区域时，同法可得 OP 的最小值为$\frac{7\sqrt{3}}{2}$，

如图，当点 P 在①③⑤区域时，OP 的最小值为$\frac{5\sqrt{3}}{2}$，当点 P 在②④⑥区域时，最小值为$\frac{7\sqrt{3}}{2}$，

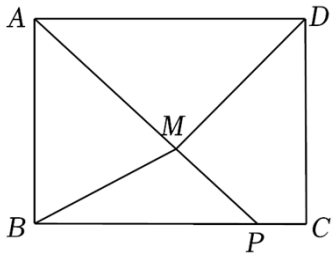
∵$\frac{5\sqrt{3}}{2}<\frac{7\sqrt{3}}{2}$，



故选：B.



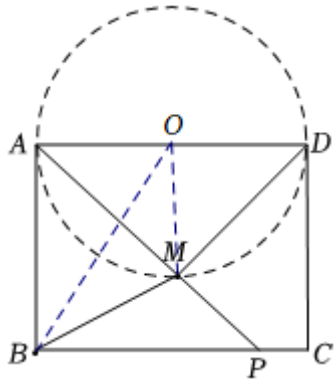
3．（2022•泰安）如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB=3$，$BC=4$，点 P 是线段 BC 上一动点，点 M 为线段 AP 上一点，$\angle ADM=\angle BAP$，则 BM 的最小值为（　　）



A．$\frac{5}{2}$　　B．$\frac{12}{5}$　　C．$\sqrt{13}-\frac{3}{2}$　　D．$\sqrt{13}-2$

【分析】如图，取 AD 的中点 O，连接 OB，OM．证明 $\angle AMD=90°$，推出 $OM=\frac{1}{2}AD=2$，点 M 在以 O 为圆心，2 为半径的⊙O 上，利用勾股定理求出 OB，可得结论．

【解答】解：如图，取 AD 的中点 O，连接 OB，OM．



∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle BAD=90°$，$AD=BC=4$，

∴$\angle BAP+\angle DAM=90°$，

∵$\angle ADM=\angle BAP$，

∴$\angle ADM+\angle DAM=90°$，

∴$\angle AMD=90°$，

∵$AO=OD=2$，

∴$OM=\frac{1}{2}AD=2$，

∴点 M 在以 O 为圆心，2 为半径的⊙O 上，

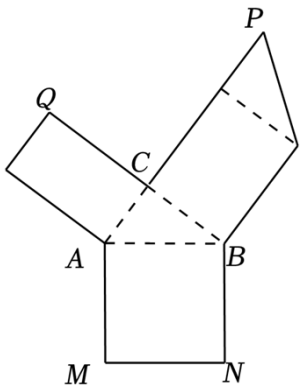
∵$OB=\sqrt{AB^2+AO^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

∴$BM\geqslant OB-OM=\sqrt{13}-2$，

∴BM 的最小值为$\sqrt{13}-2$．

故选：D．

4．（2022•南京）直三棱柱的表面展开图如图所示，$AC=3$，$BC=4$，$AB=5$，四边形 $AMNB$ 是正方形，将其折叠成直三棱柱后，下列各点中，与点 C 距离最大的是（　　）



A．点 M　　B．点 N　　C．点 P　　D．点 Q

【分析】根据直三棱柱的特征结合勾股定理求出各线段的距离，再比较大小即可求解．

【解答】解：如图，过 C 点作 $CE\perp AB$ 于 E，

∵$AC=3$，$BC=4$，$AB=5$，$3^2+4^2=5^2$，

∴△ACB 是直角三角形，

∴$CE=\frac{1}{2}AC\cdot BC\div\frac{1}{2}\div AB=3\times4\div5=2.4$，

∴$AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{3^2-2.4^2}=1.8$，

∴$BE=5-1.8=3.2$，

∵四边形 $AMNB$ 是正方形，立方体是直三棱柱，

∴$CQ=5$，

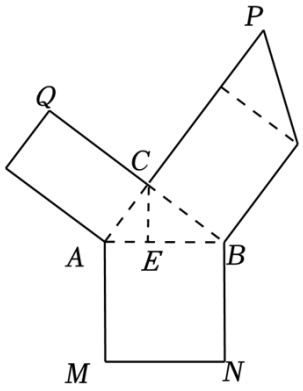
∴$CM=CP=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$，

$CN=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$，

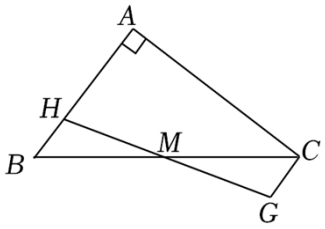
∵$\sqrt{41}>\sqrt{34}>5$，

∴与点 C 距离最大的是点 N.

故选：B.



5.（2022•湘西州）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90°$，M 为 BC 的中点，H 为 AB 上一点，过点 C 作 $CG\parallel AB$，交 HM 的延长线于点 G，若 $AC=8$，$AB=6$，则四边形 $ACGH$ 周长的最小值是（　　）



A．24　　B．22　　C．20　　D．18

【分析】通过证明△BMH≌△CMG 可得 $BH=CG$，可得四边形 $ACGH$ 的周长即为 $AB+AC+GH$，进而可确定当 $MH\perp AB$ 时，四边形 $ACGH$ 的周长有最小值，通过证明四边形 $ACGH$ 为矩形可得 HG 的长，进而可求解.

【解答】解：∵$CG\parallel AB$，

∴$\angle B=\angle MCG$，

∵M 是 BC 的中点，

∴$BM=CM$，

在△BMH 和△CMG 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle MCG\\ BM=CM\\ \angle BMH=\angle CMG\end{cases},$$

∴△BMH≌△CMG（ASA），

∴$HM=GM$，$BH=CG$，

∵$AB=6$，$AC=8$，

∴四边形 $ACGH$ 的周长$=AC+CG+AH+GH=AB+AC+GH=14+GH$，

∴当 GH 最小时，即 $MH\perp AB$ 时四边形 $ACGH$ 的周长有最小值，

∵$\angle A=90°$，$MH\perp AB$，

∴$GH/\!/AC$，

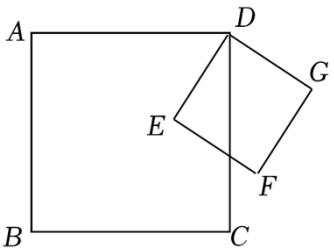
∴四边形 $ACGH$ 为矩形，

∴$GH=8$，

∴四边形 $ACGH$ 的周长最小值为 14+8＝22，

故选：B.

6．（2022•泰州）如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 为与点 D 不重合的动点，以 DE 为一边作正方形 $DEFG$．设 $DE=d_1$，点 F、G 与点 C 的距离分别为 d_2、d_3，则 $d_1+d_2+d_3$ 的最小值为（　　）



A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

【分析】连接 AE，那么，$AE=CG$，所以这三个 d 的和就是 $AE+EF+FC$，所以大于等于 AC，故当 $AEFC$ 四点共线有最小值，最后求解，即可求出答案．

【解答】解：如图，连接 AE，

∵四边形 $DEFG$ 是正方形，

∴$\angle EDG=90°$，$EF=DE=DG$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AD=CD$，$\angle ADC=90°$，

∴$\angle ADE=\angle CDG$，

∴$\triangle ADE\cong\triangle CDG$（$SAS$），

∴$AE=CG$，

∴$d_1+d_2+d_3=EF+CF+AE$，

∴点 A，E，F，C 在同一条线上时，$EF+CF+AE$ 最小，即 $d_1+d_2+d_3$ 最小，

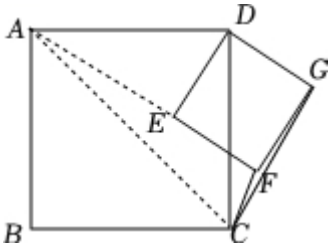
连接 AC，

∴$d_1+d_2+d_3$ 最小值为 AC，

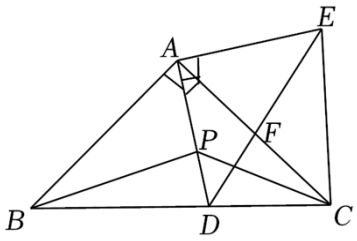
在 Rt△ABC 中，$AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，

∴$d_1+d_2+d_3$ 最小$=AC=2\sqrt{2}$，

故选：C.



7.（2022•宜宾）如图，△ABC 和△ADE 都是等腰直角三角形，∠BAC＝∠DAE＝90°，点 D 是 BC 边上的动点（不与点 B、C 重合），DE 与 AC 交于点 F，连结 CE．下列结论：①BD＝CE；②∠DAC＝∠CED；③若 BD＝2CD，则$\frac{CF}{AF}=\frac{4}{5}$；④在△ABC 内存在唯一一点 P，使得 PA+PB+PC 的值最小，若点 D 在 AP 的延长线上，且 AP 的长为 2，则 CE＝2+$\sqrt{3}$．其中含所有正确结论的选项是（　　）



A．①②④　　B．①②③　　C．①③④　　D．①②③④

【分析】①正确．证明△BAD≌△CAE（SAS），可得结论；

②正确．证明 A，D，C，E 四点共圆，利用圆周角定理证明；

③正确．设 CD＝m，则 BD＝CE＝2m．DE＝$\sqrt{5}$m，OA＝$\frac{\sqrt{5}}{2}$m，过点 C 作 CJ⊥DF 于点 J，求出 AO，CJ，可得结论；

④错误．将△BPC 绕点 B 顺时针旋转 60°得到△BNM，连接 PN，当点 A，点 P，点 N，点 M 共线时，PA+PB+PC 值最小，此时∠APB＝∠APC＝∠BPC＝120°，PB＝PC，AD⊥BC，设 PD＝t，则 BD＝AD＝$\sqrt{3}$t，构建方程求出 t，可得结论．

【解答】解：如图 1 中，

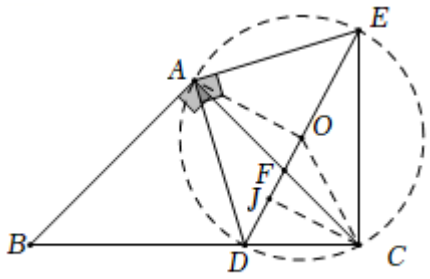


图1

∵∠BAC＝∠DAE＝90°，

∴∠BAD＝∠CAE，

∵$AB=AC$，$AD=AE$，

∴△BAD≌△CAE（SAS），

∴$BD=EC$，$\angle ADB=\angle AEC$，故①正确，

∵$\angle ADB+\angle ADC=180°$，

∴$\angle AEC+\angle ADC=180°$，

∴$\angle DAE+\angle DCE=180°$，

∴$\angle DAE=\angle DCE=90°$，

取 DE 的中点 O，连接 OA，OA，OC，则 $OA=OD=OE=OC$，

∴A，D，C，E 四点共圆，

∴$\angle DAC=\angle CED$，故②正确，

设 $CD=m$，则 $BD=CE=2m$．$DE=\sqrt{5}m$，$OA=\frac{\sqrt{5}}{2}m$，

过点 C 作 $CJ\perp DF$ 于点 J，

∵$\tan\angle CDF=\frac{CJ}{DJ}=\frac{CE}{CD}=2$，

∴$CJ=\frac{2\sqrt{5}}{5}m$，

∵$AO\perp DE$，$CJ\perp DE$，

∴$AO\parallel CJ$，

∴$\frac{CF}{AF}=\frac{CJ}{AO}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}m}{\frac{\sqrt{5}}{2}m}=\frac{4}{5}$，故③正确．

如图 2 中，将△BPC 绕点 B 顺时针旋转 60° 得到△BNM，连接 PN，

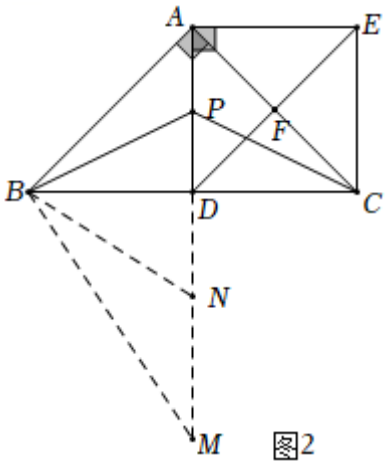


图2

∴$BP=BN$，$PC=NM$，$\angle PBN=60°$，

∴△BPN 是等边三角形，

∴$BP=PN$，

∴$PA+PB+PC=AP+PN+MN$，

∴当点 A，点 P，点 N，点 M 共线时，$PA+PB+PC$ 值最小，此时 $\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120°$，$PB=PC$，$AD\perp BC$，

∴$\angle BPD=\angle CPD=60°$，

设 $PD=t$，则 $BD=AD=\sqrt{3}t$，

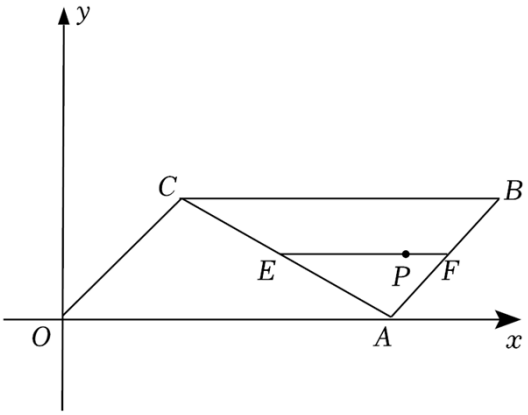
∴$2+t=\sqrt{3}t$，

∴$t=\sqrt{3}+1$，

∴$CE=BD=\sqrt{3}t=3+\sqrt{3}$，故④错误．

故选：B．

8．（2022•日照）如图，在平面直角坐标系中，平行四边形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点，点 E 是对角线 AC 上一动点（不包含端点），过点 E 作 $EF\parallel BC$，交 AB 于 F，点 P 在线段 EF 上．若 $OA=4$，$OC=2$，$\angle AOC=45°$，$EP=3PF$，P 点的横坐标为 m，则 m 的取值范围是（　　）



A．$4<m<3+\sqrt{2}$　　B．$3-\sqrt{2}<m<4$　　C．$2-\sqrt{2}<m<3$　　D．$4<m<4+\sqrt{2}$

【分析】先求得点 A，C，B 三个点坐标，然后求得 AB 和 AC 的解析式，再表示出 EF 的长，进而表示出点 P 的横坐标，根据不等式的性质求得结果．

【解答】解：可得 C（$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$），A（4，0），B（$4+\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$），

∴直线 AB 的解析式为：$y=x-4$，

∴$x=y+4$，

直线 AC 的解析式为：$y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-4}x-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-4}$，

∴$x=4+y-2\sqrt{2}y$，

∴点 F 的横坐标为：$y+4$，点 E 的横坐标为：$4+y-2\sqrt{2}y$，

∴$EF=(y+4)-(4+y-2\sqrt{2}y)=2\sqrt{2}y$，

∵$EP=3PF$，

∴$PF=\frac{1}{4}EF=\frac{\sqrt{2}}{2}y$，

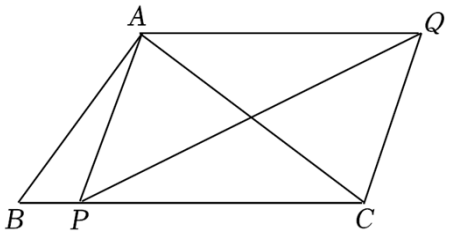
∴点 P 的横坐标为：$y+4-\frac{\sqrt{2}}{2}y$，

∵$0<y<\sqrt{2}$，

∴$4<y+4-\frac{\sqrt{2}}{2}y<3+\sqrt{2}$，

故答案为：A．

9．（2022•毕节市）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=3$，$BC=5$，点 P 为 BC 边上任意一点，连接 PA，以 PA，PC 为邻边作平行四边形 $PAQC$，连接 PQ，则 PQ 长度的最小值为 __$\frac{12}{5}$__．



【分析】方法一：以 PA，PC 为邻边作平行四边形 $PAQC$，由平行四边形的性质可知 O 是 AC 中点，PQ 最短也就是 PO 最短，所以应该过 O 作 BC 的垂线 $P'O$，证明△CAB∽△$CP'O$，利用相似三角形的性质得出$\frac{CO}{BC}=\frac{OP'}{AB}$，求出 OP'，即可求出 PQ 的最小值．

方法二：过点 A 作 $AE\perp BC$ 垂足为 E 当 $PQ\perp BC$ 时，符合题意，则四边形 $AEPQ$ 是矩形，可求出 $PQ=AE=2.4$．

【解答】解：方法一：∵$\angle BAC=90°$，$AB=3$，$BC=5$，

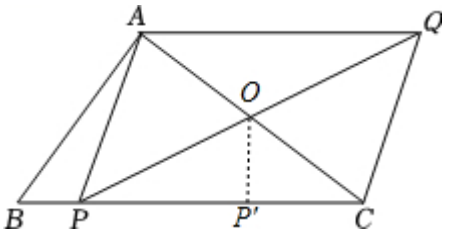
∴$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

∵四边形 $APCQ$ 是平行四边形，

∴$PO=QO$，$CO=AO=2$，

∵PQ 最短也就是 PO 最短，

∴过 O 作 BC 的垂线 OP'，



∵∠ACB=∠$P'CO$，∠$CP'O$=∠CAB=90°，

∴△CAB∽△$CP'O$，

∴$\frac{CO}{BC}=\frac{OP'}{AB}$，

∴$\frac{2}{5}=\frac{OP'}{3}$，

∴$OP'=\frac{6}{5}$，

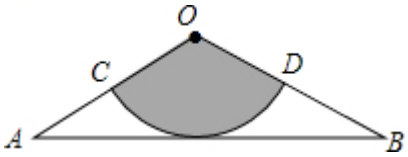
∴则 PQ 的最小值为 $2OP'=\frac{12}{5}$，

方法二：过点 A 作 $AE\perp BC$ 垂足为 E 当 $PQ\perp BC$ 时，符合题意，则四边形 $AEPQ$ 是矩形，

∴$PQ=AE=2.4$.

故答案为：$\frac{12}{5}$.

10.（2022•青海）如图，从一个腰长为 60cm，顶角为 120° 的等腰三角形铁皮 OAB 中剪出一个最大的扇形 OCD，则此扇形的弧长为 __20π__ cm.



【分析】根据等腰三角形的性质得到 OE 的长，再利用弧长公式计算出弧 CD 的长.

【解答】解：过 O 作 $OE\perp AB$ 于 E，当扇形的半径为 OE 时扇形 OCD 最大，

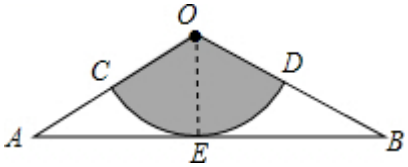
∵$OA=OB=60cm$，∠AOB=120°，

∴∠A=∠B=30°，

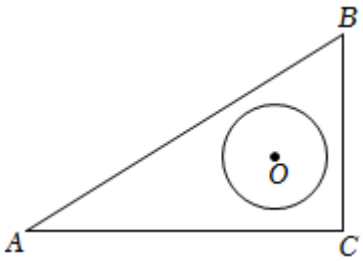
∴$OE=\frac{1}{2}OA=30cm$，

∴弧 CD 的长=$\frac{120\cdot\pi\cdot30}{180}=20\pi cm$，

故答案为：20π.



11.（2022•泸州）如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，$AC=6$，$BC=2\sqrt{3}$，半径为 1 的⊙O 在 Rt△ABC 内平移（⊙O 可以与该三角形的边相切），则点 A 到⊙O 上的点的距离的最大值为 __$2\sqrt{7}+1$__.



【分析】连接 OE、OF，根据正切的定义求出$\angle ABC$，根据切线长定理得到$\angle OBF=30°$，根据含 30°角的直角三角形的性质、勾股定理计算，得到答案.

【解答】解：当⊙O 与 BC、BA 都相切时，连接 AO 并延长交⊙O 于点 D，则 AD 为点 A 到⊙O 上的点的距离的最大值，

设⊙O 与 BC、BA 的切点分别为 E、F，连接 OE、OF，

则 $OE\perp BC$，$OF\perp AB$，

$\because AC=6$，$BC=2\sqrt{3}$，

$\therefore \tan\angle ABC=\frac{AC}{BC}=\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=4\sqrt{3}$，

$\therefore \angle ABC=60°$，

$\therefore \angle OBF=30°$，

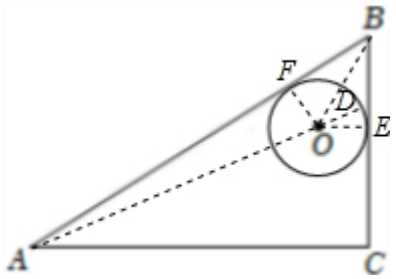
$\therefore BF=\frac{OF}{\tan\angle OBF}=\sqrt{3}$，

$\therefore AF=AB-BF=3\sqrt{3}$，

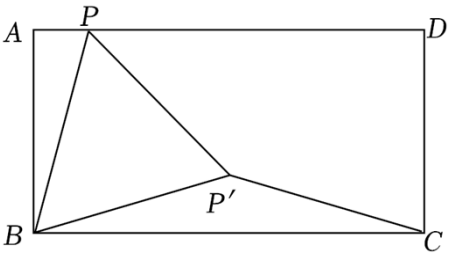
$\therefore OA=\sqrt{OF^2+AF^2}=2\sqrt{7}$，

$\therefore AD=2\sqrt{7}+1$，

故答案为：$2\sqrt{7}+1$.

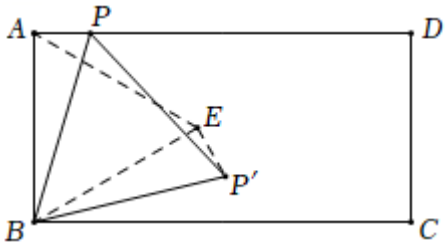


12.（2022•广州）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=2AB$，点 P 为边 AD 上的一个动点，线段 BP 绕点 B 顺时针旋转 60°得到线段 BP'，连接 PP'，CP'．当点 P' 落在边 BC 上时，$\angle PP'C$ 的度数为 <u>120°</u>；当线段 CP' 的长度最小时，$\angle PP'C$ 的度数为 <u>75°</u>.



【分析】如图，以 AB 为边向右作等边△ABE，连接 EP'．利用全等三角形的性质证明∠BEP' ＝90°，推出点 P' 在射线 EP' 上运动，如图 1 中，设 EP' 交 BC 于点 O，再证明△BEO 是等腰直角三角形，可得结论．

【解答】解：如图，以 AB 为边向右作等边△ABE，连接 EP'．



∵△BPP' 是等边三角形，

∴∠ABE＝∠PBP' ＝60°，BP＝BP'，BA＝BE，

∴∠ABP＝∠EBP'，

在△ABP 和△EBP' 中，

$$\begin{cases} BA=BE \\ \angle ABP=\angle EBP' \\ BP=BP' \end{cases},$$

∴△ABP≌△EBP'（SAS），

∴∠BAP＝∠BEP' ＝90°，

∴点 P' 在射线 EP' 上运动，

如图 1 中，设 EP' 交 BC 于点 O，

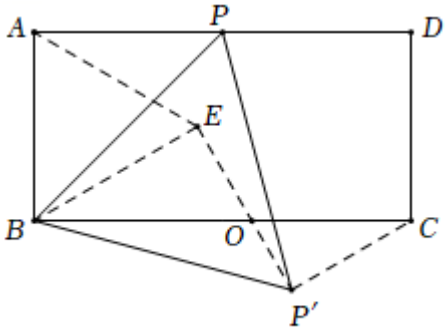


图1

当点 P' 落在 BC 上时，点 P' 与 O 重合，此时∠$PP'C$＝180° - 60° ＝120°，

当 CP' ⊥EP' 时，CP' 的长最小，此时∠EBO＝∠OCP' ＝30°，

∴$EO=\frac{1}{2}OB$，$OP'=\frac{1}{2}OC$，

∴$EP'=EO+OP'=\frac{1}{2}OB+\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}BC$，

∵$BC=2AB$，

∴$EP'=AB=EB$，

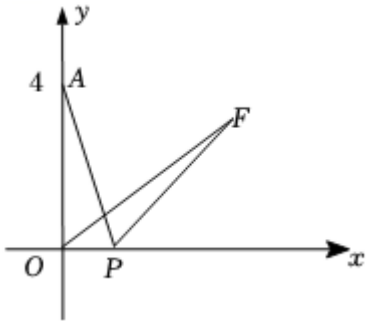
∴$\angle EBP'=\angle EP'B=45°$，

∴$\angle BP'C=45°+90°=135°$，

∴$\angle PP'C=\angle BP'C-\angle BP'P=135°-60°=75°$．

故答案为：120°，75°．

13．（2022•日照）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为（0，4），P 是 x 轴上一动点，把线段 PA 绕点 P 顺时针旋转 60° 得到线段 PF，连接 OF，则线段 OF 长的最小值是 __2__．



【分析】方法一：点 F 运动所形成的图象是一条射线 F_2F_1，当 $OF\perp F_1F_2$ 时，垂线段 OF 最短，当点 F_1 在 x 轴上时，由勾股定理得：$P_1O=F_1O=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，进而得 $P_1A=P_1F_1=AF_1=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，求得点 F_1 的坐标为（$\frac{4\sqrt{3}}{3}$，0），当点 F_2 在 y 轴上时，求得点 F_2 的坐标为（0，-4），最后根据待定系数法，求得直线 F_1F_2 的解析式为 $y=\sqrt{3}x-4$，再由线段中垂线性质得出 $F_1F_2=AF_1=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，在 Rt△$OF_1F_2$ 中，设点 O 到 F_1F_2 的距离为 h，则根据面积法得$\frac{1}{2}\times OF_1\times OF_2=\frac{1}{2}\times F_1F_2\times h$，即 $\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times4=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}\times h$，解得 $h=2$，根据垂线段最短，即可得到线段 OF 的最小值为 2．

方法二：如图，在第二象限作等边三角形 AOB，连接 BP、AF，过点 B 作 $BP'\perp x$ 轴于点 P'，可证得△BAP≌△OAF（SAS），得出 $BP=OF$，当 $BP\perp x$ 轴时，BP 最小值为 2，故 OF 的最小值为 2．

【解答】解：方法一：∵将线段 PA 绕点 P 顺时针旋转 60° 得到线段 PF，

∴$\angle APF=60°$，$PF=PA$，

∴△APF 是等边三角形，

∴$AP=AF$，

如图，当点 F_1 在 x 轴上时，$\triangle P_1AF_1$ 为等边三角形，

则 $P_1A=P_1F_1=AF_1$，$\angle AP_1F_1=60°$，

$\because AO\perp P_1F_1$，

$\therefore P_1O=F_1O$，$\angle AOP_1=90°$，

$\therefore \angle P_1AO=30°$，且 $AO=4$，

由勾股定理得：$P_1O=F_1O=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore P_1A=P_1F_1=AF_1=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ 点 F_1 的坐标为（$\frac{4\sqrt{3}}{3}$，0），

如图，当点 F_2 在 y 轴上时，

$\because \triangle P_2AF_2$ 为等边三角形，$AO\perp P_2O$，

$\therefore AO=F_2O=4$，

$\therefore$ 点 F_2 的坐标为（0，﹣4），

$\because \tan\angle OF_1F_2=\frac{OF_2}{OF_1}=\frac{4}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle OF_1F_2=60°$，

$\therefore$ 点 F 运动所形成的图象是一条射线 F_2F_1，

$\therefore$ 当 $OF\perp F_1F_2$ 时，线段 OF 最短，

设直线 F_1F_2 的解析式为 $y=kx+b$，

则 $\begin{cases}\frac{4\sqrt{3}}{3}k+b=0\\ b=-4\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}k=\sqrt{3}\\ b=-4\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 F_1F_2 的解析式为 $y=\sqrt{3}x-4$，

$\because AO=F_2O=4$，$AO\perp P_1F_1$，

$\therefore F_1F_2=AF_1=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，

在 Rt$\triangle OF_1F_2$ 中，

设点 O 到 F_1F_2 的距离为 h，则

$\frac{1}{2}\times OF_1\times OF_2=\frac{1}{2}\times F_1F_2\times h$，

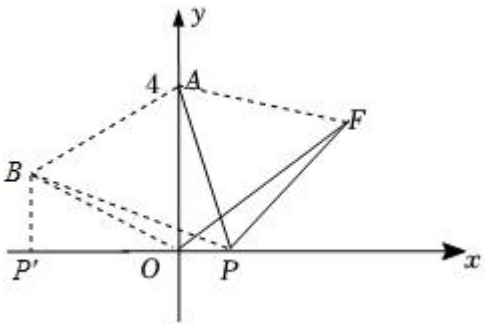
$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 4=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}\times h$，

解得 $h=2$，

即线段 OF 的最小值为 2；

方法二：如图，在第二象限作等边三角形 AOB，连接 BP、AF，

过点 B 作 $BP'\perp x$ 轴于点 P'，



∵将线段 PA 绕点 P 顺时针旋转 60°得到线段 PF，

$\therefore \angle APF=60°$，$PF=PA$，

$\therefore \triangle APF$ 是等边三角形，

$\therefore AP=AF$，$\angle PAF=60°$，

∵$\triangle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore AB=AO=OB=4$，$\angle BAO=60°$，

$\therefore \angle BAP=60°+\angle OAP=\angle OAF$，

在$\triangle BAP$ 和$\triangle OAF$ 中，

$$\begin{cases} AB=AO \\ \angle BAP=\angle OAF, \\ AP=AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAP\cong\triangle OAF$（$SAS$），

$\therefore BP=OF$，

∵P 是 x 轴上一动点，

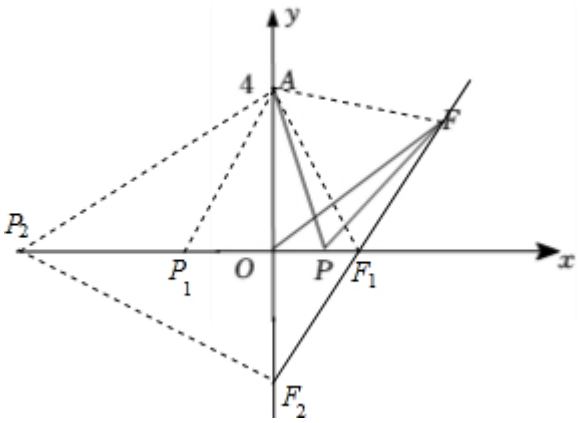
$\therefore$当 $BP\perp x$ 轴时，BP 最小，即点 P 与点 P' 重合时 $BP=BP'$ 最小，

∵$\angle BOP'=30°$，$\angle BP'O=90°$，

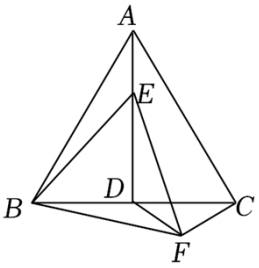
$\therefore BP'=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}\times 4=2$，

$\therefore OF$ 的最小值为 2，

故答案为 2.

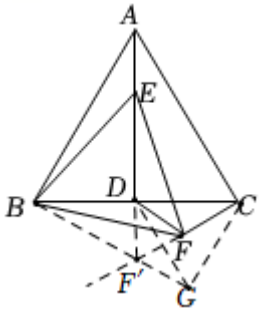


14.（2022•黄石）如图，等边△*ABC* 中，*AB*＝10，点 *E* 为高 *AD* 上的一动点，以 *BE* 为边作等边△*BEF*，连接 *DF*，*CF*，则∠*BCF*＝__30°__，*FB*+*FD* 的最小值为 __$5\sqrt{3}$__.



【分析】首先证明△*BAE*≌△*BCF*（*SAS*），推出∠*BAE*＝∠*BCF*＝30°，作点 *D* 关于 *CF* 的对称点 *G*，连接 *CG*，*DG*，*BG*，*BG* 交 *CF* 于点 *F*′，连接 *DF*′，此时 *BF*′+*DF*′ 的值最小，最小值＝线段 *BG* 的长.

【解答】解：如图，



∵△*ABC* 是等边三角形，*AD*⊥*CB*，

∴∠*BAE*＝$\frac{1}{2}$∠*BAC*＝30°，

∵△*BEF* 是等边三角形，

∴∠*EBF*＝∠*ABC*＝60°，*BE*＝*BF*，

∴∠*ABE*＝∠*CBF*，

在△*BAE* 和△*BCF* 中，

$$\begin{cases} BA=BC \\ \angle ABE=\angle CBF, \\ BE=BF \end{cases}$$

∴△*BAE*≌△*BCF*（*SAS*），

∴∠*BAE*＝∠*BCF*＝30°，

作点 *D* 关于 *CF* 的对称点 *G*，连接 *CG*，*DG*，*BG*，*BG* 交 *CF* 的延长线于点 *F*′，连接 *DF*′，此时 *BF*′+*DF*′ 的值最小，最小值＝线段 *BG* 的长．

∵∠*DCF*＝∠*FCG*＝30°，

∴∠*DCG*＝60°，

∵*CD*＝*CG*＝5，

∴△*CDG* 是等边三角形，

∴*DB*＝*DC*＝*DG*，

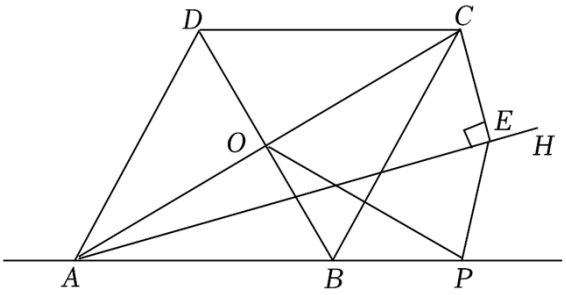
∴∠*CGB*＝90°，

∴$BG=\sqrt{BC^2-CG^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$，

∴*BF*+*DF* 的最小值为 $5\sqrt{3}$，

故答案为：30°，$5\sqrt{3}$．

15．（2022•黑龙江）如图，菱形 *ABCD* 中，对角线 *AC*，*BD* 相交于点 *O*，∠*BAD*＝60°，*AD*＝3，*AH* 是∠*BAC* 的平分线，*CE*⊥*AH* 于点 *E*，点 *P* 是直线 *AB* 上的一个动点，则 *OP*+*PE* 的最小值是 __$\frac{3}{2}\sqrt{6}$__．



【分析】连接 *OE*，过点 *O* 作 *OF*⊥*AB*，垂足为 *F*，并延长到点 *O*′，使 *O*′*F*＝*OF*，连接 *O*′*E* 交直线 *AB* 于点 *P*，连接 *OP*，从而可得 *OP*＝*O*′*P*，此时 *OP*+*PE* 的值最小，先利用菱形的性质可得 *AD*＝*AB*＝3，∠*BAC*＝$\frac{1}{2}$∠*BAD*，*OA*＝*OC*＝$\frac{1}{2}$*AC*，*OD*＝*OB*＝$\frac{1}{2}$*BD*，∠*AOD*＝90°，从而可得△*ADB* 是等边三角形，进而求出 *AD*＝3，然后在 Rt△*ADO* 中，利用勾股定理求出 *AO* 的长，从而求出 *AC* 的长，进而利用直角三角形斜边上的中线可得 *OE*＝*OA*＝$\frac{1}{2}$*AC*＝$\frac{3}{2}\sqrt{3}$，再利用角平分线和等腰三角形的性质可得 *OE*∥*AB*，从而求出∠*EOF*＝90°，进而在 Rt△*AOF* 中，利用锐角三角函数的定义求出 *OF* 的长，即可求出 *OO*′ 的长，最后在 Rt△*EOO*′ 中，利用勾股定理进行计算即可解答．

【解答】解：连接 OE，过点 O 作 $OF\perp AB$，垂足为 F，并延长到点 O'，使 $O'F=OF$，连接 $O'E$ 交直线 AB 于点 P，连接 OP，

$\therefore AP$ 是 OO' 的垂直平分线，

$\therefore OP=O'P$，

$\therefore OP+PE=O'P+PE=O'E$，

此时，$OP+PE$ 的值最小，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AD=AB=3$，$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BAD$，$OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OD=OB=\frac{1}{2}BD$，$\angle AOD=90°$，

$\because \angle BAD=60°$，

$\therefore \triangle ADB$ 是等边三角形，

$\therefore BD=AD=3$，

$\therefore OD=\frac{1}{2}BD=\frac{3}{2}$，

$\therefore AO=\sqrt{AD^2-DO^2}=\sqrt{3^2-(\frac{3}{2})^2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

$\therefore AC=2OA=3\sqrt{3}$，

$\because CE\perp AH$，

$\therefore \angle AEC=90°$，

$\therefore OE=OA=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

$\therefore \angle OAE=\angle OEA$，

$\because AE$ 平分 $\angle CAB$，

$\therefore \angle OAE=\angle EAB$，

$\therefore \angle OEA=\angle EAB$，

$\therefore OE/\!/AB$，

$\therefore \angle EOF=\angle AFO=90°$，

在 Rt$\triangle AOF$ 中，$\angle OAB=\frac{1}{2}\angle DAB=30°$，

$\therefore OF=\frac{1}{2}OA=\frac{3}{4}\sqrt{3}$，

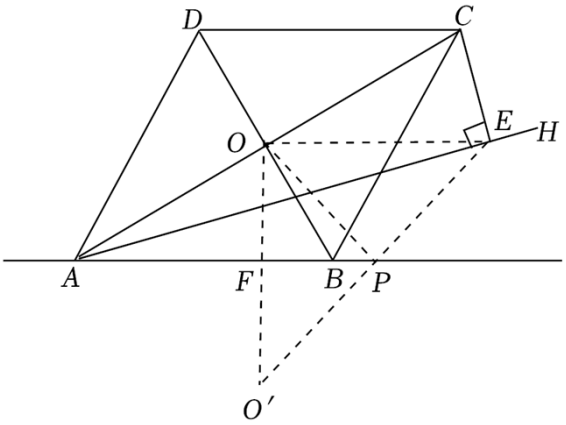
$\therefore OO'=2OF=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

在 Rt△EOO' 中，$O'E=\sqrt{EO^2+OO'^2}=\sqrt{(\frac{3}{2}\sqrt{3})^2+(\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}=\frac{3}{2}\sqrt{6}$，

∴$OP+PE=\frac{3}{2}\sqrt{6}$，

∴$OP+PE$ 的最小值为$\frac{3}{2}\sqrt{6}$，

故答案为：$\frac{3}{2}\sqrt{6}$.



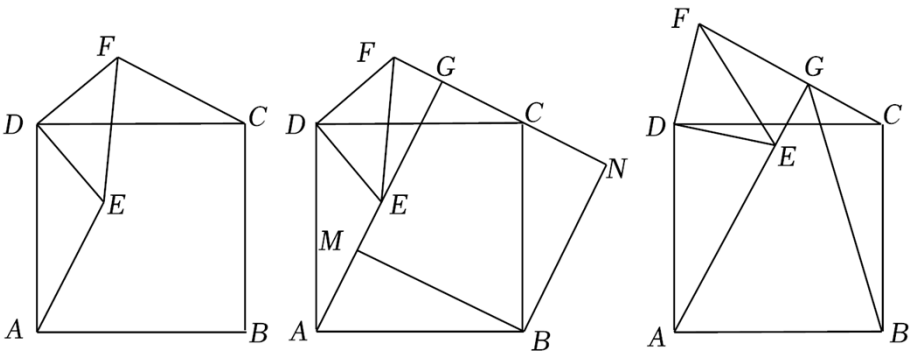
16.（2022•阜新）已知，四边形 $ABCD$ 是正方形，△DEF 绕点 D 旋转（$DE<AB$），$\angle EDF=90°$，$DE=DF$，连接 AE，CF.

（1）如图 1，求证：△ADE≌△CDF；

（2）直线 AE 与 CF 相交于点 G.

①如图 2，$BM\perp AG$ 于点 M，$BN\perp CF$ 于点 N，求证：四边形 $BMGN$ 是正方形；

②如图 3，连接 BG，若 $AB=4$，$DE=2$，直接写出在△DEF 旋转的过程中，线段 BG 长度的最小值.



（图1）　　（图2）　　（图3）

【分析】（1）根据 SAS 证明三角形全等即可；

（2）①根据邻边相等的矩形是正方形证明即可；

②作 $DH\perp AG$ 交 AG 于点 H，作 $BM\perp AG$ 于点 M，证明△BMG 是等腰直角三角形，求出 BM 的最小值，

可得结论.

【解答】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AD=DC$，$\angle ADC=90°$.

∵$DE=DF$，$\angle EDF=90°$.

∴$\angle ADC=\angle EDF$，

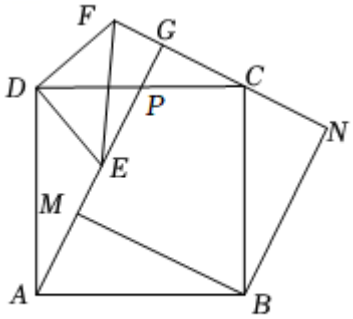
∴$\angle ADE=\angle CDF$，

在△ADE 和△CDF 中，

$$\begin{cases} DA=DC \\ \angle ADE=\angle CDF \\ DE=DF \end{cases}$$

∴△ADE≌△CDF（SAS）；

（2）①证明：如图 2 中，设 AG 与 CD 相交于点 P.



（图2）

∵$\angle ADP=90°$，

∴$\angle DAP+\angle DPA=90°$.

∵△ADE≌△CDF，

∴$\angle DAE=\angle DCF$.

∵$\angle DPA=\angle GPC$，

∴$\angle DAE+\angle DPA=\angle GPC+\angle GCP=90°$.

∴$\angle PGN=90°$，

∵$BM\perp AG$，$BN\perp GN$，

∴四边形 $BMGN$ 是矩形，

∴$\angle MBN=90°$.

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC$，$\angle ABC=\angle MBN=90°$.

∴∠*ABM*＝∠*CBN*.

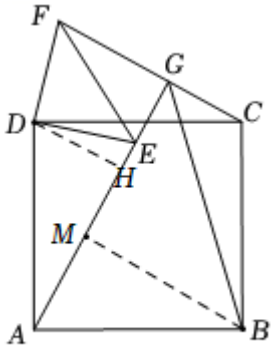
又∵∠*AMB*＝∠*BNC*＝90°，

∴△*AMB*≌△*CNB*.

∴*MB*＝*NB*.

∴矩形 *BMGN* 是正方形；

②解：作 *DH*⊥*AG* 交 *AG* 于点 *H*，作 *BM*⊥*AG* 于点 *M*，



（图3）

此时△*AMB*≌△*AHD*.

∴*BM*＝*AH*.

∵$AH^2=AD^2-DH^2$，*AD*＝4，

∴*DH* 最大时，*AH* 最小，$DH_{最大值}=DE=2$.

∴$BM_{最小值}=AH_{最小值}=2\sqrt{3}$.

由（2）①可知，△*BGM* 是等腰直角三角形，

∴$BG_{最小值}=\sqrt{2}BM=2\sqrt{6}$.

17.（2022•镇江）已知，点 *E*、*F*、*G*、*H* 分别在正方形 *ABCD* 的边 *AB*、*BC*、*CD*、*AD* 上.

（1）如图 1，当四边形 *EFGH* 是正方形时，求证：*AE*+*AH*＝*AB*；

（2）如图 2，已知 *AE*＝*AH*，*CF*＝*CG*，当 *AE*、*CF* 的大小有 ＿*AE*＝*CF*＿ 关系时，四边形 *EFGH* 是矩形；

（3）如图 3，*AE*＝*DG*，*EG*、*FH* 相交于点 *O*，*OE*：*OF*＝4：5，已知正方形 *ABCD* 的边长为 16，*FH* 长为 20，当△*OEH* 的面积取最大值时，判断四边形 *EFGH* 是怎样的四边形？证明你的结论.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/136122203201010202