

## 重难点 08 导数常考经典压轴小题全归类【十大题型】

【新高考专用】

### 目录

### 导数常考经典压轴小题全归类

命题规律

夯基·核心知识梳理

提升·必考题型归纳

题型1 导数的运算

题型2 函数的切线问题

题型3 导数中函数的单调性问题

题型4 导数中函数的极值问题

题型5 导数中函数的最值问题

题型6 利用导数解不等式

题型7 导数中的函数零点（方程根）问题

题型8 导数中的不等式恒成立问题

题型9 导数中的能成立问题

题型10 双变量问题

课后提升练（19题）

### ▶ 命题规律

导数是高考数学的重要内容，是高考必考的重点、热点内容，主要涉及导数的运算及几何意义，利用导数研究函数的单调性、极值和最值，函数零点问题、不等式恒（能）成立问题等，考查分类讨论、数形结合、转化与化归等思想.

从近几年的高考情况来看，导数的运算和几何意义是高考命题的热点，多以选择题、填空题形式考查，难度较小；利用导数研究函数的单调性、极值、最值多在选择题、填空题靠后的位置考查，难度中等偏上，属综合性问题，解题时要灵活求解.

## ► 知识梳理

### 【知识点 1 导数的运算的方法技巧】

#### 1. 导数的运算的方法技巧

- (1)求函数的导数要准确地把函数拆分成基本初等函数的和、差、积、商，再利用运算法则求导.
- (2)抽象函数求导，恰当赋值是关键，然后活用方程思想求解.
- (3)复合函数求导，应由外到内逐层求导，必要时要进行换元.

### 【知识点 2 切线方程的求法】

#### 1. 求曲线“在”某点的切线方程的解题策略：

- ①求出函数  $y=f(x)$  在  $x=x_0$  处的导数，即曲线  $y=f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处切线的斜率；
- ②在已知切点坐标和切线斜率的条件下，求得切线方程为  $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ .

#### 2. 求曲线“过”某点的切线方程的解题通法：

- ①设出切点坐标  $T(x_0, f(x_0))$  (不出现  $y_0$ )；
- ②利用切点坐标写出切线方程： $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ ；
- ③将已知条件代入②中的切线方程求解.

### 【知识点 3 导数中函数单调性问题的解题策略】

#### 1. 确定函数单调区间的步骤：

- (1)确定函数  $f(x)$  的定义域；
- (2)求  $f'(x)$ ；
- (3)解不等式  $f'(x)>0$ ，解集在定义域内的部分为单调递增区间；
- (4)解不等式  $f'(x)<0$ ，解集在定义域内的部分为单调递减区间.

#### 2. 含参函数的单调性的解题策略：

- (1)研究含参数的函数的单调性，要依据参数对不等式解集的影响进行分类讨论.
- (2)若导函数为二次函数式，首先看能否因式分解，再讨论二次项系数的正负及两根的大小；若不能因式分解，则需讨论判别式  $\Delta$  的正负，二次项系数的正负，两根的大小及根是否在定义域内.

#### 3. 根据函数单调性求参数的一般思路：

- (1)利用集合间的包含关系处理： $y=f(x)$  在  $(a,b)$  上单调，则区间  $(a,b)$  是相应单调区间的子集.
- (2) $f(x)$  为增(减)函数的充要条件是对任意的  $x \in (a,b)$  都有  $f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0)$ ，且在  $(a,b)$  内的任一非空子区间上， $f'(x)$  不恒为零，应注意此时式子中的等号不能省略，否则会漏解.
- (3)函数在某个区间上存在单调区间可转化为不等式有解问题.

### 【知识点 4 函数的极值与最值问题的解题思路】

#### 1. 运用导数求函数 $f(x)$ 极值的一般步骤：

- (1)确定函数  $f(x)$  的定义域；
- (2)求导数  $f'(x)$ ；
- (3)解方程  $f'(x)=0$ ，求出函数定义域内的所有根；
- (4)列表检验  $f'(x)$  在  $f'(x)=0$  的根  $x_0$  左右两侧值的符号；
- (5)求出极值.

#### 2. 根据函数极值求参数的一般思路：

已知函数极值，确定函数解析式中的参数时，要注意：根据极值点的导数为 0 和极值这两个条件列方

程组，利用待定系数法求解.

### 3. 利用导数求函数最值的解题策略:

(1)利用导数求函数  $f(x)$  在  $[a,b]$  上的最值的一般步骤:

①求函数在  $(a,b)$  内的极值;

②求函数在区间端点处的函数值  $f(a)$ ,  $f(b)$ ;

③将函数  $f(x)$  的各极值与  $f(a)$ ,  $f(b)$  比较, 其中最大的一个为最大值, 最小的一个为最小值.

(2)求函数在无穷区间(或开区间)上的最值的一般步骤:

求函数在无穷区间(或开区间)上的最值, 不仅要研究其极值情况, 还要研究其单调性, 并通过单调性和极值情况, 画出函数的大致图象, 然后借助图象观察得到函数的最值.

## 【知识点 5 导数的综合应用】

### 1. 导数中函数的零点(方程的根)的求解策略

#### (1)利用导数研究方程根(函数零点)的技巧

①研究方程根的情况, 可以通过导数研究函数的单调性、最大值、最小值、变化趋势等.

②根据题目要求, 画出函数图象的走势规律, 标明函数极(最)值的位置.

③利用数形结合的思想去分析问题, 可以使问题的求解有一个清晰、直观的整体展现.

#### (2)已知函数零点个数求参数的常用方法

①分离参数法: 首先分离出参数, 然后利用求导的方法求出构造的新函数的最值, 根据题设条件构建关于参数的不等式, 再通过解不等式确定参数范围.

②分类讨论法: 结合单调性, 先确定参数分类的标准, 在每个小范围内研究零点的个数是否符合题意, 将满足题意的参数的各小范围并在一起, 即为所求参数范围.

### 2. 导数中恒成立、存在性问题的求解策略

恒成立(或存在性)问题常常运用分离参数法, 转化为求具体函数的最值问题.

如果无法分离参数, 可以考虑对参数或自变量进行分类讨论, 利用函数性质求解, 常见的是利用函数单调性求解函数的最大、最小值; 当不能用分离参数法或借助于分类讨论解决问题时, 还可以考虑利用函数图象来求解, 即利用数形结合思想解决恒成立(或存在性)问题, 此时应先构造函数, 结合函数图象, 利用导数来求解.

### 3. 导数中的双变量问题

导数中的双变量问题往往以双参数不等式的形式呈现, 要想解决双变量问题, 就需要掌握破解双参数不等式的方法:

一是转化, 即由已知条件入手, 寻找双参数满足的关系式, 并把含双参数的不等式转化为含单参数的不等式;

二是巧构造函数, 再借用导数, 判断函数的单调性, 从而求其最值;

三是回归双参的不等式的证明, 把所求的最值应用到双参不等式, 即可证得结果.

► 举一反三

【题型 1 导数的运算】

【例 1】(2024·湖北·一模) 已知函数  $f(x) = e^x - f'(1)x$ , 则 ( )

A.  $f(1) = -\frac{e}{2}$

B.  $f'(1) = -\frac{e}{2}$

C.  $f(2) = e^2 - e$

D.  $f'(2) = e^2 - e$

【解题思路】求导, 通过赋值逐项判断即可.

【解答过程】因为  $f(x) = e^x - f'(1)x$ , 所以  $f'(x) = e^x - f'(1)$ ,

则  $f'(1) = e - f'(1)$ , 所以  $f'(1) = \frac{e}{2}$ ,

则  $f(x) = e^x - \frac{e}{2}x$ , 所以  $f(1) = \frac{e}{2}$ ,  $f'(2) = e^2 - \frac{e}{2}$ ,  $f(2) = e^2 - e$ .

故选: C.

【变式 1-1】(2024·全国·模拟预测) 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 若  $f(2x-1)+3$ ,  $f'(x-2)$  都是奇函数, 且

$f'(1) = -2f(-1)$ , 则  $\sum_{k=1}^{2025} f'(k) = ( )$

A. 6

B. -9

C. 3

D. -12

【解题思路】利用奇函数的性质得到  $f(2x-1)+3 = -f(-2x-1)-3$ , 然后通过求导得到  $f'(2x-1) = f'(-2x-1)$ , 再结合  $f'(x-2)$  为奇函数得到  $f'(x)$  的周期, 根据  $f(2x-1)+3$  为奇函数和  $f'(1) = -2f(-1)$  得到  $f'(1)$ , 最后利用周期性计算即可.

【解答过程】由  $f(2x-1)+3$  为奇函数可得  $f(2x-1)+3 = -f(-2x-1)-3$ ,

两边分别求导可得  $2f'(2x-1) = 2f'(-2x-1)$ ,

即  $f'(2x-1) = f'(-2x-1)$ , 故  $f'(x-1) = f'(-x-1)$ , 所以  $f'(x-2) = f'(-x)$ ,

又  $f'(x-2)$  为奇函数, 所以  $f'(x-2) = -f'(-x-2)$ , 可得  $f'(-x) = -f'(-x-2)$ ,

故  $f'(x+2) = -f'(x)$ , 从而  $f'(x+4) = f'(x)$ ,

故 4 是  $f'(x)$  的一个周期,

在  $f'(x+2) = -f'(x)$  中, 分别令  $x=1$  和  $2$  可得:  $f'(3) = -f'(1)$ ,  $f'(4) = -f'(2)$ ,

所以  $f'(1) + f'(2) + f'(3) + f'(4) = 0$ .

由  $f(2x-1)+3$  为奇函数可得  $f(-1)+3 = 0$ ,

故  $f'(1) = -2f(-1) = 6$ , 所以  $\sum_{k=1}^{2025} f'(k) = 506 \times 0 + f'(1) = 6$ .

故选: A.

【变式 1-2】（2024·山东·二模）已知 $f(x)$ 为定义在 $R$ 上的奇函数，设 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，若 $f(x) = f(2-x) + 4x - 4$ ，则 $f'(2023) =$ （ ）

- A. 1                      B. -2023                      C. 2                      D. 2023

【解题思路】根据 $f(x) = f(2-x) + 4x - 4$ 进行 $f'(x)$ 奇偶性和周期性的推导，得到 $f'(x)$ 是周期为 4 的偶函数，从而算出 $f'(2023)$ 的值.

【解答过程】因为 $f(x) = f(2-x) + 4x - 4$ ，所以两边求导，得 $f'(x) = -f'(2-x) + 4$ ，  
即 $f'(x) + f'(2-x) = 4$ ①

因为 $f(x)$ 为定义在 $R$ 上的奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$ ，

所以两边求导，得 $f'(x) = f'(-x)$ ，所以 $f'(x)$ 是定义在 $R$ 上的偶函数，

所以 $f'(2-x) = f'(x-2)$ ，结合①式可得， $f'(x) + f'(x-2) = 4$ ，

所以 $f'(x-2) + f'(x-4) = 4$ ，两式相减得， $f'(x) = f'(x-4)$ ，

所以 $f'(x)$ 是周期为 4 的偶函数，

所以 $f'(2023) = f'(-1) = f'(1)$ .

由①式，令 $x = 1$ ，得 $f'(1) = 2$ ，所以 $f'(2023) = f'(1) = 2$ .

故选：C.

【变式 1-3】（2024·山西晋中·模拟预测）已知函数 $f(x) = 2x(x-2)(x-2^2)(x-2^3)(x-2^4)(x-2^5)(x-2^6)$ ，则 $f'(0) =$ （ ）

- A.  $2^{20}$                       B.  $2^{21}$                       C.  $2^{22}$                       D.  $2^{23}$

【解题思路】观察 $f(x)$ ，构造函数 $\varphi(x) = (x-2)(x-2^2)(x-2^3)(x-2^4)(x-2^5)(x-2^6)$ ，利用导数的四则运算得到 $f'(x) = 2\varphi(x) + 2x\varphi'(x)$ ，代入 $x = 0$ 即可得解.

【解答过程】设 $\varphi(x) = (x-2)(x-2^2)(x-2^3)(x-2^4)(x-2^5)(x-2^6)$ ，

则 $f(x) = 2x\varphi(x)$ ，故 $f'(x) = 2\varphi(x) + 2x\varphi'(x)$ ，

所以 $f'(0) = 2\varphi(0) = 2(0-2)(0-2^2)(0-2^3)(0-2^4)(0-2^5)(0-2^6)$   
 $= 2^{1+1+2+3+4+5+6} = 2^{22}$ .

故选：C.

## 【题型 2 函数的切线问题】

【例 2】（2024·江西景德镇·一模）过点 $A(0,1)$ 且与曲线 $f(x) = x^3 + 2x - 1$ 相切的直线方程是（ ）

- A.  $y = 5x + 1$                       B.  $y = 2x + 1$   
C.  $y = x + 1$                       D.  $y = -2x + 1$

【解题思路】根据导数几何意义以及斜率公式，计算可得切点坐标，即可求得切线方程.

【解答过程】 $f'(x) = 3x^2 + 2$ ，点A不在曲线上，

设切点为 $(x_0, x_0^3 + 2x_0 - 1)$ ，则 $f'(x_0) = 3x_0^2 + 2 = \frac{x_0^3 + 2x_0 - 1 - 1}{x_0}$ ，

解得： $x_0 = -1$ ，得切点 $(-1, -4)$ ，则 $k = f'(-1) = 5$

切线方程为： $y = 5x + 1$ ，

故选：A.

【变式 2-1】（2024·山东·模拟预测）若过点 $(1, m)$ 可以作 $y = (x + 1)e^x$ 的三条切线，则实数 $m$ 的取值范围是（ ）

A.  $(-4e^{-2}, 0)$       B.  $(-6e^{-3}, 0)$       C.  $(-6e^{-3}, 2e)$       D.  $(e, 2e)$

【解题思路】设出切点坐标 $(t, (t + 1)e^t)$ ，求导并利用导数的几何意义求出切线方程，用 $t$ 表示出 $m$ ，再构造函数，利用导数探讨函数图象性质，进而求出 $m$ 的范围.

【解答过程】依题意，设切点坐标为 $(t, (t + 1)e^t)$ ，由 $y = (x + 1)e^x$ ，求得 $y' = (x + 2)e^x$ ，

则函数 $y = (x + 1)e^x$ 的图象在点 $(t, (t + 1)e^t)$ 处的切线方程为 $y - (t + 1)e^t = (t + 2)e^t(x - t)$ ，

由切线过点 $(1, m)$ ，得 $m = (t + 1)e^t + (t + 2)e^t(1 - t) = (-t^2 + 3)e^t$ ，

令 $g(t) = (-t^2 + 3)e^t$ ，依题意，直线 $y = m$ 与函数 $y = g(t)$ 的图象有 3 个公共点，

$g'(t) = (-t^2 - 2t + 3)e^t = -(t + 3)(t - 1)e^t$ ，当 $t < -3$ 或 $t > 1$ 时， $g'(t) < 0$ ，当 $-3 < t < 1$ 时， $g'(t) > 0$ ，

则函数 $g(t)$ 在 $(-\infty, -3)$ 、 $(1, +\infty)$ 上单调递减，在 $(-3, 1)$ 上单调递增，

当 $t = -3$ 时，函数 $g(t)$ 取得极小值 $g(-3) = -6e^{-3}$ ，而当 $t < -\sqrt{3}$ 时，恒有 $g(t) < g(-\sqrt{3}) = 0$ ，

又 $g(2) = -e^2 < -6e^{-3}$ ，因此当 $-6e^{-3} < m < 0$ 时，直线 $y = m$ 与函数 $y = g(t)$ 的图象有 3 个公共点，

所以实数 $m$ 的取值范围是 $(-6e^{-3}, 0)$ .

故选：B.

【变式 2-2】（2024·广东佛山·一模）若直线 $y = kx$ 与曲线 $y = \ln x + \frac{1}{2x}$ 相切，则 $k = \underline{\quad\quad}$ .

【解题思路】设出切点坐标 $P(x_0, y_0)$ ，求导并利用导数的几何意义与两点间的斜率公式计算可得 $k = \frac{1}{2}$ .

【解答过程】设直线 $y = kx$ 与曲线 $y = \ln x + \frac{1}{2x}$ 相切于点 $P(x_0, y_0)$ ，

求导可得 $y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$ ，因此切线斜率 $k = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{2x_0^2} = \frac{2x_0 - 1}{2x_0^2}$ ，

又切线过原点 $O(0, 0)$ ，可得 $k_{PO} = \frac{\ln x_0 + \frac{1}{2x_0} - 0}{x_0 - 0} = \frac{2x_0 - 1}{2x_0^2}$ ，化简可得 $x_0 \ln x_0 - x_0 + 1 = 0$ ，

令 $g(x) = x \ln x - x + 1$ ，则 $g'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$ ，

当 $x \in (0,1)$ 时,  $g'(x) < 0$ , 即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时,  $g'(x) > 0$ , 即 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 也是最小值,  $g(1)=0$ , 即可得 $g(x)=x\ln x-x+1 \geq 0$ ,

因此可得 $x_0=1$ , 即可得 $k=\frac{2x_0-1}{2x_0^2}=\frac{1}{2}$ .

故答案为:  $\frac{1}{2}$ .

【变式 2-3】(2024·四川成都·模拟预测) 已知函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象与函数 $y=a\ln x$ 的图象在公共点处有相同的切线, 则公共点坐标为  $(e^2, e)$ .

【解题思路】设公共点为 $(x_0, y_0)$ , 由 $\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{a}{x_0}$ , 可得 $x_0=4a^2 (a>0)$ , 进而利用导数可得 $\begin{cases} x_0=4a^2 \\ a\ln x_0=\sqrt{x_0} \end{cases}$ , 求解即可.

【解答过程】函数 $y=a\ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ , 可得 $f'(x)=\frac{a}{x}$ , 由 $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,

设曲线 $f(x)=a\ln x$ 与曲线 $g(x)=\sqrt{x}$ 的公共点为 $(x_0, y_0)$ ,

由于在公共点处有共同的切线, 所以 $\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{a}{x_0}$ , 所以 $x_0=4a^2 (a>0)$ ,

由 $f(x_0)=g(x_0)$ , 可得 $a\ln x_0=\sqrt{x_0}$ , 联立可得 $\begin{cases} x_0=4a^2 \\ a\ln x_0=\sqrt{x_0} \end{cases}$ ,

解得 $x_0=e^2$ , 所以 $y_0=e$ , 所以公共点坐标为 $(e^2, e)$ .

故答案为:  $(e^2, e)$ .

### 【题型 3 导数中函数的单调性问题】

【例 3】(2024·黑龙江佳木斯·模拟预测) 若函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-4\ln x$ , 则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 ( )

- A.  $(4, +\infty)$       B.  $(0,1)$       C.  $(0,4)$       D.  $(1,4)$

【解题思路】求函数 $f(x)$ 的导数, 利用导数小于零并结合定义域得出结果.

【解答过程】函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-4\ln x$ , 定义域为 $(0, +\infty)$ ,

由 $f'(x)=x-3-\frac{4}{x}=\frac{x^2-3x-4}{x}=\frac{(x-4)(x+1)}{x}$ , 令 $f'(x)<0$ , 解得 $0<x<4$ ,

则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,4)$ .

故选: C.

【变式 3-1】(2024·湖北·一模) 已知函数 $f(x)=ax^2-\ln x+2x$ 是减函数, 则 $a$ 的取值范围为 ( )

- A.  $(-\infty, 0]$       B.  $(-\infty, -1]$       C.  $(-\infty, 1]$       D.  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

【解题思路】求导得 $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + 2$ ，根据题意可得 $2a \leq \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，求得 $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ 的最小值即可。

【解答过程】由 $f(x) = ax^2 - \ln x + 2x$ ，可得 $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + 2$ ，  
因为函数 $f(x) = ax^2 - \ln x + 2x$ 是减函数，所以 $f'(x) \leq 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，  
即 $2ax - \frac{1}{x} + 2 \leq 0$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，所以 $2a \leq \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，  
所以 $2a \leq \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)_{\min}$ ，又 $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1 \geq -1$ ，当且仅当 $x = 1$ 时等号成立，  
所以 $2a \leq -1$ ，所以 $a \leq -\frac{1}{2}$ ，所以 $a$ 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ 。

故选：D。

【变式 3-2】（2024·吉林长春·模拟预测）已知 $a = \sin \frac{1}{3}$ ,  $b = \ln \frac{3}{2}$ ,  $c = 3^{-\frac{1}{2}}$ ，则（ ）

A.  $c < b < a$

B.  $a < c < b$

C.  $a < b < c$

D.  $b < a < c$

【解题思路】先构造函数 $f(x) = x - \sin x, x \in [0, 1]$ ，再应用函数单调性得出 $\sin \frac{1}{3} < \frac{1}{3}$ ，再根据 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 < e < \left(\frac{3}{2}\right)^3$ ，  
取对数判断得出 $\frac{1}{3} < \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$ ，最后比较可得选项；

【解答过程】设 $f(x) = x - \sin x, x \in [0, 1]$ ，则 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，  
所以 $f\left(\frac{1}{3}\right) > f(0) = 0$ ，即 $\frac{1}{3} - \sin \frac{1}{3} > 0$ ，所以 $a = \sin \frac{1}{3} < \frac{1}{3}$ ；  
因为 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 < e < \left(\frac{3}{2}\right)^3$ ，所以 $2\ln \frac{3}{2} < 1 < 3\ln \frac{3}{2}$ ，即 $\frac{1}{3} < b = \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$ ；  
又 $c = 3^{-\frac{1}{2}} > 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ ，所以 $a < b < c$ 。

故选：C。

【变式 3-3】（2024·河南·模拟预测）若函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - \frac{a}{2}x^2 + 3a, & 0 < x < 2, \\ e^x + \frac{a}{2}x^2 - 2a, & x \geq 2 \end{cases}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，则实数 $a$ 的取值范围是（ ）

A.  $\left[-\frac{e^2}{2}, e\right]$

B.  $\left[-\frac{e}{2}, 0\right]$

C.  $\left[-\frac{e^2}{2}, 0\right]$

D.  $\left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right]$

【解题思路】根据分段函数的单调性判断方法进行分析，在每一段上通过分离参数求最值得到 $a$ 的取值范围。

【解答过程】当 $0 < x < 2$ 时， $f(x) = e^x - \frac{a}{2}x^2 + 3a$ ， $f'(x) = e^x - ax \geq 0$ ，  
 $a \leq \frac{e^x}{x}$ ，令 $g(x) = \frac{e^x}{x}$ ， $g'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ，

令 $g'(x) > 0$ , 可得 $1 < x < 2$ , 令 $g'(x) < 0$ , 可得 $0 < x < 1$ ,

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,  $(1,2)$ 上单调递增,  $a \leq g(x)_{\min} = g(1) = e$ ;

当 $x \geq 2$ 时,  $f(x) = e^x + \frac{a}{2}x^2 - 2a$ ,  $f'(x) = e^x + ax \geq 0$ ,  $a \geq -\frac{e^x}{x}$ ,

令 $h(x) = -\frac{e^x}{x}$ ,  $h'(x) = -\frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(1-x)}{x^2} < 0$ ,

故 $h(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减,  $a \geq h(x)_{\max} = h(2) = -\frac{e^2}{2}$ ,

同时还需满足 $e^2 - \frac{a}{2} \cdot 2^2 + 3a \leq e^2 + \frac{a}{2} \cdot 2^2 - 2a$ , 解得 $a \leq 0$ .

综上,  $a$ 的取值范围是 $[-\frac{e^2}{2}, 0]$ .

故选: C.

#### 【题型 4 导数中函数的极值问题】

【例 4】(2024·辽宁·模拟预测) 已知函数 $f(x) = x \cdot (x-c)^2$ 在 $x=1$ 处有极大值, 则 $c = ( )$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【解题思路】首先根据 $f'(1) = 0$ , 求 $c$ , 再代入验证, 即可求解.

【解答过程】 $f'(x) = (x-c)^2 + 2x(x-c) = (x-c)(3x-c)$ ,

由题意可知,  $f'(1) = 0$ , 得 $c = 1$ 或 $c = 3$ ,

当 $c = 1$ 时,  $f'(x) = (x-1)(3x-1) = 0$ , 得 $x = 1$ 或 $x = \frac{1}{3}$ ,

当 $f'(x) > 0$ , 得 $x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 1$ ,  $f'(x) < 0$ , 得 $\frac{1}{3} < x < 1$ ,

所以函数的单调递增区间是 $(-\infty, \frac{1}{3})$ 和 $(1, +\infty)$ , 单调递减区间是 $(\frac{1}{3}, 1)$ ,

所以 $x = 1$ 是极小值, 故 $c \neq 1$ ,

$c = 3$ 时,  $f'(x) = (x-3)(3x-3) = 0$ , 得 $x = 1$ 或 $x = 3$ ,

当 $f'(x) > 0$ , 得 $x < 1$ 或 $x > 3$ ,  $f'(x) < 0$ , 得 $1 < x < 3$ ,

所以函数的单调递增区间是 $(-\infty, 1)$ 和 $(3, +\infty)$ , 单调递减区间是 $(1, 3)$ ,

所以 $x = 1$ 是极大值, 故 $c = 3$ .

故选: C.

【变式 4-1】(2024·吉林·模拟预测) 若函数 $f(x) = a \ln x + \frac{3}{x} - x$ 既有极大值也有极小值, 则实数 $a$ 的取值范围为 ( )

A.  $(0, 2\sqrt{3})$

B.  $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$

C.  $(-\infty, -2\sqrt{3})$

D.  $(2\sqrt{3}, +\infty)$

【解题思路】求导，分析可知 $x^2-ax+3=0$ 有2个不相等的正根 $x_1, x_2$ ，结合二次方程的根的分布列式求解即可。

【解答过程】由题意可知： $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{3}{x^2} - 1 = -\frac{x^2-ax+3}{x^2}$ ，

若函数 $f(x)$ 既有极大值也有极小值，则 $x^2-ax+3=0$ 有2个不相等的正根 $x_1, x_2$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = a^2 - 12 > 0 \\ x_1 + x_2 = a > 0 \\ x_1 x_2 = 3 > 0 \end{cases}, \text{解得 } a > 2\sqrt{3},$$

所以实数 $a$ 的取值范围为 $(2\sqrt{3}, +\infty)$ 。

故选：D。

【变式4-2】（2024·陕西铜川·模拟预测）已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax - a^2$ 恰有两个极值点，则 $a$ 的取值范围是（ ）

A.  $[0, 1]$

B.  $(0, 1)$

C.  $[1, +\infty)$

D.  $(1, +\infty)$

【解题思路】对函数求导后，令 $h(x) = f'(x) = e^x - x - a$ ，则只需要 $h(x)$ 有两个不同的零点，利用导数求得 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，则 $h(0) < 0$ ，得 $a > 1$ ，再结合零点存在性定理可判断出 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上各有一个零点，从而可求得结果。

【解答过程】 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbb{R}$ ， $f'(x) = e^x - x - a$ ，令 $h(x) = e^x - x - a$ ，

所以 $h'(x) = e^x - 1$ ，令 $h'(x) < 0$ ，解得 $x < 0$ ；令 $h'(x) > 0$ ，解得 $x > 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。

要使 $f(x)$ 恰有两个极值点，则 $f'(0) = h(0) = 1 - a < 0$ ，解得 $a > 1$ ，

此时 $f'(-a) = e^{-a} - (-a) - a = e^{-a} > 0$ ，

所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有唯一的零点，

令 $g(x) = x - \ln x - \ln 2 (x > 1)$ ，所以 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ ，

所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x) > 1 - \ln 2 > 0$ ，

所以 $x - \ln x - \ln 2 > 0 (x > 1)$ ，

所以 $f'(\ln 2a) = e^{\ln 2a} - \ln 2a - a = a - \ln a - \ln 2 > 0$ ，

所以 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的零点，

综上，当 $a > 1$ 时， $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有两个不同的零点，且零点两侧的函数异号，

所以 $a$ 的取值范围是 $(1, +\infty)$ 。

故选：D.

【变式 4-3】(2024·江西宜春·模拟预测) 已知函数  $f(x) = e^x + e^{2-x} + a(x-1)^2$  有 3 个极值点  $x_1, x_2, x_3$ , 则  $x_1 + x_2 + x_3 =$  ( )

A.  $2a$

B.  $3a$

C. 2

D. 3

【解题思路】将函数有三个极值点转化为导函数有三个变号零点, 再根据导函数的对称性即可得出答案.

【解答过程】由题意知  $f'(x)$  有三个变号零点,

且三个零点为  $x_1, x_2, x_3$ , 不妨设  $x_1 < x_2 < x_3$ ,

$$f'(x) = e^x - e^{2-x} - 2a(x-1),$$

$$\text{因为 } f'(1-x) + f'(1+x) = e^{1-x} - e^{1+x} - 2ax + e^{1+x} - e^{1-x} + 2ax = 0,$$

所以函数  $f'(x)$  关于  $(1,0)$  对称,

$$\text{又 } f'(1) = 0, \text{ 所以 } x_2 = 1, x_1 + x_3 = 2,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 + x_3 = 3.$$

故选：D.

#### 【题型 5 导数中函数的最值问题】

【例 5】(2024·陕西西安·二模) 函数  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  在  $[-3,3]$  上的最大值和最小值分别是 ( )

A.  $\frac{6}{13}, -\frac{6}{13}$

B.  $\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}$

C.  $\frac{3}{10}, -\frac{3}{10}$

D.  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

【解题思路】求导, 判断导数正负得函数  $f(x)$  在  $[-3,3]$  上的单调性求得结果.

$$\text{【解答过程】 } f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \quad x \in [-3,3],$$

令  $f'(x) > 0$ , 解得  $-1 < x < 1$ , 即  $f(x)$  在  $(-1,1)$  上单调递增,

令  $f'(x) < 0$ , 解得  $x \in [-3,-1) \cup (1,3]$ , 所以  $f(x)$  在  $[-3,-1)$  和  $(1,3]$  上单调递减,

$$\text{又 } f(-3) = -\frac{3}{10}, \quad f(-1) = -\frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(3) = \frac{3}{10},$$

所以函数  $f(x)$  在  $[-3,3]$  上的最大值为  $\frac{1}{2}$ , 最小值为  $-\frac{1}{2}$ .

故选：D.

【变式 5-1】(2024·陕西渭南·模拟预测) 已知函数  $f(x) = xe^x + a$  在区间  $[0,1]$  上的最小值为 1, 则实数  $a$  的值为 ( )

A. -2

B. 2

C. -1

D. 1

【解题思路】先利用导函数研究函数的单调性及最值计算即可.

【解答过程】由题意可知： $f'(x) = (x+1)e^x$ ，

所以当 $x \in [0,1]$ 时 $f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min} = f(0) = a = 1$ 。

故选：D。

【变式 5-2】（2024·宁夏固原·一模）函数 $f(x) = \sin x - (x+2)\cos x - 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的最小值、最大值分别为（ ）

A.  $-2\pi-3, \pi+1$     B.  $-2\pi-3, -3$     C.  $-3, \pi+1$     D.  $-3, 2$

【解题思路】利用导数求得 $f(x)$ 的单调区间，从而判断出 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的最小值和最大值。

【解答过程】 $f'(x) = \cos x - \cos x + (x+2)\sin x = (x+2)\sin x$ ，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上 $f'(x) > 0$ ，即 $f(x)$ 单调递增；

在区间 $(\pi, 2\pi)$ 上 $f'(x) < 0$ ，即 $f(x)$ 单调递减，

又 $f(0) = -3, f(2\pi) = -2\pi-3, f(\pi) = \pi+1$ ，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的最小值为 $-2\pi-3$ ，最大值为 $\pi+1$ 。

故选：A。

【变式 5-3】（2024·福建·三模）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，满足 $2(f(x) + x^2) = x(f'(x) + x)$ ， $f(1) = -\frac{3}{2}$ ，则 $f(x)$ 的最小值为（ ）

A.  $-e$     B.  $e$     C.  $-e^2$     D.  $-\frac{e^2}{2}$

【解题思路】根据题设有 $\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3} = \frac{1}{x}$ ，构造 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ，易得 $g'(x) = \frac{1}{x}$ ，结合已知进一步得到 $f(x) = x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2$ ，根据其导数求其最小值。

【解答过程】由题设，可得 $\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3} = \frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4} = \frac{1}{x}$ ，

令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ，则 $g'(x) = \frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}$ ，故 $g'(x) = \frac{1}{x}$ ，

所以 $g(x) = \ln x + C$ ，其中 $C$ 为常数，又 $f(1) = -\frac{3}{2}$ ，则 $g(1) = -\frac{3}{2}$ ，

所以 $C = -\frac{3}{2}$ ，故 $g(x) = \ln x - \frac{3}{2} = \frac{f(x)}{x^2}$ ，则 $f(x) = x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2$ ，

而 $f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + x = 2x(\ln x - 1)$ ，定义域为 $(0, +\infty)$ ，

当 $0 < x < e$ 时， $f'(x) < 0$ ，故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上递减，

当 $x > e$ 时， $f'(x) > 0$ ，故 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上递增，

所以 $f(x)$ 的极小值，也是最小值为 $f(e) = -\frac{e^2}{2}$ .

故选：D.

**【题型 6 利用导数解不等式】**

**【例 6】**（2024·四川泸州·一模）已知函数 $f(x) = e^x + x$ ，则满足 $f(x) > f(2x-1)$ 的 $x$ 的取值范围是（ ）

- A.  $(-\infty, -1)$       B.  $(-\infty, 1)$       C.  $(-1, +\infty)$       D.  $(1, +\infty)$

**【解题思路】**求导分析函数单调性，利用函数单调性解不等式可得结果.

**【解答过程】** $\because f(x) = e^x + x$ ,

$$\therefore f'(x) = e^x + 1 > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

由 $f(x) > f(2x-1)$ 得， $x > 2x-1$ ，解得 $x < 1$ ，故 $x$ 的取值范围是 $(-\infty, 1)$ .

故选：B.

**【变式 6-1】**（2024·吉林长春·一模）已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ ,  $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，满足 $xf'(x) - 2f(x) < 0$ ，且 $f(2) = 4$ ，则不等式 $f(2^x) - 4^x > 0$ 的解集是（ ）

- A.  $(0, 1)$       B.  $(0, 2)$       C.  $(1, +\infty)$       D.  $(-\infty, 1)$

**【解题思路】**构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ，由导数确定 $g(x)$ 单调性，将已知不等式转化为关于 $g(x)$ 不等式，然后利用单调性即可求解.

**【解答过程】**设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ，则  $g'(x) = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$ ,

因为 $x > 0$ ， $xf'(x) - 2f(x) < 0$ ，所以 $g'(x) < 0$ ，可得 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

不等式 $f(2^x) > 4^x$ ，即 $\frac{f(2^x)}{4^x} > 1 = \frac{f(2)}{4}$ ，即 $\frac{f(2^x)}{(2^x)^2} > \frac{f(2)}{2^2}$ ，所以 $g(2^x) > g(2)$ ，

因为 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，所以 $2^x < 2$ ，解得： $x < 1$ ，

所以不等式的解集为： $(-\infty, 1)$ ，

故选：D.

**【变式 6-2】**（2024·广东佛山·一模）设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数， $f(1-x) + f(1+x) = 0$ ， $f(2) = 0$ ，当 $x > 1$ 时， $(x-1)f'(x) - f(x) > 0$ ，则使得 $f(x) < 0$ 成立的 $x$ 的取值范围是（ ）

- A.  $(0, 1) \cup (1, 2)$       B.  $(0, 1) \cup (2, +\infty)$       C.  $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$       D.  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

**【解题思路】**令 $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$ ，求导，得到 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，且 $g(2) = 0$ ，由 $f(1-x) + f(1+x) = 0$ 得到 $g(1-x) = g(1+x)$ ，得到 $g(x)$ 的对称性，故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减，且 $g(0) = g(2) = 0$ ，得到当 $x < 0$

时,  $g(x) > 0$ , 则  $f(x) < 0$ , 当  $1 < x < 2$  时,  $g(x) < 0$ , 则  $f(x) < 0$ , 求出  $f(x) < 0$  成立的  $x$  的取值范围.

【解答过程】令  $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$ , 则  $g'(x) = \frac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2}$ ,

因为  $x > 1$  时,  $(x-1)f'(x)-f(x) > 0$ , 故当  $x > 1$  时,  $g'(x) > 0$ ,

故  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 且  $g(2) = f(2) = 0$ .

因为  $f(1-x) + f(1+x) = 0$ , 故  $(1-x-1)g(1-x) + (1+x-1)g(1+x) = 0$ ,

即  $-x \cdot g(1-x) + x \cdot g(1+x) = 0$ , 所以  $g(1-x) = g(1+x)$ ,

故  $g(x)$  关于直线  $x = 1$  对称, 故  $g(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递减, 且  $g(0) = g(2) = 0$ ,

当  $x < 0$  时,  $g(x) > 0$ , 则  $f(x) < 0$ ;

当  $1 < x < 2$  时,  $g(x) < 0$ , 则  $f(x) < 0$ ;

所以使得  $f(x) < 0$  成立的  $x$  的取值范围是  $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$ .

故选: C.

【变式 6-3】(2024·海南海口·模拟预测) 已知定义在  $[-3, 3]$  上的函数  $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x + 1$ , 若  $f(m^2) + f(m-2) \leq 2$ , 则  $m$  的取值范围是 ( )

A.  $[-2, 1]$

B.  $[-1, 2]$

C.  $[-1, \sqrt{3}]$

D.  $[-1, 1]$

【解题思路】根据  $g(x) = f(x) - 1$  的奇偶性以及单调性, 即可将问题转化为  $g(m^2) \leq g(2-m)$ , 即可求解.

【解答过程】记  $g(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ ,  $x \in [-3, 3]$ , 则  $g(-x) = e^{-x} - e^x + 2x = -g(x)$ ,

故  $g(x)$  为  $[-3, 3]$  的奇函数,

又  $g'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x e^{-x}} - 2 = 0$ ,

因此  $g(x)$  为  $[-3, 3]$  上的单调递增函数,

因为  $f(x) = g(x) + 1$ ,

由  $f(m^2) + f(m-2) \leq 2$  可得  $g(m^2) + g(m-2) + 2 \leq 2$ , 进而  $g(m^2) \leq g(2-m)$ ,

故  $-3 \leq m^2 \leq 2-m \leq 3$ , 解得  $-1 \leq m \leq 1$ ,

故选: D.

#### 【题型 7 导数中的函数零点(方程根)问题】

【例 7】(2024·黑龙江大庆·三模) 已知函数  $f(x) = |\ln x| - kx - 2$  有 2 个零点, 则实数  $k$  的取值范围是 ( )

A.  $(-e, \frac{1}{e^3})$

B.  $[0, \frac{1}{e^3})$

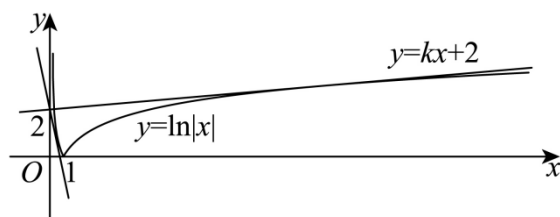
C.  $(-1, 0] \cup \{\frac{1}{e^3}\}$

D.  $(-e, 0] \cup \{\frac{1}{e^3}\}$

【解题思路】由函数  $f(x) = |\ln x| - kx - 2$  有 2 个零点, 得到方程  $|\ln x| = kx + 2$  有两个根, 转化成函数  $y = |\ln x|$

与 $y = kx + 2$ 的图象有两个公共点的问题.对于 $y = |\ln x|$ , 分 $0 < x < 1$ 和 $x > 1$ 两种情况讨论, 去掉绝对值得到图象.当 $0 < x < 1$ 时, 相切作为临界点, 求得相切时 $k = -e$ ; 当 $x > 1$ 时, 由相切得到 $k = \frac{1}{e^3}$ , 结合图象得到 $k$ 的取值范围.

【解答过程】已知函数 $f(x) = |\ln x| - kx - 2$ 有 2 个零点, 所以方程 $|\ln x| = kx + 2$ 有两个根, 即函数 $y = |\ln x|$ 与 $y = kx + 2$ 的图象有两个公共点.



(1) 当 $0 < x < 1$ 时,  $f(x) = |\ln x| = -\ln x, f'(x) = -\frac{1}{x}$ .

若直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $f(x) = |\ln x|$ 相切, 设切点坐标为 $P(x_1, -\ln x_1)$ , 则曲线在点 $P$ 处的切线方程为 $y - \ln x_1 = \left(-\frac{1}{x_1}\right)(x - x_1)$ .

又因为切线过点 $(0, 2)$ , 所以 $2 + \ln x_1 = \left(-\frac{1}{x_1}\right)(0 - x_1)$ , 解得 $x_1 = \frac{1}{e}$ , 即 $k = f'\left(\frac{1}{e}\right) = -e$ .

(2) 当 $x > 1$ 时,  $f(x) = |\ln x| = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x}$ .

若直线 $y = kx + 2$ 与曲线 $f(x) = |\ln x|$ 相切, 设切点坐标为 $Q(x_2, \ln x_2)$ , 则曲线在点 $Q$ 处的切线方程为 $y - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2)$ .

又因为切线过点 $(0, 2)$ , 所以 $2 - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(0 - x_2)$ , 解得 $x_2 = e^3$ , 即 $k = f'(e^3) = \frac{1}{e^3}$ .

综上, 结合函数 $y = |\ln x|$ 与函数 $y = kx + 2$ 的图象及增长速度可知, 当两个函数的图象有两公共点时 $k \in (-e, 0] \cup \left\{\frac{1}{e^3}\right\}$ .

故选: D.

【变式 7-1】(2024·河北衡水·模拟预测) 已知函数 $f(x) = \ln x + 1 - ax$ 有两个零点 $x_1, x_2$ , 且 $x_1 < x_2$ , 则下列命题正确的是 ( )

A.  $a > 1$

B.  $x_1 + x_2 < \frac{2}{a}$

C.  $x_1 \cdot x_2 < 1$

D.  $x_2 - x_1 > \frac{1}{a} - 1$

【解题思路】根据零点可将问题转化为 $a = \frac{\ln x + 1}{x}$ , 构造 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ , 求导即可根据函数的单调性得函数的大

致图象，即可根据图象求解 A，根据极值点偏移，构造函数  $h(x) = f\left(\frac{2}{a} - x\right) - f(x)$ ，结合函数的单调性即可

求解 B，根据  $x_1 + x_2 > \frac{2}{a}$  可得  $\ln(x_1 x_2) > 0$ ，即可求解 C，根据不等式的性质即可求解 D.

【解答过程】由  $f(x) = 0$  可得  $a = \frac{\ln x + 1}{x}$ ，令  $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ ，其中  $x > 0$ ，

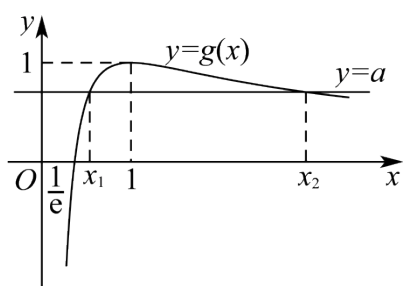
则直线  $y = a$  与函数  $g(x)$  的图象有两个交点， $g'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ ，

由  $g'(x) > 0$  可得  $0 < x < 1$ ，即函数  $g(x)$  的单调递增区间为  $(0, 1)$ ，

由  $g'(x) < 0$  可得  $x > 1$ ，即函数  $g(x)$  的单调递减区间为  $(1, +\infty)$ ，

且当  $0 < x < \frac{1}{e}$  时， $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x} < 0$ ，当  $x > \frac{1}{e}$  时， $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x} > 0$ ， $g(1) = 1$ ，

如下图所示：



由图可知，当  $0 < a < 1$  时，直线  $y = a$  与函数  $g(x)$  的图象有两个交点，故 A 错误；

由图可知， $\frac{1}{e} < x_1 < 1 < x_2$ ，

因为  $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x}$ ，由  $f'(x) > 0$  可得  $0 < x < \frac{1}{a}$ ，由  $f'(x) < 0$  可得  $x > \frac{1}{a}$ ，

所以，函数  $f(x)$  的增区间为  $(0, \frac{1}{a})$ ，减区间为  $(\frac{1}{a}, +\infty)$ ，则必有  $0 < x_1 < \frac{1}{a} < x_2$ ，

所以， $0 < x_1 < \frac{1}{a}$ ，则  $\frac{2}{a} - x_1 > \frac{1}{a}$ ，

令  $h(x) = f\left(\frac{2}{a} - x\right) - f(x) = \ln\left(\frac{2}{a} - x\right) - a\left(\frac{2}{a} - x\right) - \ln x + ax$ ，其中  $0 < x < \frac{1}{a}$ ，

则  $h'(x) = \frac{1}{x - \frac{2}{a}} - \frac{1}{x} + 2a = \frac{2a(x - \frac{1}{a})^2}{x(x - \frac{2}{a})} < 0$ ，则函数  $h(x)$  在  $(0, \frac{1}{a})$  上单调递减，

所以， $h(x_1) > h\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ ，即  $f\left(\frac{2}{a} - x_1\right) - f(x_1) > 0$ ，即  $f(x_1) < f\left(\frac{2}{a} - x_1\right)$ ，

又  $f(x_2) = f(x_1) = 0$ ，可得  $f(x_2) < f\left(\frac{2}{a} - x_1\right)$ ，

因为函数  $f(x)$  的单调递减区间为  $(\frac{1}{a}, +\infty)$ ，则  $x_2 > \frac{2}{a} - x_1$ ，即  $x_1 + x_2 > \frac{2}{a}$ ，故 B 错误；

由  $\begin{cases} ax_1 = \ln x_1 + 1 \\ ax_2 = \ln x_2 + 1 \end{cases}$ ，两式相加整理可得  $x_1 + x_2 = \frac{\ln(x_1 x_2) + 2}{a} > \frac{2}{a}$ ，

所以,  $\ln(x_1x_2) > 0$ , 可得  $x_1 \cdot x_2 > 1$ , 故 C 错误;

由图可知  $\frac{1}{e} < x_1 < 1 < x_2$ , 则  $-x_1 > -1$ , 又因为  $x_2 > \frac{1}{a}$ , 所以,  $x_2 - x_1 > \frac{1}{a} - 1$ , 故 D 正确.

故选: D.

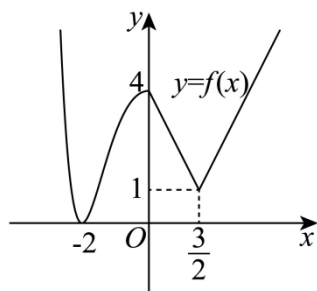
【变式 7-2】(2024·四川·模拟预测) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |3-2x|+1, & x > 0, \\ \frac{(x+2)^2}{e^x}, & x \leq 0. \end{cases}$  若函数  $y = [f(x)]^2 - af(x)$  有 5 个不同的零点, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(0,1]$       B.  $(1,4]$       C.  $(1,4)$       D.  $(1, +\infty)$

【解题思路】求得  $f'(x) = \frac{-x(x+2)}{e^x}$ , 得到函数  $f(x)$  的单调性和极值, 作出函数  $f(x)$  的图象, 根据题意, 转化为  $f(x) = 0$  和  $f(x) - a = 0$  共有 5 个不相等实数根, 结合图象, 即可求解.

【解答过程】当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = \frac{(x+2)^2}{e^x}$ , 此时  $f'(x) = \frac{-x(x+2)}{e^x}$ ,  
 则  $x < -2$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减;  $-2 < x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增,  
 所以, 当  $x = -2$  是  $f(x)$  的极小值点, 作出如图所示的函数  $f(x)$  的图象,  
 函数  $y = [f(x)]^2 - af(x)$  有 5 个不同的零点, 则方程  $[f(x)]^2 - af(x) = 0$ ,  
 即  $f(x)[f(x) - a] = 0$  有 5 个不相等实数根,  
 也即是  $f(x) = 0$  和  $f(x) - a = 0$  共有 5 个不相等实数根,  
 其中  $f(x) = 0$  有唯一实数根  $x = -2$ ,  
 只需  $f(x) - a = 0$  有 4 个且均不为 -2 的不相等实数根, 由图可知  $1 < a < 4$ ,  
 即实数  $a$  的取值范围为  $(1,4)$ .

故选: C.



【变式 7-3】(2024·四川南充·一模) 已知函数  $f(x) = \left| \ln x - \frac{2}{x} + 2 \right| - m$  ( $0 < m < 3$ ) 有两个不同的零点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 下列关于  $x_1, x_2$  的说法正确的有 ( ) 个

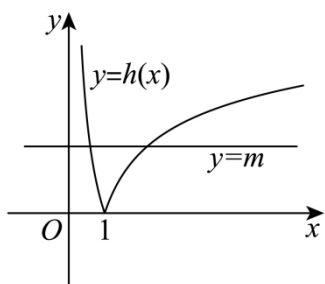
- ①  $\frac{x_2}{x_1} < e^{2m}$     ②  $x_1 > \frac{2}{m+2}$     ③  $e^{\frac{m}{3}} < x_2 < \frac{3}{3-m}$     ④  $x_1x_2 > 1$

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

【解题思路】

函数  $f(x) = \left| \ln x - \frac{2}{x} + 2 \right| - m$  ( $0 < m < 3$ ) 有两个不同零点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 转化为  $\left| \ln x - \frac{2}{x} + 2 \right| = m$  有两个交点, 构造函数  $g(x) = \left| \ln x - \frac{2}{x} + 2 \right|$ , 判断单调性, 利用数形结合, 判断①, 再根据①判断②, 再根据零点, 构造函数, 判断选项③, 根据零点判断④.

【解答过程】由函数  $f(x) = \left| \ln x - \frac{2}{x} + 2 \right| - m$  ( $0 < m < 3$ ) 有两个不同零点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 转化为  $\left| \ln x - \frac{2}{x} + 2 \right| = m$  ( $0 < m < 3$ ) 有两个交点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 构造函数  $g(x) = \ln x - \frac{2}{x} + 2$ ,  $h(x) = \left| \ln x - \frac{2}{x} + 2 \right|$ , 则  $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$ , 故  $g'(x) > 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增, 而  $g(1) = 0$ , 可得  $h(x)$  图象如图所示



故  $h(x)$  在  $(0, 1)$  单调递减, 在  $(1, +\infty)$  单调递增,

所以  $0 < x_1 < 1 < x_2$ ,

对于①,  $m = -\ln x_1 + \frac{2}{x_1} - 2 = \ln x_2 - \frac{2}{x_2} + 2$ ,

所以  $2m = -\ln x_1 + \ln x_2 + \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} > \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ ,

所以  $\frac{x_2}{x_1} < e^{2m}$ , 故①正确;

对于②, 由①可知  $m = -\ln x_1 + \frac{2}{x_1} - 2$ , 故  $mx_1 + 2x_1 - 2 = -x_1 \ln x_1 > 0$ ,

因此  $x_1 > \frac{2}{m+2}$ , 故②正确;

对于③, 因为  $0 < m < 3$ , 所以  $0 < \frac{m}{3} < 1$ , 故  $1 < e^{\frac{m}{3}} < e, \frac{3}{3-m} > 1$ ,

所以  $g\left(\frac{3}{3-m}\right) = \ln \frac{3}{3-m} - \frac{2(3-m)}{3} + 2 = \ln \frac{3}{3-m} + \frac{2m}{3}$ ,

则  $g\left(\frac{3}{3-m}\right) - m = -\ln(3-m) - \frac{m}{3} + \ln 3$ ,

构造函数  $Q(x) = -\ln(3-m) - \frac{m}{3} + \ln 3$ ,

则  $Q'(x) = \frac{1}{3-m} - \frac{1}{3} = \frac{m}{3(3-m)} > 0$ , 而  $Q(0) = 0$ ,

所以  $g\left(\frac{3}{3-m}\right) > m = g(x_2)$ ,

所以  $x_2 < \frac{3}{3-m}$ ,

因为  $g\left(e^{\frac{m}{3}}\right) = \frac{m}{3} - \frac{2}{e^{\frac{m}{3}}} + 2$ , 所以  $m - g\left(e^{\frac{m}{3}}\right) = 2\left(\frac{m}{3} - \frac{1}{e^{\frac{m}{3}}} + 1\right)$ ,

令  $\frac{m}{3} = t (0 < t < 1)$ , 构造  $I(t) = t - \frac{1}{e^t} + 1$ , 显然  $I(t)$  单调递增, 且  $I(0) = 0$ ,

所以  $m = g(x_2) > g\left(e^{\frac{m}{3}}\right)$

所以  $e^{\frac{m}{3}} < x_2 < \frac{3}{3-m}$ , 故③正确;

对于④, 由①可知,  $\ln x_1 x_2 = \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} - 4 > \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}} - 4$ ,

所以  $\ln x_1 x_2 - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}} + 4 > 0$ ,

令  $\sqrt{x_1 x_2} = n$ ,  $W(n) = 2 \ln n - \frac{4}{n} + 4$ , 显然  $W(n)$  单调递增, 且  $W(1) = 0$ ,

所以  $x_1 x_2 > 1$ , 故④正确.

故选: D.

### 【题型 8 导数中的不等式恒成立问题】

【例 8】(2024·陕西铜川·模拟预测) 已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{a} - \ln(x-1) - \ln a + 1$ , 若  $f(x) \geq 0$  对任意的  $x \in (1, +\infty)$  恒成立, 则  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $(0, \sqrt{e}]$

B.  $(0, e]$

C.  $(0, e^{\frac{3}{2}}]$

D.  $(0, e^2]$

【解题思路】依题意可得  $e^{x-\ln a} + x - \ln a \geq e^{\ln(x-1)} + \ln(x-1)$  对任意的  $x \in (1, +\infty)$  恒成立, 即可得到  $x - \ln a \geq \ln(x-1)$  对任意的  $x \in (1, +\infty)$  恒成立, 参变分离可得  $x - \ln(x-1) \geq \ln a$ , 令  $h(x) = x - \ln(x-1)$ ,  $x \in (1, +\infty)$ , 利用导数求出  $h(x)_{\min}$ , 即可求出参数的取值范围.

【解答过程】因为  $f(x) \geq 0$  对任意的  $x \in (1, +\infty)$  恒成立,

即  $\frac{e^x}{a} - \ln(x-1) - \ln a + 1 \geq 0$  对任意的  $x \in (1, +\infty)$  恒成立,

即  $e^{x-\ln a} + x - \ln a \geq \ln(x-1) + x - 1 = e^{\ln(x-1)} + \ln(x-1)$  对任意的  $x \in (1, +\infty)$  恒成立,

令  $g(x) = e^x + x$ , 则  $g'(x) = e^x + 1 > 0$ , 所以  $g(x) = e^x + x$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增,

又  $g(x - \ln a) \geq g[\ln(x-1)]$  对任意的  $x \in (1, +\infty)$  恒成立, ,

所以  $x - \ln a \geq \ln(x-1)$  对任意的  $x \in (1, +\infty)$  恒成立,

所以 $x - \ln(x-1) \geq \ln a$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立,

令 $h(x) = x - \ln(x-1)$ ,  $x \in (1, +\infty)$ ,

则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$ , 所以当 $1 < x < 2$ 时 $h'(x) < 0$ , 当 $x > 2$ 时 $h'(x) > 0$ ,

所以 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(2) = 2$ ,

所以 $\ln a \leq 2$ , 则 $0 < a \leq e^2$ , 即 $a$ 的取值范围为 $(0, e^2]$ .

故选: D.

【变式 8-1】(2024·河南·模拟预测) 已知 $\lambda > 0$ , 对任意的 $x > 1$ , 不等式 $e^{2\lambda x} - \left(\ln e^{\frac{1}{2\lambda}}\right) \ln x \geq 0$ 恒成立, 则实数 $\lambda$ 的取值范围为 ( )

A.  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

B.  $\left[\frac{1}{2e}, +\infty\right)$

C.  $[2e, +\infty)$

D.  $[e, +\infty)$

【解题思路】根据题意, 转化为 $2\lambda x e^{2\lambda x} \geq e^{\ln x} \ln x$ 恒成立, 令 $h(u) = ue^u$ , 利用导数求得 $h(u)$ 为单调递增函数, 得到 $h(2\lambda x) \geq h(\ln x)$ 恒成立, 进而转化为 $2\lambda \geq \frac{\ln x}{x}$ 恒成立, 构造函数 $m(t) = \frac{\ln t}{t}$ , 利用导数求得 $m(t)$ 单调性和最小值, 即可求解.

【解答过程】因为 $\lambda > 0$ , 所以整理不等式 $e^{2\lambda x} - \left(\ln e^{\frac{1}{2\lambda}}\right) \ln x \geq 0$ ,

可得 $2\lambda e^{2\lambda x} \geq \ln x$ , 转化为 $2\lambda x e^{2\lambda x} \geq e^{\ln x} \ln x$ 恒成立,

令 $h(u) = ue^u, u > 0$ , 则 $h'(u) = (u+1)e^u, u > 0$ ,

因为 $h'(u) > 0$ , 所以 $h(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(2\lambda x) \geq h(\ln x)$ 恒成立,

又因为 $\lambda > 0, x > 1$ , 所以 $2\lambda x > 0, \ln x > 0$ ,

所以 $2\lambda x \geq \ln x$ 对任意的 $x > 1$ 恒成立, 即 $2\lambda \geq \frac{\ln x}{x}$ 恒成立,

构造函数 $m(t) = \frac{\ln t}{t} (t > 1)$ , 则 $m'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} (t > 1)$ ,

当 $1 < t < e$ 时,  $m'(t) > 0$ ,  $m(t)$ 单调递增; 当 $t > e$ 时,  $m'(t) < 0$ ,  $m(t)$ 单调递减,

所以, 当 $t = e$ 时,  $m(t)_{\max} = \frac{1}{e}$ , 所以 $2\lambda \geq \frac{1}{e}$ , 即 $\lambda \geq \frac{1}{2e}$ .

故选: B.

【变式 8-2】(2024·陕西商洛·三模) 已知 $\lambda > 0$ , 对任意的 $x > 1$ , 不等式 $e^{2\lambda x} - \frac{\ln x}{2\lambda} \geq 0$ 恒成立, 则 $\lambda$ 的取值范围为 ( )

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/137024015156010033>