江苏省淮阴中学、姜堰中学等三校 2024 届高三上学期 12 月数学试题

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.）

1. 设集合 $M=\{x|\log_2 x>1\}$，$N=\left\{x\left|\frac{x+3}{x-3}<0\right.\right\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $[2,3)$　　B. $(2,3)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

2. 设 $m\in\mathbf{R}$，则“$m=2$”是“直线 $l_1:mx+2y-1=0$ 与直线 $l_2:3x+(m+1)y+1=0$”平行的（　　）条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分又不必要

3. $\sin 40^\circ\left(\tan 10^\circ-\sqrt{3}\right)=$（　　）

A. 2　　B. －2　　C. 1　　D. －1

4. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_{n+1}=2S_n+2$，则 a_5 的值为（　　）

A. 18　　B. 54　　C. 162　　D. 486

5. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为 BC 边中点，点 E 在线段 AC 上，且 $2AE=EC$，若 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BE}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 为（　　）

A. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$　　C. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$　　D. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

6. 设 F_1，F_2 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 作 x 轴的垂线与椭圆 C 交于 A，B 两点，若 $\triangle ABF_1$ 为钝角三角形，则离心率 e 的取值范围为（　　）

A. $0<e<\sqrt{2}-1$　　B. $\sqrt{2}-1<e<1$　　C. $\frac{1}{2}<e<1$　　D. $0<e<\frac{1}{2}$

7. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作，其中第一题是测量海岛的高.如图 1，点 E，H，G 在水平线 AC 上，DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG 称为“表距”，GC 和 EH 都称为“表目距”，GC 与 EH 的差称为“表目距的差”，则海岛的高 $AB=\frac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表高}$，某同学受此法的启发设计了另一种测量此山高度的方案（如图 2）；他站在水平线 AC 上，同时在水平线 AC 上放一个小镜子（视为点 P），他在距离镜子 a 米点 Q 时，通过镜子看到了山顶，然后沿水平线 AC 向靠近山的方向走了 m 米，到达 M 点，再将镜子放在距离自己 b 米的前方点 N 处，此时又看到了山顶，若此人的眼睛到水平线 AC 的距离为 h 米，则此山的高度约为（　　）米

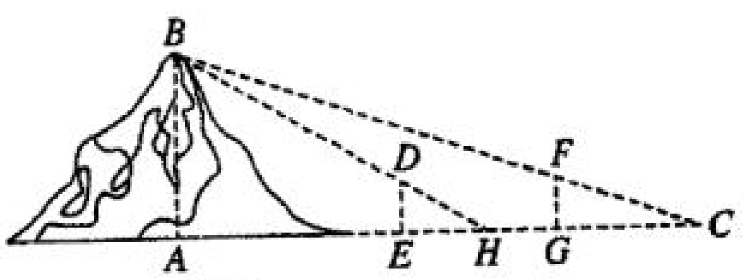


图 1

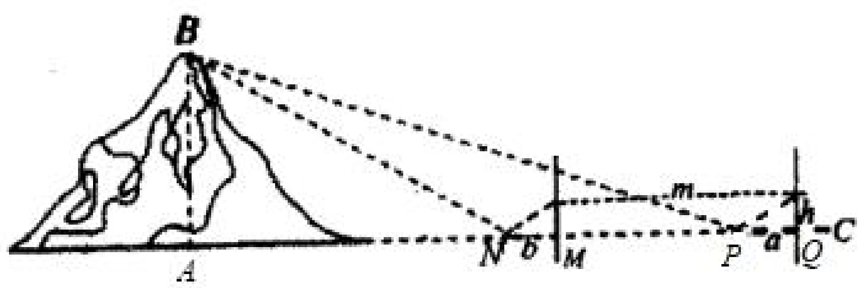


图 2

A. $\frac{mh}{a-b}+h$　　B. $\frac{mh}{a-b}-h$　　C. $\frac{h}{a-b}-mh$　　D. $\frac{h}{a-b}+mh$

8. 设$a=\tan 0.21$，$b=\ln 1.21$，$c=\dfrac{21}{121}$，则下列大小关系正确的是（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

二、多项选择题（本大题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分**.**）

9. 已知$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，下列说法正确的是（　　）

A. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leq 4$　　B. $a^2+b^2\geq\dfrac{1}{2}$　　C. $2^a<2^{b-1}$　　D. $\sqrt{a}+2\sqrt{b}\leq\sqrt{5}$

10. 已知复数z_1，z_2，则下列命题成立的有（　　）

A. 若$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则$z_1z_2=0$　　B. $|z_1^n|=|z_1|^n,n\in Z$

C. 若$z_1^2+z_2^2=0$，则$|z_1|=|z_2|$　　D. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

11. 已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在$[0,2\pi]$有且仅有 4 个零点，则下列各选项正确的是（　　）

A. $f(x)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$单调递增　　B. ω的取值范围是$\left[\dfrac{23}{12},\dfrac{29}{12}\right)$

C. $f(x)$在区间$(0,2\pi)$有 2 个极小值点　　D. $f(x)$在区间$(0,2\pi)$有 3 个极大值点

12. 已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，$g'(x)$为$g(x)$的导函数，且$f(x)+g'(x)=1$，$f(x)-g'(4-x)=3$，若$g(x)$为奇函数，则（　　）

A. $f(2)=2$　　B. $g'(0)+g'(4)=-2$　　C. $f(-1)=f(-3)$　　D. $g'(-4)=g'(4)$

三、填空题（本大题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分）

13. 已知$\vec{a}=(1,x)$，$\vec{b}=(-1,x)$，若$\vec{a}-2\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，则实数$x=$__________.

14. 已知直线l满足：原点到它的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，点$(3,0)$到它的距离为$2\sqrt{2}$，请写出满足条件的直线l的一个方程：__________.

15. 当实数$a\neq 0$时，函数$f(x)=(x-1)e^x-a|x|$有且只有一个可导极值点，则实数a的取值范围为________.

16. 已知$[x]$为不超过x的最大整数，例如$[0.2]=0$，$[1.2]=1$，$[-0.5]=-1$，设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=\dfrac{n}{2}(1+a_n)$且$S_5=15$，记$b_n=[\log_2 a_n]$，则数列$\{b_n\}$的前 100 项和为________.

四、解答题（本大题共 **6** 小题，共 **70** 分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. 已知$\vec{a}=(\sin(x+\frac{\pi}{4}),1)$，$\vec{b}=(\sqrt{2},\sin 2x)$.

（1）当$x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，$|\vec{a}|=\frac{\sqrt{41}}{5}$时，求$\sin(x+\frac{7\pi}{12})$；

（2）若$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$，求$f(x)$的值域.

18. 已知圆T经过$A(4,0)$，$B(2,4)$，$C(5,3)$.

（1）求圆T的方程；

（2）过点$P\left(1,\frac{7}{3}\right)$的直线$l$交圆$T$于$M$、$N$两点，且$2\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$，求直线$l$的方程.

19. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别是a，b，c，已知$c=2$，且$a=2\cos B+\frac{1}{2}b$.

（1）求$\triangle ABC$周长的最大值；

（2）若$\sin C+\sin\left(B-A\right)=2\sin 2A$，且$a<b$，求角A.

20. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，当$n\geq 2\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$时，$na_n=\left(n+1\right)a_{n-1}+1$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{a_n\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

21. 已知函数 $f(x)=axe^{x}(a\neq 0)$，$g(x)=-x^{2}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有公切线，求实数 a 的取值范围.

22. 已知椭圆 $C:\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$ 的一条准线方程为 $x=4$，长轴长为 4，过点 $P(-2,1)$ 作直线 l 交椭圆 C 于点 M、N.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）在 x 轴上是否存在一定点 Q，使得直线 QM，QN 的斜率 k_1，k_2 满足 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ 为常数？若存在，求出 Q 点坐标；若不存在，说明理由.

2023~2024 学年度第一学期阶段性测试

高三数学试题

一、单项选择题（本大题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设集合 $M=\{x|\log_2 x>1\}$，$N=\left\{x|\frac{x+3}{x-3}<0\right\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $[2,3)$　　B. $(2,3)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

【答案】B【解析】【分析】解不等式化简集合 *A*，*B*，再利用交集的定义求解即得.

【详解】依题意，$M=\{x|\log_2 x>\log_2 2\}=\{x|x>2\}$，$N=\{x|(x+3)(x-3)<0\}=\{x|-3<x<3\}$，

解得 $M\bigcap N=(2,3)$.故选：B

2. 设 $m\in\mathbf{R}$，则“$m=2$”是“直线 $l_1:mx+2y-1=0$ 与直线 $l_2:3x+(m+1)y+1=0$”平行的（　　）条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分又不必要

【答案】C【解析】【分析】根据充分条件和必要条件的定义，结合两直线平行的条件分析判断.

【详解】当 $m=2$ 时，直线 $l_1:2x+2y-1=0$，直线 $l_2:3x+3y+1=0$，此时 $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\neq\frac{-1}{1}$，

所以直线 $l_1\parallel l_2$，当 $l_1\parallel l_2$ 时，$\frac{m}{3}=\frac{2}{m+1}\neq\frac{-1}{1}(m+1\neq0)$，

得 $\begin{cases}m(m+1)=6\\m+1\neq-2\\m+1\neq0\end{cases}$，解得 $m=2$，

所以“$m=2$”是“直线 $l_1:mx+2y-1=0$ 与直线 $l_2:3x+(m+1)y+1=0$”平行的充要条件，故选：C

3. $\sin40^\circ\left(\tan10^\circ-\sqrt{3}\right)=$（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

【答案】D【解析】【分析】利用切化弦，三角恒等变换，逆用两角差的正弦公式，二倍角公式，诱导公式化简求值.

【详解】
$$\begin{aligned}&\sin40^\circ\cdot\left(\tan10^\circ-\sqrt{3}\right)\\&=\sin40^\circ\cdot\left(\frac{\sin10^\circ}{\cos10^\circ}-\sqrt{3}\right)\\&=\sin40^\circ\cdot\frac{\sin10^\circ-\sqrt{3}\cos10^\circ}{\cos10^\circ}\\&=\sin40^\circ\cdot\frac{2(\frac{1}{2}\sin10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos10^\circ)}{\cos10^\circ}\\&=\sin40^\circ\cdot\frac{2(\cos60^\circ\cdot\sin10^\circ-\sin60^\circ\cdot\cos10^\circ)}{\cos10^\circ}\\&=\sin40^\circ\cdot\frac{2\sin(10^\circ-60^\circ)}{\cos10^\circ}\\&=\sin40^\circ\cdot\frac{-2\sin50^\circ}{\cos10^\circ}\\&=\frac{-2\sin40^\circ\cdot\cos40^\circ}{\cos10^\circ}\\&=\frac{-\sin80^\circ}{\cos10^\circ}\\&=-1\end{aligned}$$
故选: D

4. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_{n+1}=2S_n+2$，则 a_5 的值为（　　）

A. 18　　B. 54　　C. 162　　D. 486

【答案】C【解析】【分析】由题意对所给的递推关系式进行赋值，得到关于 a_1, q 的方程组，从而利用等比数列的通项公式即可得解.

【详解】因为 $a_{n+1}=2S_n+2$，$\{a_n\}$ 为等比数列，设其公比为 q，

当 $n=1$ 时，$a_2=2a_1+2$，即 $a_1q=2a_1+2$，

当 $n=2$ 时，$a_3=2(a_1+a_2)+2$，即 $a_1q^2=2(a_1+a_1q)+2$，

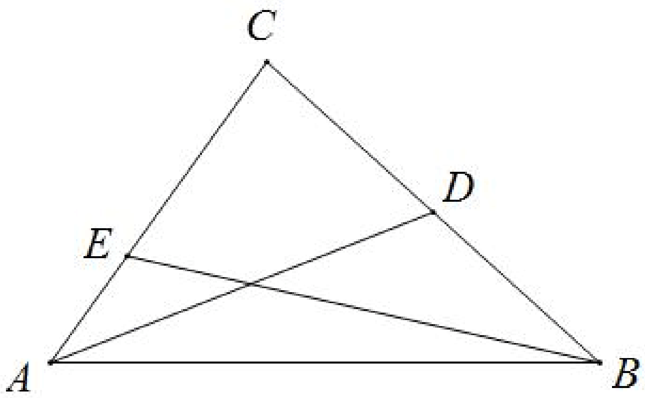
联立 $\begin{cases} a_1q=2a_1+2 \\ a_1q^2=2(a_1+a_1q)+2 \end{cases}$，解得 $a_1=2, q=3$（$q=0$ 舍去），则 $a_5=a_1q^4=2\times3^4=162$.故选：C.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为 BC 边中点，点 E 在线段 AC 上，且 $2AE=EC$，若 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BE}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 为（　　）

A. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$　　C. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$　　D. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

【答案】A【解析】【分析】先以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 为基底表示出 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{BE}$，然后消去 $\overrightarrow{AC}$ 可得.

【详解】因为点 D 为 BC 边中点，$2AE=EC$，



所以 $\begin{cases} \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) \\ \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB} \end{cases}$，消去 $\overrightarrow{AC}$ 得 $2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{BE}=4\overrightarrow{AB}$，

即 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$.故选：A.

6. 设 F_1，F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 作 x 轴的垂线与椭圆 C 交于 A，B 两点，若 $\triangle ABF_1$ 为钝角三角形，则离心率 e 的取值范围为（　　）

A. $0<e<\sqrt{2}-1$　　B. $\sqrt{2}-1<e<1$　　C. $\frac{1}{2}<e<1$　　D. $0<e<\frac{1}{2}$

【答案】A【解析】【分析】根据题意，得到 $|F_1F_2|<\frac{b^2}{a}$，得到 $c^2+2ac-a^2<0$，转化为 $e^2+2e-1<0$，进而求得椭圆 C 的离心率的取值范围.【详解】由 F_1，F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，过 F_2 作 x 轴的垂线与椭圆 C 交于 A, B 两点，

可得 $|AB|=\frac{2b^2}{a}$，即 $|AF_2|=\frac{b^2}{a}$，

因为$\triangle ABF_1$为钝角三角形，则$\angle AF_1F_2 > 45°$，可得$|F_1F_2| < \frac{b^2}{a}$，即$2c < \frac{b^2}{a}$，即$b^2 > 2ac$，

又因为$b^2 = a^2 - c^2$，可得$a^2 - c^2 > 2ac$，即$c^2 + 2ac - a^2 < 0$，

即$e^2 + 2e - 1 < 0$，且$0 < e < 1$，解得$0 < e < \sqrt{2} - 1$，即椭圆C的离心率的取值范围为$(0, \sqrt{2} - 1)$.故选：A.

7. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作，其中第一题是测量海岛的高.如图1，点E，H，G在水平线AC上，DE和FG是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG称为“表距”，GC和EH都称为“表目距”，GC与EH的差称为“表目距的差”，则海岛的高$AB = \frac{表高 \times 表距}{表目距的差} + 表高$，某同学受此法的启发设计了另一种测量此山高度的方案（如图2）：他站在水平线AC上，同时在水平线AC上放一个小镜子（视为点P），他在距离镜子a米点Q时，通过镜子看到了山顶，然后沿水平线AC向靠近山的方向走了m米，到达M点，再将镜子放在距离自己b米的前方点N处，此时又看到了山顶，若此人的眼睛到水平线AC的距离为h米，则此山的高度约为（　　）米

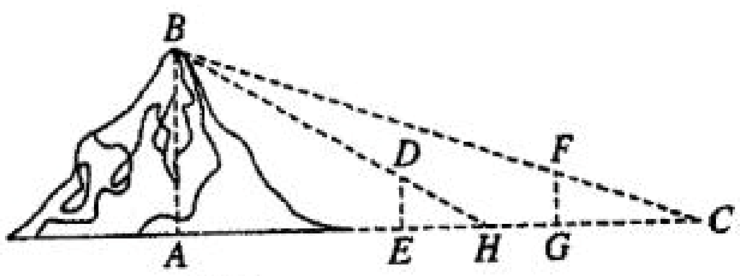


图1

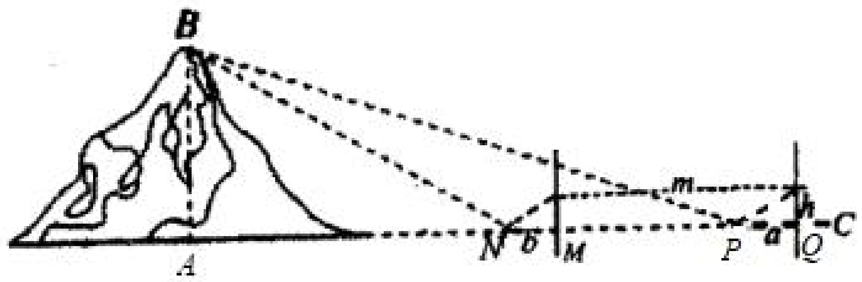
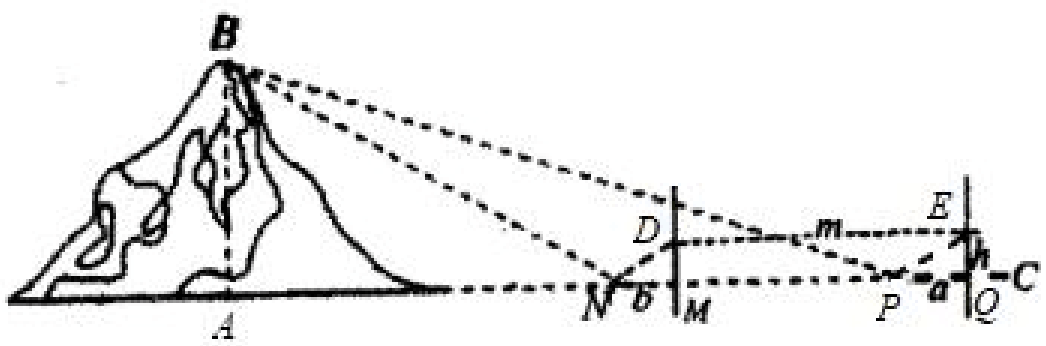


图2

A. $\frac{mh}{a-b} + h$　　B. $\frac{mh}{a-b} - h$　　C. $\frac{h}{a-b} - mh$　　D. $\frac{h}{a-b} + mh$

【答案】B【解析】【分析】利用三角形相似得到线段比，从而转化得解.

【详解】记此人的眼睛在M, Q处的位置分别为D, E，如图，



由题意可知$\triangle ABN \backsim \triangle MDN$，$\triangle ABP \backsim \triangle QEP$，

所以$\frac{AB}{MD} = \frac{AN}{MN}$，$\frac{AB}{QE} = \frac{AP}{PQ}$，

又$DM = EQ = h$，$MQ = m$，$PQ = a, MN = b$，

所以$\frac{AB}{h} = \frac{AN}{b}$，$\frac{AB}{h} = \frac{AP}{a}$，则$AN = \frac{b \cdot AB}{h}$，$AP = \frac{a \cdot AB}{h}$，

因为$AP - AN = PN = MP + MN = m - a + b$，所以$\frac{a \cdot AB}{h} - \frac{b \cdot AB}{h} = m - a + b$，解得$AB = \frac{mh}{a-b} - h$.

故选：B.

8. 设$a = \tan 0.21$，$b = \ln 1.21$，$c = \frac{21}{121}$，则下列大小关系正确的是（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$ 【答案】C【解析】

【分析】首先通过构造函数得到当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\tan x>x$，再通过构造函数$f(x)=x-\ln(1+x),0<x<\frac{\pi}{2}$进一步得到$x>\ln(1+x)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，由此即可比较$a,b$，通过构造函数$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x},x>0$即可比较$c,b$，由此即可得解.

【详解】设$h(x)=\tan x-x,0<x<\frac{\pi}{2}$，则$h'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}-1=\frac{1}{\cos^2 x}-1>0,0<x<\frac{\pi}{2}$，

所以$h(x)=\tan x-x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

所以$h(x)=\tan x-x>g(0)=0$，即$\tan x>x,0<x<\frac{\pi}{2}$，

令$f(x)=x-\ln(1+x),0<x<\frac{\pi}{2}$，则$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$，

所以$f(x)=x-\ln(1+x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

从而$f(x)=x-\ln(1+x)>f(0)=0$，即$x>\ln(1+x)$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\tan x>x>\ln(1+x)$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

从而当$x=0.21$时，$a=\tan 0.21>b=\ln 1.21$，

令$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x},x>0$，则$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0$，

所以$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$g(0.21)=\ln 1.21-\frac{21}{121}>g(0)=0$，即$b=\ln 1.21>c=\frac{21}{121}$，

综上所述：$a=\tan 0.21>b=\ln 1.21>c=\frac{21}{121}$.故选：C.

【点睛】关键点睛：本题的关键是在比较a,b的大小关系时，可以通过先放缩再构造函数求导，而在比较c,b大小关系时，关键是通过构造适当的函数，通过导数研究函数单调性，从而来比较大小.

二、多项选择题（本大题共**4**小题，每小题**5**分，共**20**分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的.全部选对的得**5**分，部分选对的得**2**分，有选错的得**0**分）

9. 已知$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，下列说法正确的是（　　）

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 4$　　B. $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$　　C. $2^a<2^{b-1}$　　D. $\sqrt{a}+2\sqrt{b}\le\sqrt{5}$

【答案】BD【解析】【分析】根据题意结合基本不等式和三角函数的性质，逐项判定，即可求解.

【详解】因为$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，

对于 A 中，由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+b)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2+2\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}}=4$，

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$时，即$a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立，所以 A 不正确；

对于 B 中，由$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab\geq 1-2\cdot(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{2}$，

当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立，所以 B 正确；

对于 C 中，因为$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，可得$b-1=-a<0$，

又因为函数$y=2^x$为单调递增函数，可得$2^a>2^{-a}$，所以$2^a>2^{b-1}$，所以 C 不正确；

对于 D 中，因为$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，设$a=\sin^2\theta, b=\cos^2\theta, (0<\theta<\frac{\pi}{2})$，

则$\sqrt{a}+2\sqrt{b}=\sin\theta+2\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)\leq\sqrt{5}$，其中$\tan\varphi=2$，所以 D 正确.故选：BD.

10. 已知复数z_1，z_2，则下列命题成立的有（　　）

A. 若$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则$z_1z_2=0$

B. $|z_1^n|=|z_1|^n, n\in Z$

C. 若$z_1^2+z_2^2=0$，则$|z_1|=|z_2|$

D. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

【答案】BCD【解析】

【分析】举例说明判断 A；利用复数的三角形式计算判断 B；利用复数的代数形式，结合模及共轭复数的意义计算判断 CD.

【详解】对于 A，当$z_1=1+\mathrm{i}, z_2=1-\mathrm{i}$时，$|z_1+z_2|=2=|z_1-z_2|$，而$z_1z_2=2\neq 0$，A 错误；

对于 B，令$z_1=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), r\geq 0, \theta\in\mathrm{R}$，则$z_1^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$，

于是$|z_1^n|=r^n|\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta|=r^n$，而$|z_1|=r$，即有$|z_1|^n=r^n$，因此$|z_1^n|=|z_1|^n$成立，B 正确；

设复数$z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathrm{R})$，$z_2=c+d\mathrm{i}(c,d\in\mathbf{R})$，

对于 C，由$z_1^2+z_2^2=0$，得$(a^2-b^2+c^2-d^2)+(2ab+2cd)\mathrm{i}=0$，

则$\begin{cases}a^2-b^2+c^2-d^2=0\\2ab+2cd=0\end{cases}$，$|z_1|^2-|z_2|^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2-(\sqrt{c^2+d^2})^2=0$，因此$|z_1|=|z_2|$，C 正确；

对于 D，$z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$，则$\overline{z_1\cdot z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i}$，

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=(ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i}$，因此$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，D 正确.故选：BCD

11. 已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在$[0,2\pi]$有且仅有 4 个零点，则下列各选项正确的是（　　）

A. $f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$单调递增

B. ω的取值范围是$\left[\frac{23}{12},\frac{29}{12}\right)$

C. $f(x)$在区间$(0,2\pi)$有 2 个极小值点

D. $f(x)$在区间$(0,2\pi)$有 3 个极大值点

【答案】BC【解析】