天津市南开区2024-2025学年高三上学期第一次月考数学检测试卷

一、单选题：本题共9小题，每小题5分，共4分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{x\in Z\,|\,|x|<2\}$，则$C_U A=$（　　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{-2,2,3\}$

C. $\{-2,-1,2\}$　　D. $\{-2,0,3\}$

2. 已知$a,b\in\mathbf{R}$，则“$2^{-a}<2^{-b}$”是“$a^2>b^2$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 对变量x,y由观测数据$(x_i,y_i)(i\in\mathbf{N}^*)$得散点图1；对变量$u,v$由观测数据$(u_i,v_i)(i\in\mathbf{N}^*)$得散点图2．$r_1$表示变量$x$，$y$之间的线性相关系数，$r_2$表示变量$u$，$v$之间的线性相关系数，则下列说法正确的是（　　）

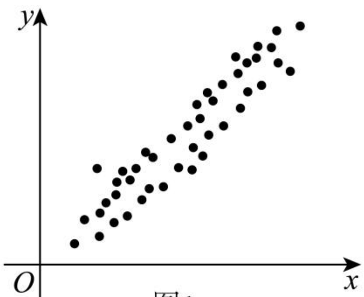


图1

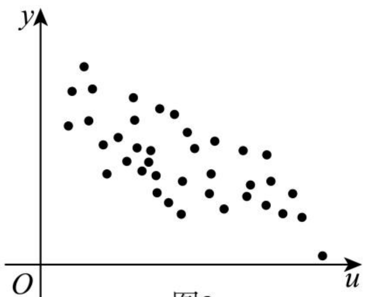
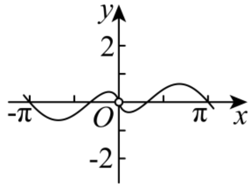


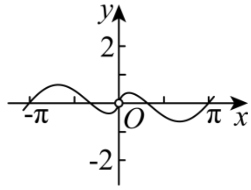
图2

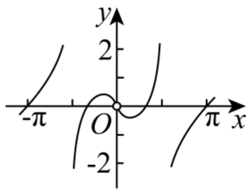
A. 变量x与y呈现正相关，且$|r_1|>|r_2|$　　B. 变量x与y呈现负相关，且$|r_1|<|r_2|$

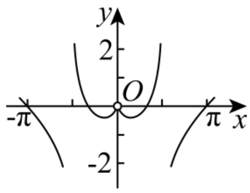
C. 变量u与v呈现正相关，且$|r_1|>|r_2|$　　D. 变量u与v呈现负相关，且$|r_1|<|r_2|$

4. 函数$f(x)=\sin x\cdot\ln|x|$的部分图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

5. 已知 $a=\log_6 3, b=\sin\frac{\pi}{6}, c=0.5^{-0.1}$，则（　　）

A. $a<b<c$

B. $b<c<a$

C. $c<a<b$

D. $b<a<c$

6. 已知 $\frac{2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-6$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=$（　　）

A. $-\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{5}$

C. -5

D. 5

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=9$，$a_4=3$，设 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$，则 $T_{21}=$（　　）

A. 245

B. 263

C. 281

D. 290

8. 嘉兴河流众多，许多河边设有如图所示的护栏，护栏与护栏之间用一条铁链相连.数学中把这种两端固定的一条均匀、柔软的链条，在重力的作用下所具有的曲线形状称为悬链线（*Catenary*）.已知函数 $f(x)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)(a>0)$ 的部分图象与悬链线类似，则下列说法正确的是（　　）

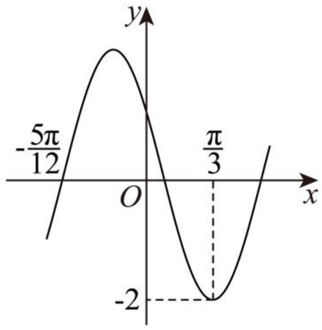
A. $f(x)$ 为奇函数

B. $f(x)$ 的最大值是 a

C. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增

D. 方程 $f(x)=2a$ 有 2 个实数解

9. 已知函数 $f(x)=\cos\omega x-\sqrt{3}\sin\omega x\ (\omega>0)$ 的部分图象如图所示，下列不正确的个数有（　　）



①函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$ 中心对称

②函数 $f\left(x\right)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}\right]\left(k\in\mathbf{Z}\right)$

③函数 $f\left(x\right)$ 的图象可由 $y=2\sin\omega x$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度得到

④函数 $g\left(x\right)=f\left(t\omega x\right)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 2 个零点，则实数 t 的取值范围为 $\left(\frac{7}{6},\frac{13}{6}\right]$

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

10. 记 i 是虚数单位，复数 z 满足 $z=\frac{3+4\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}$，则 $\bar{z}=$_______

11. $\left(2x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{12}$ 的展开式中常数项为_________.

12. 已知 $\vec{a}=(\lambda+1,2)$，$\vec{b}=(1,-\lambda)$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，$\lambda=$_________，$\vec{c}=(1,2)$ 在 $\vec{a}+\vec{b}$ 上的投影向量坐标为_________.

13. 为铭记历史、缅怀先烈，增强爱国主义情怀，某学校开展共青团知识竞赛活动．在最后一轮晋级比赛中，甲、乙、丙三名同学回答一道有关团史的问题，每个人回答正确与否互不影响．已知甲回答正确的概率为 $\frac{1}{2}$，甲、丙两人都回答正确的概率是 $\frac{1}{3}$，乙、丙两人都回答正确的概率是 $\frac{1}{6}$．若规定三名同学都回答这个问题，则甲、乙、丙三名同学中至少有 1 人回答正确的概率为______；若规定三名同学抢答这个问题，已知甲、乙、丙抢到答题机会的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，则这个问题回答正确的概率为______.

14. 已知 $\triangle OAB$ 中，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}$，记 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}\left(\lambda,\mu\in\mathrm{R}\right)$，则 $\lambda-\mu=$________；若 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=2$，当 $\angle BOC$ 最大时，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=$__________.

15. 已知函数 $f(x)=x\left|x^2-a\right|-a$，若 $f(x)$ 有三个零点，则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题：本题共 5 小题，共 75 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

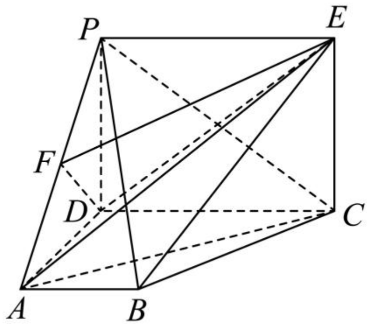
16. 在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $a^2-b^2+c^2=2$，△ABC 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

（1）求 $\tan B$；

（2）若 $b=1$，求 $\sin A\sin C$；

（3）求 $\cos 3B$ 的值.

17. 如图，直线 PD 垂直于梯形 $ABCD$ 所在的平面，$\angle ADC=\angle BAD=90°$，$F$ 为线段 PA 上一点，$PD=\sqrt{2}, AB=AD=\dfrac{1}{2}CD=1$，四边形 $PDCE$ 为矩形.



（1）若 F 是 PA 的中点，求证：AC // 平面 DEF；

（2）求直线 AE 与平面 BCP 所成角的正弦值：

（3）若点 F 到平面 BCP 的距离为 $\dfrac{1}{6}$，求 PF 的长.

18. 已知数列 $\{a_n\}$，$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$.

（1）证明：数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$，$\{a_{n+1}-3a_n\}$ 为等比数列；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（3）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

19. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 $S_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列，且公比大于 0，$b_2+b_3=12$，$b_3=a_4-2a_1$，$S_{11}=11b_4$.

（1）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{c_n\}$ 满足：$c_n=a_n\cdot b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n；

（3）若数列$\{d_n\}$满足：$d_n=\dfrac{b_n}{(b_n+1)(b_{n+1}+1)}$，求$\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$.

20. 已知函数$f(x)=x-\ln x-ax\mathrm{e}^{-x},a\in\mathbf{R}$.

（1）当$a=0$时，直线$y=kx$（k为常数）与曲线$f(x)$相切，求k的值；

（2）若$x\in(0,+\infty),f(x)\ge 0$恒成立，求$a$的取值范围；

（3）若$f(x)$有两个零点x_1,x_2，求证：$x_1+x_2>2$.

天津市南开区2024-2025学年高三上学期第一次月考数学检测试卷

时间：120 分钟　　总分：150 分

一、单选题：本题共 9 小题，每小题 5 分，共 4 分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{x\in Z\,|\,|x|<2\}$，则 $C_U A=$（　　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{-2,2,3\}$　　C. $\{-2,-1,2\}$　　D. $\{-2,0,3\}$

【答案】B

【解析】

【分析】由补集的运算即可求解.

【详解】解：$A=\{x\in Z\,|\,|x|<2\}=\{-1,0,1\}$，

$\therefore C_U A=\{-2,2,3\}$，

故选：B.

2. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$2^{-a}<2^{-b}$”是“$a^2>b^2$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】D

【解析】

【分析】分别化简 $2^{-a}<2^{-b}$ 和 $a^2>b^2$,再根据充分、必要条件判断即可.

【详解】因为 $y=2^x$ 在 R 单调递增，且 $2^{-a}<2^{-b}$，

所以 $-a<-b$，即 $a>b$

因为 $a^2>b^2$，所以 $a^2-b^2>0$,即 $(a+b)(a-b)>0$，

所以存在两种情况：$a+b>0$ 且 $a>b$，$a+b<0$ 且 $a<b$，

因此 $2^{-a}<2^{-b}$ 推不出 $a^2>b^2$，

同样 $a^2>b^2$ 推不出 $2^{-a}<2^{-b}$，

因此“$2^{-a}<2^{-b}$”是“$a^2>b^2$”的既不充分也不必要条件.

故选：D.

3. 对变量 x，y 由观测数据 $(x_i,y_i)(i\in\mathbf{N}^*)$ 得散点图 1；对变量 u，v 由观测数据 $(u_i,v_i)(i\in\mathbf{N}^*)$ 得散点图

2． r_1表示变量x,y之间的线性相关系数，r_2表示变量u,v之间的线性相关系数，则下列说法正确的是（　　）

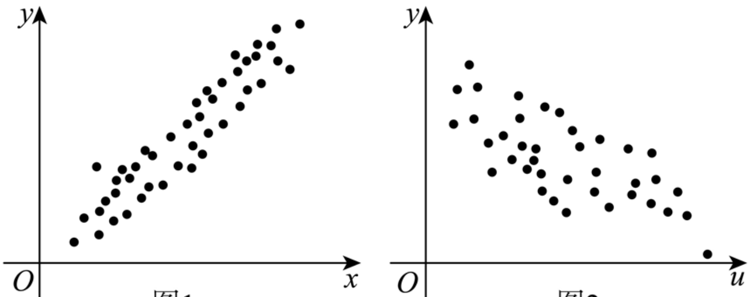


图1　　图2

A. 变量x与y呈现正相关，且$|r_1|>|r_2|$

B. 变量x与y呈现负相关，且$|r_1|<|r_2|$

C. 变量u与v呈现正相关，且$|r_1|>|r_2|$

D. 变量u与v呈现负相关，且$|r_1|<|r_2|$

【答案】A

【解析】

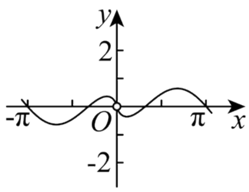
【分析】利用散点图，结合相关系数的知识可得答案.

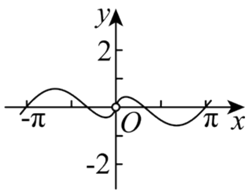
【详解】观察散点图，得变量x与y呈现正相关，变量u与v呈现负相关，BC错误；

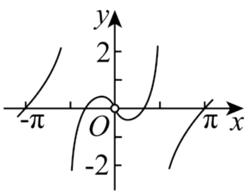
图1中各点比图2中各点更加集中，相关性更好，因此$|r_1|>|r_2|$，A正确，D错误.

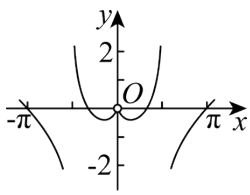
故选：A

4. 函数$f(x)=\sin x\cdot\ln|x|$的部分图象大致为（　　）

A.


B.


C.


D.


【答案】A

【解析】

【分析】分别利用函数的定义域、奇偶性与特殊值的正负排除不符合要求的选项即可得.

【详解】由$f(x)=\sin x\cdot\ln|x|$定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故可排除C；

又$f(-x)=\sin(-x)\cdot\ln|-x|=-\sin x\cdot\ln|x|=-f(x)$，

故$f(x)$为奇函数，故可排除D；

由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\ln\frac{\pi}{2}=\ln\frac{\pi}{2}>0$，故可排除 B；

故选：A.

5. 已知 $a=\log_6 3, b=\sin\frac{\pi}{6}, c=0.5^{-0.1}$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

【答案】D

【解析】

【分析】利用对数函数、指数函数的单调性及特殊角的正弦值比较大小即可.

【详解】易知 $b=\frac{1}{2}, c=\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.1}=2^{0.1}>2^{0}=1$，则 $b<c$，

又 $y=\log_6 x$ 定义域上单调递增，则 $\log_6\sqrt{6}<\log_6 3<\log_6 6$，

所以 $\frac{1}{2}<a<1$，

综上 $b<a<c$.

故选：D

6. 已知 $\frac{2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-6$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=$（　　）

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. -5　　D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】用二倍角公式、商数关系结合已知求得 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$，再由两角和的正切公式即可求解.

【详解】因为 $\frac{2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-6$，

所以 $2\tan^2\alpha+2\tan\alpha=-6\left(1-\tan^2\alpha\right)$ 且 $1-\tan^2\alpha\neq 0$，

即 $2\tan^2\alpha-\tan\alpha-3=0$，且 $1-\tan^2\alpha\neq 0$，解得 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$ 或 $\tan\alpha=-1$（舍去），

所以 $\tan\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{3\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{3\pi}{4}}=\frac{\frac{3}{2}-1}{1-\frac{3}{2}\times(-1)}=\frac{1}{5}$.

故选：B.

7. 已知等差数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=9$，$a_4=3$，设$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$，则$T_{21}=$（　　）

A. 245　　B. 263　　C. 281　　D. 290

【答案】C

【解析】

【分析】根据给定条件，求出等差数列$\{a_n\}$的公差及通项公式，判断正数、负数项，再求出T_{21}.

【详解】等差数列$\{a_n\}$中，由$a_1=9$，$a_4=3$，得公差$d=\dfrac{a_4-a_1}{4-1}=-2$，

则$a_n=a_1+(n-1)d=-2n+11$，显然当$n\le 5$时，$a_n>0$，当$n>6$时，$a_n<0$，

所以$T_{21}=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{21}|=(a_1+a_2+\cdots+a_5)-(a_6+a_7+\cdots+a_{21})$

$=2(a_1+a_2+\cdots+a_5)-(a_1+a_2+\cdots+a_{21})=2\times\dfrac{5(9+1)}{2}-\dfrac{21(9-31)}{2}=281$.

故选：C

8. 嘉兴河流众多，许多河边设有如图所示的护栏，护栏与护栏之间用一条铁链相连.数学中把这种两端固定的一条均匀、柔软的链条，在重力的作用下所具有的曲线形状称为悬链线（*Catenary*）.已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)\left(a>0\right)$的部分图象与悬链线类似，则下列说法正确的是（　　）

A. $f\left(x\right)$为奇函数　　B. $f\left(x\right)$的最大值是a

C. $f\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上单调递增　　D. 方程$f\left(x\right)=2a$有 2 个实数解

【答案】D

【解析】

【分析】根据函数奇偶性的定义判断函数的奇偶性，结合导数判断原函数的单调区间，进而确定最值，即可判断 ABC；对 D 解出$\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}=2\pm\sqrt{3}$，再结合指数函数性质即可判断.

【详解】对 A，$\because f(-x)=\dfrac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}\right)=f\left(x\right)$，则$f(x)$为偶函数，A 错误；

对 BC，又$\because f'(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)$，根据 $y=\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}, y=-\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}$，在 $\mathbf{R}$ 上均单调递增，

则在 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $f'(0)=0$，

则当 $x>0$ 时，则 $f'(x)>0$，当 $x<0$ 时，则 $f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$，故 C 错误；

则 $f(x)\geq f(0)=a$，即 $f(x)$ 的最小值为 a，B 错误；

对 D，法一：因为 $f(x)$ 为偶函数，且最小值为 a，$2a>a>0$，

并且根据 C 中 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$，且 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

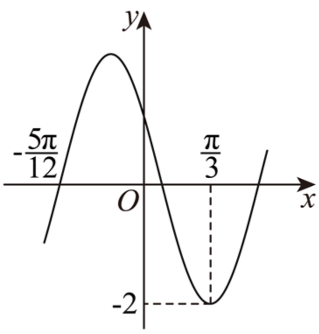
所以 $f(x)=2a$ 有 2 个实数解，故 D 正确.

法二：令$\because f(x)=2a, \therefore \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)=2a$ $,\therefore \mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}=4, \therefore \mathrm{e}^{\frac{x}{a}}=2\pm\sqrt{3}$，

再结合指数函数性质知方程 $f(x)=2a$ 有 2 个实数根, 故 D 正确. ,

故选：D

9. 已知函数 $f(x)=\cos\omega x-\sqrt{3}\sin\omega x(\omega>0)$ 的部分图象如图所示，下列不正确的个数有（　　）



①函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$ 中心对称

②函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

③函数 $f(x)$ 的图象可由 $y=2\sin\omega x$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度得到

④函数 $g(x)=f(t\omega x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 2 个零点，则实数 t 的取值范围为 $\left(\frac{7}{6},\frac{13}{6}\right]$

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据图象求出ω，然后结合正弦函数性质判断各命题.

【详解】$f\left(x\right)=2\left(\frac{1}{2}\cos\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x\right)=2\sin\left(\omega x+\frac{5\pi}{6}\right)$，

由图象知函数的最小正周期为$T=\frac{4}{3}(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{12})=\pi$，因此$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，即$f(x)=2\sin(2x+\frac{5\pi}{6})$，

$f(\frac{7\pi}{12})=2\sin(2\times\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{6})=0$，因此函数$f\left(x\right)$的图象关于点$\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$中心对称，①正确；

由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{5\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$得$k\pi-\frac{2\pi}{3}\le x\le k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，②正确；

$f(x)=2\sin(2x+\frac{5\pi}{6})=2\sin 2(x+\frac{5\pi}{12})$，因此把$y=2\sin 2x$的图象向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位长度得$f(x)$的图象，③正确；

由题意$g(x)=2\sin(4tx+\frac{5\pi}{6})$，$0<x<\pi$时，

当$t>0$时，$\frac{5\pi}{6}<4tx+\frac{5\pi}{6}<4t\pi+\frac{5\pi}{6}$，$g(x)$在$(0,\pi)$上有 2 个零点，则$2\pi<4t\pi+\frac{5\pi}{6}\le 3\pi$，解得$\frac{7}{24}<t\le\frac{13}{24}$，

当$t<0$时，$4t\pi+\frac{5\pi}{6}<4tx+\frac{5\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，$g(x)$在$(0,\pi)$上有 2 个零点，则$-2\pi\le 4t\pi+\frac{5\pi}{6}<-\pi$，解得$-\frac{17}{24}\le t<-\frac{11}{24}$，

因此t的范围是$\frac{7}{24}<t\le\frac{13}{24}$或$-\frac{17}{24}\le t<-\frac{11}{24}$，④错.

故选：B.

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

10. 记 i 是虚数单位，复数z满足$z=\frac{3+4i}{4-3i}$，则$\overline{z}=$_______

【答案】$-i$

【解析】

【分析】利用复数除法求出复数z，再利用共轭复数的定义求解即得.

【详解】依题意，$z=\frac{(3+4i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{25i}{25}=i$，所以$\overline{z}=-i$.

故答案为：$-i$

11. $\left(2x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{12}$的展开式中常数项为________.

【答案】-1760

【解析】

【分析】写出其展开式的通项，然后令指数部分为0，求解即可.

【详解】$\left(2x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{12}$的二项展开式的通项为$T_{r+1}=\mathrm{C}_{12}^{r}\left(2x\right)^{12-r}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{r}=\left(-1\right)^{r}\cdot 2^{12-r}\cdot\mathrm{C}_{12}^{r}\cdot x^{12-\frac{4r}{3}}$，

令$12-\frac{4r}{3}=0$，得$r=9$，

其展开式的常数项为$(-1)^{9}\cdot 2^{12-9}\cdot\mathrm{C}_{12}^{9}=-8\mathrm{C}_{12}^{3}=-1760$.

故答案为：-1760

12. 已知$\vec{a}=(\lambda+1,2)$，$\vec{b}=(1,-\lambda)$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，$\lambda=$________，$\vec{c}=(1,2)$在$\vec{a}+\vec{b}$上的投影向量坐标为________.

【答案】 ①. 1； ②. $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

【解析】

【分析】根据向量垂直的坐标表示求出λ，然后由投影向量公式可得投影向量坐标.

【详解】因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，所以$\left(\lambda+1\right)\times 1+2\times\left(-\lambda\right)=0$，解得$\lambda=1$，

所以$\vec{a}+\vec{b}=\left(2,2\right)+\left(1,-1\right)=\left(3,1\right)$，

因为$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=3\times 1+1\times 2=5,\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3^{2}+1^{2}}=\sqrt{10}$，

所以$\vec{c}=(1,2)$在$\vec{a}+\vec{b}$上的投影向量坐标为$\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^{2}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{5}{10}\left(3,1\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

故答案为：1；$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

13. 为铭记历史、缅怀先烈，增强爱国主义情怀，某学校开展共青团知识竞赛活动．在最后一轮晋级比赛中，甲、乙、丙三名同学回答一道有关团史的问题，每个人回答正确与否互不影响．已知甲回答正确的概率为$\frac{1}{2}$，甲、丙两人都回答正确的概率是$\frac{1}{3}$，乙、丙两人都回答正确的概率是$\frac{1}{6}$．若规定三名同学都回答这个问题，则甲、乙、丙三名同学中至少有1人回答正确的概率为______；若规定三名同学抢答这个问题，已知甲、乙、丙抢到答题机会的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，则这个问题回答正确的概率为______.

【答案】　①. $\frac{7}{8}$##0.875　②. $\frac{37}{72}$

【解析】

【分析】根据题意，设甲回答正确为事件A，乙回答正确为事件B，丙回答正确为事件C，先由相互独立事件的概率公式求出$P(B)$、$P(C)$的值，结合对立事件的性质求出第一空答案，利用全概率公式计算第二空的答案.

【详解】根据题意，设甲回答正确为事件A，乙回答正确为事件B，丙回答正确为事件C，

则$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{3}$，$P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{6}$，

所以$P(C)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，

若规定三名同学都回答这个问题，

则甲、乙、丙三名同学中至少有1人回答正确的概率$P_1=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{8}$，

若规定三名同学抢答这个问题，已知甲、乙、丙抢到答题机会的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，

则这个问题回答正确的概率$P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{37}{72}$.

故答案为：$\frac{7}{8}$；$\frac{37}{72}$.

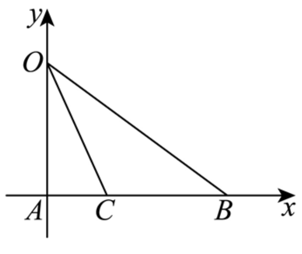
14. 已知$\triangle OAB$中，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}$，记$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathrm{R})$，则$\lambda-\mu=$________；若$|\overrightarrow{OA}|=2$，当$\angle BOC$最大时，$|\overrightarrow{AB}|=$__________.

【答案】　①. $\frac{1}{3}$##3^{-1}　②. $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】用基底$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OC}$，即可求得$\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$；建立平面直角坐标系，用向量方法表示出$\cos\angle BOC$，求解$\cos\angle BOC$最小，即可得到$\angle BOC$最大时$|\overrightarrow{AB}|$.

【详解】



因为$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}$，所以$\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$，

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，

所以$\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$，$\lambda-\mu=\frac{1}{3}$；

因为$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，所以$AO\perp AB$，以A为坐标原点建立如图所示直角坐标系，则$A\left(0,0\right)$，$O\left(0,2\right)$，

设$\left|\overrightarrow{CA}\right|=b$，则$C\left(b,0\right)$，$B\left(3b,0\right)$，则$\overrightarrow{OC}=\left(b,-2\right)$，$\overrightarrow{OB}=\left(3b,-2\right)$，

$$\cos\angle BOC=\frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}=\frac{3b^2+4}{\sqrt{b^2+4}\times\sqrt{9b^2+4}}=\sqrt{\frac{9b^4+24b^2+16}{9b^4+40b^2+16}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{16b^2}{9b^4+40b^2+16}}=\sqrt{1-\frac{1}{\frac{9}{16}b^2+\frac{1}{b^2}+\frac{5}{2}}}\geq\sqrt{1-\frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{16}b^2\cdot\frac{1}{b^2}}+\frac{5}{2}}}$$

$=\sqrt{1-\frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当$b^2=\frac{4}{3}$时取等号，

此时$b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=3b=2\sqrt{3}$，$\cos\angle BOC$最小，$\angle BOC$最大，

所以当$\angle BOC$最大时，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$，$2\sqrt{3}$.

15. 已知函数$f(x)=x\left|x^2-a\right|-a$，若$f(x)$有三个零点，则实数$a$的取值范围是______.

【答案】$a>\frac{27}{4}$

【解析】

【分析】对a进行分类讨论，分（1）$a=0$，$a<0$和$a>0$三类情况，集合导数的性质和数形结合即可求出结果.

【详解】（1）$a=0$时，$f(x)=x\left|x^2\right|=x^3$，只有一个零点，不合题意；

（2）$a<0$时，$f(x)=x(x^2-a)-a=x^3-ax-a$，$f'(x)=3x^2-a>0$，$f(x)$在R上单调递增，

所以，$f(x)=x^3-ax-a=0$不可能有3个解，也不合题意.

（3）$a>0$时，$f(x)=x\left|x^2-a\right|-a=0$，得$\left|x^2-a\right|=\frac{a}{x}$

画出函数：$g(x)=\left|x^2-a\right|,h(x)=\frac{a}{x}$的图象，如图：